



(2+1)维复 Ginzburg-Landau 方程的 有限差分法及稳定性分析

陈昌娣,徐映红

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘要:以包含色散、光学滤波、非线性增益和线性增益项的(2+1)维复 Ginzburg-Landau 方程为研究对象,提出了求解该方程的有限差分格式,证明了方程解的有界性、差分格式的稳定性。首先,构造了求解该方程的有限差分格式,时间上采用二阶倒向微分格式,空间上采用中心差分格式,利用外推方法替代非线性项,从而得到一个二层非线性差分格式及其对应的交替方向隐格式。然后,利用傅里叶分析方法从理论上证明了该格式是无条件稳定的。最后,通过数值实验验证差分格式模拟孤子演化的有效性,并探究初始扰动和边界扰动对孤子演化的影响。结果表明:该差分格式是稳定的,且具有二阶精度;相比边界扰动,初始扰动对孤子演化的影响更大。该研究结果可丰富 Ginzburg-Landau 方程的理论研究,为研究 Ginzburg-Landau 方程的参数确定反问题提供一定基础。

关键词: Ginzburg-Landau 方程;数值模拟;有限差分法;傅里叶分析;稳定性

中图分类号: TS101; O242.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2025) 05-0432-10

引文格式:陈昌娣,徐映红. (2+1)维复 Ginzburg-Landau 方程的有限差分法及稳定性分析[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2025,53(3):432-441.

Reference Format: CHEN Changdi, XU Yinghong. The finite difference method and stability analysis of a (2+1) dimensional complex Ginzburg-Landau equation[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University,2025,53(3):432-441.

The finite difference method and stability analysis of a (2+1) dimensional complex Ginzburg-Landau equation

CHEN Changdi, XU Yinghong

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: For a (2+1)-dimensional complex Ginzburg-Landau equation with dispersion, optical filtering, nonlinear gain and linear gain terms, a finite difference scheme was proposed to solve the equation. The boundedness of the solution and the stability of the difference scheme were proved. First, a finite difference scheme was given to solve the equation. The second-order backward difference scheme was used for time term, the central differential scheme was used for space term, and the extrapolation method was used to replace the nonlinear term. A two-layer nonlinear difference scheme and its corresponding alternating direction implicit scheme were obtained. Then, the Fourier analysis method was used to prove that the scheme is unconditionally stable. Finally, the effectiveness of the difference scheme to simulate the evolution of solitons was verified by numerical experiments. And the effects of initial and boundary perturbations on the evolution of solitons were studied. Numerical results show that the scheme is stable and has second-order accuracy. The initial perturbation has more influence on the evolution of soliton than the boundary perturbation. The research results can enrich the theoretical research of Ginzburg-Landau equation, and provide a certain basis for the study of the inverse problem of parameter determination of

收稿日期: 2023-02-22 网络出版日期: 2023-09-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(11501513, 11471287); 浙江省自然科学基金项目(LY18A010030)

作者简介: 陈昌娣(1997—), 女, 贵州贵阳人, 硕士研究生, 主要从事反问题理论及应用方面的研究。

通信作者: 徐映红, E-mail: xyh7913@163.com

Ginzburg-Landau equation.

Key words: Ginzburg-Landau equation; numerical simulation; finite difference method; Fourier analysis; stability

0 引 言

Ginzburg-Landau 方程是一类描述耗散系统的微分方程模型, 可用来描述二阶相变、超导、玻色-爱因斯坦凝聚等各种非线性现象^[1-2]。复 Ginzburg-Landau 方程 (Complex Ginzburg-Landau equation, CGLE) 的解称为稳态耗散孤子, 可以用来表示光强、温度或磁场。只有当系统中的非线性效应、色散效应、衍射效应等达到某一平衡时才能产生稳态耗散孤子。稳态耗散孤子生成的高能量超短光脉冲可应用于激光加工、光通信、生物医疗等领域^[3-4]。高能超短光脉冲可在实验室里创造出只在恒星内部或黑洞边缘才具有的极端条件, 例如超强电磁场、超高能量密度和超强光压等。

为获取高能超短光脉冲, 了解其产生的条件, 需深入研究 CGLE 方程的正反问题。CGLE 方程的正问题是根据方程和初边界计算出脉冲在不同时空区域上的分布情况, 而参数确定反问题是根据理想脉冲观测数据确定控制光脉冲传播的偏微分方程中的参数值。反问题研究对于制取理想脉冲有重要意义, 如果要研究 CGLE 方程的反问题, 首先须对 CGLE 方程的正问题进行求解。

国内外许多研究者对 CGLE 方程稳态耗散孤子的存在性和性质进行了研究。如 He 等^[5]针对具有宇称时间对称势的 (1+1) 维三次五次 CGLE 方程, 研究了在光学介质中耗散晶格孤子的存在性、稳定性和动力学性质。Liu 等^[6]利用非线性克尔定律和幂律, 得到了 (1+1) 维 CGLE 方程对应的孤子, 并通过具体算例验证了孤子的存在性。Osman 等^[7]研究了具有 Kerr 非线性 CGLE 方程的孤子, 讨论了不同孤子的物理意义。Yan 等^[8]求出了变系数三次五次 CGLE 方程的单孤子解, 研究了孤子脉冲的分裂现象和亮孤子的稳定束缚态。胡艳等^[9]通过分数阶复变换将时空分数阶 CGLE 方程转化为初等积分形式的方程, 利用多项式完全判别系统方法, 求出了分数阶 CGLE 方程的多种孤子。杨佳奇等^[10]利用修正的 Hirota 方法, 求出了变系数 (3+1) 维三次五次 CGLE 方程的解析孤子, 讨论了改变非线性、光谱滤波、线性损失等参数对孤子传输特性的影响, 实现了对亮孤子和混合孤子传输的有效控制。通过对稳态耗散孤子的存在性及其性质的研究, 可以更好地理解孤子的传输特性, 分析孤子的传输速度、脉冲宽度、振幅等的影响因素。

然而随着研究的深入, 方程的非线性项越来越复杂, 方程的孤子解析解难以求出, 甚至不存在。因此, 许多研究者也开始研究另一种形式的稳态耗散孤子, 即方程的数值解。Shokri 等^[11]用高阶紧致交替方向隐式差分格式求解具有周期性边界条件的 (2+1) 维 CGLE 方程, 构造的差分格式在空间和时间上分别具有四阶和二阶精度。Hao 等^[12]提出了 (2+1) 维 CGLE 方程的线性化紧格式, 利用归纳法证明了该格式在离散最大范数下无条件收敛。Shi 等^[13]利用 Galerkin 有限元方法对 (1+1) 维 CGLE 方程进行了无条件超收敛估计, 突破了以往对时间步长的限制。王鹏德等^[14]针对带 Riesz 分数阶导数的非线性空间分数阶 CGLE 方程, 引入一类二阶带权隐显式差分格式, 该类格式在每一时间步仅需求解一个系数矩阵与时间层无关的线性方程组, 并利用离散能量方法和 G 稳定性思想证明了该格式在不同范数意义下的无条件收敛性。Wang^[15]提出了一种快速有效的光谱-Galerkin 方法, 将其用于求解含分数阶拉普拉斯算子的 CGLE 方程。该方法在时间上具有二阶精度, 在空间上具有代数精度。宋岩等^[16]针对分数阶 CGLE 方程离散产生的复线性方程组提出了一种有效的块分裂迭代法, 在求解线性方程组时不要求系数矩阵的逆, 从而减少了计算量和存储空间, 复杂的 CGLE 方程也可以找到其解。

求解偏微分方程数值解的常用方法有傅里叶谱方法^[17-18]、有限元法^[19-20]和有限差分法^[21-24]。傅里叶谱方法的优点是具有无穷阶精度和指数阶收敛性, 但主要适用于求解周期性边界条件问题; 该方法对解的“光滑性”要求高, 当求解区域比较复杂时无法灵活运用。有限元方法可模拟各种复杂的几何形状, 适合求解非线性、非匀质问题, 但对复杂问题或无限求解域问题表现差, 具体应用时需依赖使用者经验。有限差分法虽然不适合处理具有复杂边界条件的问题, 但该方法实现简单、内存占用比较低, 且效率高, 是研究偏微分方程数值解最为成熟的方法。本文利用有限差分法求解具有色散、光学滤波、非线性增益和线性增益项的 (2+1)

维 CGLE 方程,并对数值解的稳定性进行讨论。

本文以包含色散、光学滤波、非线性增益和线性增益项的(2+1)维复 Ginzburg-Landau 方程为研究对象,首先证明了方程的解的有界性,使用有限差分法求解方程,得到了求解的交替方向隐(Alternating directional implicit, ADI)格式,并利用傅里叶分析方法对差分格式的稳定性进行分析。然后进行数值实验,将数值解与孤子真实解进行比较,以验证差分格式的有效性。最后,通过添加初始扰动和边界扰动,研究噪声对孤子演化的影响。该问题的研究,能丰富 Ginzburg-Landau 方程的求解方法,并对进一步研究 CGLE 的反问题从而生成稳态耗散孤子具有重要意义。

1 CGLE 方程的差分格式

1.1 CGLE 方程的初边值问题

本文主要研究具有色散、光学滤波、非线性增益和线性增益项的(2+1)维复 Ginzburg-Landau 方程,该方程描述了光脉冲在光纤中的传播过程。假设光束在平面 (x, y) 上的二维横截面沿无量纲空间坐标 t 演化,其 CGLE 方程的形式如下:

$$i\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x^2 u + \frac{1}{2}(\beta_0 - i\beta_1)\partial_y^2 u + (1 - i\gamma_0)|u|^2 u + i\gamma_1 u = 0, (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T \quad (1)$$

其中:复函数 $u(x, y, t)$ 表示光场的复包络, $i=\sqrt{-1}$ 表示虚数单位, β_0 和 β_1 分别代表色散和光学滤波,衍射系数和立方自聚焦系数归一化为1, γ_0 和 γ_1 分别表示非线性增益和线性增益, $|u|^2 u$ 和 $\partial_x^2 u$ 分别与光脉冲的自聚焦科尔非线性和横向衍射有关, $\Omega=(x_a, x_b) \times (y_a, y_b)$ 表示空间区间, $t \in (0, T]$ 表示时间区间。

为表示方便,本文记 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}(\beta_0 - i\beta_1), a_3 = 1 - i\gamma_0, a_4 = i\gamma_1$ 。方程(1)的初边值问题可以表示为:

$$\begin{cases} i\partial_t u + a_1 \partial_x^2 u + a_2 \partial_y^2 u + a_3 |u|^2 u + a_4 u = 0, (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T; \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), (x, y) \in \Omega; \\ u(x, y, t) = g(x, y, t), (x, y) \in \Gamma, 0 < t \leq T \end{cases} \quad (2)$$

其中: φ 和 g 是光滑函数, Γ 是 Ω 的边界。

1.2 CGLE 方程解的有界性

在构造差分格式之前,先证明系统(2)的解的有界性。

引理 1^[25] 假设 $g(t)$ 连续, $h(t)$ 局部可积, x 满足下列微分不等式

$$\frac{d}{dt}x(t) \leq g(t)x(t) + h(t),$$

则有

$$x(t) \leq x(0)e^{G(t)} + \int_0^t e^{G(t)-G(s)} h(s) ds,$$

其中: $G(t) = \int_0^t g(r) dr$ 。

定理 1 当 $\text{Im}(gg_x) > 0, \text{Im}((i\beta_1 - \beta_0)gg_y) < 0$ 时,系统(2)的精确解有界,即对于任意的 $t \in (0, T]$,有下式成立:

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, \cdot, t)\|^2 &= \iint_{\Omega} |u(x, y, t)|^2 dx dy \\ &\leq e^{-2\gamma_1 t} \|u(\cdot, \cdot, 0)\|^2 + \int_0^t e^{2\gamma_1(s-t)} (2\gamma_0 \|u(\cdot, \cdot, s)\|_4^4 - \beta_1 \|u_y(\cdot, \cdot, s)\|^2) ds, \end{aligned}$$

其中: $\text{Im}(\cdot)$ 表示虚部。

证明 用 u 与系统(2)的方程两边作内积,可得

$$i(\delta_t u, u) + \frac{1}{2}(\delta_x^2 u, u) + \frac{1}{2}(\beta_0 - i\beta_1)(\delta_y^2 u, u) + (1 - i\gamma_0) \|u\|_4^4 + i\gamma_1 \|u\|^2 = 0, 0 < t \leq T \quad (3)$$

应用分部积分法,有

$$(\delta_x^2 u, u) = \iint_{\Omega} uu_{xx} dx dy = \iint_{\Omega} u du_x dy = \int_{y_a}^{y_b} (uu_x)|_{x_a}^{x_b} dy - \iint_{\Omega} u_x^2 dx dy = \int_{y_a}^{y_b} (uu_x)|_{x_a}^{x_b} dy - \|u_x\|^2 \quad (4)$$

同理有

$$(\delta_y^2 u, u) = \int_{x_a}^{x_b} (uu_y)|_{y_a}^{y_b} dx - \|u_y\|^2 \quad (5)$$

将式(4)和式(5)代入式(3)可得

$$\begin{aligned} i(\delta_t u, u) &= -\frac{1}{2}(\delta_x^2 u, u) + \frac{1}{2}(i\beta_1 - \beta_0)(\delta_y^2 u, u) - (1 - i\gamma_0)\|u\|_4^4 - i\gamma_1\|u\|^2 \\ &= -\frac{1}{2}\int_{y_a}^{y_b} (uu_x)|_{x_a}^{x_b} dy + \frac{1}{2}\|u_y\|^2 + \frac{1}{2}(i\beta_1 - \beta_0)\int_{x_a}^{x_b} (uu_y)|_{y_a}^{y_b} dx - \frac{1}{2}(i\beta_1 - \beta_0)\|u_y\|^2 \\ &\quad - (1 - i\gamma_0)\|u\|_4^4 - i\gamma_1\|u\|^2. \end{aligned}$$

再对上式取虚部可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|u(\cdot, \cdot, t)\|^2)_t &= -\frac{1}{2}\text{Im}\left(\int_{y_a}^{y_b} (uu_x)|_{x_a}^{x_b} dy\right) + \frac{1}{2}\text{Im}\left((i\beta_1 - \beta_0)\int_{x_a}^{x_b} (uu_y)|_{y_a}^{y_b} dx\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\beta_1\|u_y\|^2 + \gamma_0\|u\|_4^4 - \gamma_1\|u\|^2. \end{aligned}$$

于是

$$(\|u(\cdot, \cdot, t)\|^2)_t \leq 2\gamma_0\|u(\cdot, \cdot, t)\|_4^4 - 2\gamma_1\|u(\cdot, \cdot, t)\|^2 - \beta_1\|u_y\|^2.$$

应用引理 1 得

$$\|u(\cdot, \cdot, t)\|^2 \leq e^{-2\gamma_1 t}\|u(\cdot, \cdot, 0)\|^2 + \int_0^t e^{2\gamma_1(s-t)}(2\gamma_0\|u(\cdot, \cdot, s)\|_4^4 - \beta_1\|u_y(\cdot, \cdot, s)\|^2) ds.$$

1.3 CGLE 方程的二层非线性差分格式

下面使用有限差分法求解系统(2)。

将求解区域 $[x_a, x_b] \times [y_a, y_b] \times (0, T]$ 作剖分。取正整数 M_1, M_2, N , 将 $[x_a, x_b]$ 和 $[y_a, y_b]$ 分别作 M_1, M_2 等分, 将 $(0, T]$ 作 N 等分。记 $h_1 = \frac{x_b - x_a}{M_1}, h_2 = \frac{y_b - y_a}{M_2}, \tau = \frac{T}{N}, x_p = x_a + ph_1 (0 \leq p \leq M_1), y_q = y_a + qh_2 (0 \leq q \leq M_2), t_k = kt, 0 \leq k \leq N$ 。

令 $\bar{\omega} = \{(p, q) | 0 \leq p \leq M_1, 0 \leq q \leq M_2\}, \omega = \{(p, q) | 1 \leq p \leq M_1 - 1, 1 \leq q \leq M_2 - 1\}, \partial\omega = \bar{\omega} / \omega, \bar{\Omega}_h = \{(x_p, y_q) | 0 \leq p \leq M_1, 0 \leq q \leq M_2\}, \Omega_\tau = \{t_k | 0 \leq k \leq N\}$ 。 Γ_h 表示 Γ 上节点的集合, $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ 。本文引入如下记号:

$$\begin{aligned} u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(u_{pq}^k + u_{pq}^{k+1}), \\ \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\tau}(u_{pq}^{k+1} - u_{pq}^k), \\ \delta_x^2 u_{pq}^k &= \frac{1}{h_1^2}(u_{p-1,q}^k - 2u_{pq}^k + u_{p+1,q}^k), \\ \delta_x^2 u_{pq}^k &= \frac{1}{h_2^2}(u_{p,q-1}^k - 2u_{pq}^k + u_{p,q+1}^k). \end{aligned}$$

定义网格函数

$$U_{pq}^k = u(x_p, y_q, t_k), (p, q) \in \bar{\omega}, 0 \leq k \leq N.$$

在点 $(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}})$ 处, 根据系统(2)可得

$$\begin{aligned} i\delta_t u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) &+ a_1 \partial_x^2 u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) + a_2 \partial_y^2 u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) + a_3 |u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}})|^2 \\ &u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) + a_4 u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) = 0, (p, q) \in \omega, 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (6)$$

使用 Taylor 展开得

$$\begin{aligned}\partial_t u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \delta_t U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \\ \partial_x^2 u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \delta_x^2 U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + O(h_1^2), \\ \partial_y^2 u(x_p, y_q, t_{k+\frac{1}{2}}) &= \delta_y^2 U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + O(h_2^2).\end{aligned}$$

将上面三个式子代入式(6),得

$$i\delta_t U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_1 \delta_x^2 U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_2 \delta_y^2 U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_3 |U_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_4 U_{pq}^{k+\frac{1}{2}} = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2),$$

$$(p, q) \in \omega, 0 \leq k \leq N-1 \quad (7)$$

由系统(2)中的初边界条件可得

$$\begin{aligned}U_{pq}^0 &= \varphi(x_p, y_q), (p, q) \in \omega, \\ U_{pq}^k &= g(x_p, y_q, t_k), (p, q) \in \partial\omega, 0 \leq k \leq N.\end{aligned}$$

忽略式(7)中的无穷小项,用 u_{pq}^k 代替 U_{pq}^k ,得到如下差分格式:

$$i\delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_1 \delta_x^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_2 \delta_y^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_3 |u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + a_4 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} = 0, (p, q) \in \omega, 1 \leq k \leq N-1 \quad (8)$$

其对应的初边界条件为

$$\begin{aligned}u_{pq}^0 &= \varphi(x_p, y_q), (p, q) \in \omega, \\ u_{pq}^k &= g(x_p, y_q, t_k), (p, q) \in \partial\omega, 0 \leq k \leq N.\end{aligned}$$

1.4 CGLE 方程的 ADI 格式

接下来将差分格式(8)改写为 ADI 格式。在格式两边同时乘以 $-i$ 并移项,可得

$$\begin{aligned}\delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} &= ia_1 \delta_x^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + ia_2 \delta_y^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + ia_3 |u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + ia_4 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{ia_1}{2} \delta_x^2 (u_{pq}^{k+1} + u_{pq}^k) + \frac{ia_2}{2} \delta_y^2 (u_{pq}^{k+1} + u_{pq}^k) + ia_3 |u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + ia_4 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

上式等价于

$$\delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{ia_1}{2} \delta_x^2 u_{pq}^{k+1} - \frac{ia_2}{2} \delta_y^2 u_{pq}^{k+1} = \frac{ia_1}{2} \delta_x^2 u_{pq}^k + \frac{ia_2}{2} \delta_y^2 u_{pq}^k + ia_3 |u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + ia_4 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}.$$

在上式两边同时加上 $\frac{ia_1}{2} \delta_x^2 u_{pq}^k + \frac{ia_2}{2} \delta_y^2 u_{pq}^k$ 可得

$$\delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{i\tau a_1}{2} \delta_x^2 \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{i\tau a_2}{2} \delta_y^2 \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} = ia_1 \delta_x^2 u_{pq}^k + ia_2 \delta_y^2 u_{pq}^k + ia_3 |u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + ia_4 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} \quad (9)$$

因

$$\left(I - \frac{i\tau a_1}{2} \delta_x^2\right) \left(I - \frac{i\tau a_2}{2} \delta_y^2\right) \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} = \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{i\tau a_1}{2} \delta_x^2 \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{i\tau a_2}{2} \delta_y^2 \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + O(\tau^2) \quad (10)$$

忽略式(10)中的截断误差 $O(\tau^2)$,则式(9)可被表示为

$$\left(I - \frac{i\tau a_1}{2} \delta_x^2\right) \left(I - \frac{i\tau a_2}{2} \delta_y^2\right) \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} = ia_1 \delta_x^2 u_{pq}^k + ia_2 \delta_y^2 u_{pq}^k + ia_3 |u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + ia_4 u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} \quad (11)$$

由

$$u^k = u^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2} u_t^{k+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), u^{k-1} = u^{k+\frac{1}{2}} - \frac{3\tau}{2} u_t^{k+\frac{1}{2}} + O(\tau^2),$$

可得

$$\frac{3u^k - u^{k-1}}{2} = u^{k+\frac{1}{2}} + O(\tau^2).$$

由于式(11)中含有非线性项,为提高计算效率并保证误差减小,用外推算子 $E(u^k) = \frac{3u^k - u^{k-1}}{2}$ 代替 $u^{k+\frac{1}{2}}$ 。因此,差分格式(8)等价于

$$\left(I - \frac{i\tau a_1}{2} \delta_x^2\right) \left(I - \frac{i\tau a_2}{2} \delta_y^2\right) \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} = ia_1 \delta_x^2 u_{pq}^k + ia_2 \delta_y^2 u_{pq}^k + ia_3 |E(u_{pq}^k)|^2 E(u_{pq}^k) + ia_4 E(u_{pq}^k)。$$

引入一个新的中间变量 u_{pq}^* ,将二维求解问题转化为求解两个一维问题,得到如下 ADI 格式:

$$\begin{cases} \left(I - \frac{i\tau a_1}{2} \delta_x^2\right) u_{pq}^* = ia_1 \delta_x^2 u_{pq}^k + ia_2 \delta_y^2 u_{pq}^k + ia_3 |E(u_{pq}^k)|^2 E(u_{pq}^k) + ia_4 E(u_{pq}^k); \\ \left(I - \frac{i\tau a_2}{2} \delta_y^2\right) \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} = u_{pq}^*; \\ u_{pq}^{k+1} = \tau \delta_t u_{pq}^{k+\frac{1}{2}} + u_{pq}^k \end{cases} \quad (12)$$

其中: $k \geq 2, 1 \leq p \leq M_1, 1 \leq q \leq M_2$ 。

2 数值解的稳定性分析

下面使用傅里叶分析方法来说明差分格式(8)的稳定性。

定理 2 差分格式(8)是无条件稳定的。

证明 令 $W = a_3 |u_{pq}^{k+\frac{1}{2}}|^2 + a_4$,则差分格式(8)可写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (u_{pq}^{k+1} - u_{pq}^k) - \frac{ia_1}{2} \frac{1}{h_1^2} (u_{p+1,q}^{k+1} - 2u_{pq}^{k+1} + u_{p-1,q}^{k+1}) - \frac{ia_2}{2} \frac{1}{h_2^2} (u_{p,q+1}^{k+1} - 2u_{pq}^{k+1} + u_{p,q-1}^{k+1}) = \\ \frac{ia_1}{2} \frac{1}{h_1^2} (u_{p+1,q}^k - 2u_{pq}^k + u_{p-1,q}^k) + \frac{ia_2}{2} \frac{1}{h_2^2} (u_{p,q+1}^k - 2u_{pq}^k + u_{p,q-1}^k) + \frac{iW}{2} (u_{pq}^{k+1} + u_{pq}^k), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} u_{pq}^{k+1} - \frac{iW\tau}{2} u_{pq}^{k+1} - \frac{ia_1}{2} \lambda_1 (u_{p+1,q}^{k+1} - 2u_{pq}^{k+1} + u_{p-1,q}^{k+1}) - \frac{ia_2}{2} \lambda_2 (u_{p,q+1}^{k+1} - 2u_{pq}^{k+1} + u_{p,q-1}^{k+1}) = \\ u_{pq}^k + \frac{iW\tau}{2} u_{pq}^k + \frac{ia_1}{2} \lambda_1 (u_{p+1,q}^k - 2u_{pq}^k + u_{p-1,q}^k) + \frac{ia_2}{2} \lambda_2 (u_{p,q+1}^k - 2u_{pq}^k + u_{p,q-1}^k) \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\lambda_1 = \frac{\tau}{h_1^2}, \lambda_2 = \frac{\tau}{h_2^2}$ 。

令 $u_{pq}^k = \xi^k e^{i\alpha_1 x_p + i\alpha_2 y_q}$,其中: ξ^k 为振幅, α_1, α_2 为波数;该式在物理上表示 u_{pq}^k 的谐波分量。将该式代入式(13),消去等式两边的 $e^{i\alpha_1 x_p + i\alpha_2 y_q}$,有

$$\begin{aligned} \xi^{k+1} - \frac{iW\tau}{2} \xi^{k+1} - \frac{ia_1}{2} \lambda_1 (\xi^{k+1} e^{i\alpha_1 h_1} - 2\xi^{k+1} + \xi^{k+1} e^{-i\alpha_1 h_1}) - \frac{ia_2}{2} \lambda_2 (\xi^{k+1} e^{i\alpha_2 h_2} - 2\xi^{k+1} + \xi^{k+1} e^{-i\alpha_2 h_2}) = \\ \xi^k + \frac{iW\tau}{2} \xi^k + \frac{ia_1}{2} \lambda_1 (\xi^k e^{i\alpha_1 h_1} - 2\xi^k + \xi^k e^{-i\alpha_1 h_1}) + \frac{ia_2}{2} \lambda_2 (\xi^k e^{i\alpha_2 h_2} - 2\xi^k + \xi^k e^{-i\alpha_2 h_2})。 \end{aligned}$$

增长因子为

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1 + \frac{iW\tau}{2} + \frac{ia_1}{2} \lambda_1 (e^{i\alpha_1 h_1} - 2 + e^{-i\alpha_1 h_1}) + \frac{ia_2}{2} \lambda_2 (e^{i\alpha_2 h_2} - 2 + e^{-i\alpha_2 h_2})}{1 - \frac{iW\tau}{2} - \frac{ia_1}{2} \lambda_1 (e^{i\alpha_1 h_1} - 2 + e^{-i\alpha_1 h_1}) - \frac{ia_2}{2} \lambda_2 (e^{i\alpha_2 h_2} - 2 + e^{-i\alpha_2 h_2})} \quad (14)$$

由式(14)可知, $|G(\alpha_1, \alpha_2)| \leq 1$ 恒成立,即差分格式(8)满足 Von Neumann 条件,因此差分格式无条件稳定。

3 数值模拟与结果分析

Zhao 等^[26]利用 Jacobi 椭圆函数法结合齐次平衡原理求出了方程(1)对应的孤子,其形式为:

$$u(x,y,t)=\sqrt{\frac{2\gamma_1}{\gamma_0}}e^{i(kx+lt+\xi_0)}\operatorname{sech}\left(\frac{1}{|b|}\sqrt{\frac{2\gamma_1}{F}}(ax+by+ct+\eta_0)\right)$$

(15)

其中: $F\gamma_1>0,F\gamma_0>0,a=b\sqrt{\frac{F}{\gamma_0}}-\beta,c=-kb\sqrt{\frac{F}{\gamma_0}}-\beta,l=\frac{2\gamma_1-\gamma_0k^2}{2\gamma_0},k、b$ 为实数且 $b\neq 0$ 。

定义离散 L^2 范数和收敛阶:

$$E(h,\tau)=\sqrt{h_1h_2\sum_{p=0}^{M_1}\sum_{q=0}^{M_2}(U_{pq}^k-u_{pq}^k)^2},$$
$$O_{rd}=\log_2\left(\frac{\|E(h,\tau)\|}{\|E(h/2,\tau/2)\|}\right),$$

其中: $E(h,\tau)$ 表示差分格式计算的数值误差。

下面对 Zhao 等^[26]中给出的 CGLE 方程的初边值问题进行数值求解。

3.1 无噪声

给定方程(1)的参数 $\beta_0=-3,\beta_1=\gamma_1=\gamma_0=1$,式(15)中的其他参数 $\xi_0=\eta_0=0,a=2,c=-2,l=0.5$ 。选择的区间为 $\Omega=(x_a,x_b)\times(y_a,y_b)\in[0,3]\times[0,3]$,时间区间为 $t\in(0,1]$ 。

设网格剖分数 $M_1=M_2=N=320$ 。在 $t=1$ 时,系统(2)的精确解曲面、数值解曲面及两者间的误差曲面如图 1 所示。从计算结果可以看出,数值解与精确解的误差小于或等于 10^{-4} 。

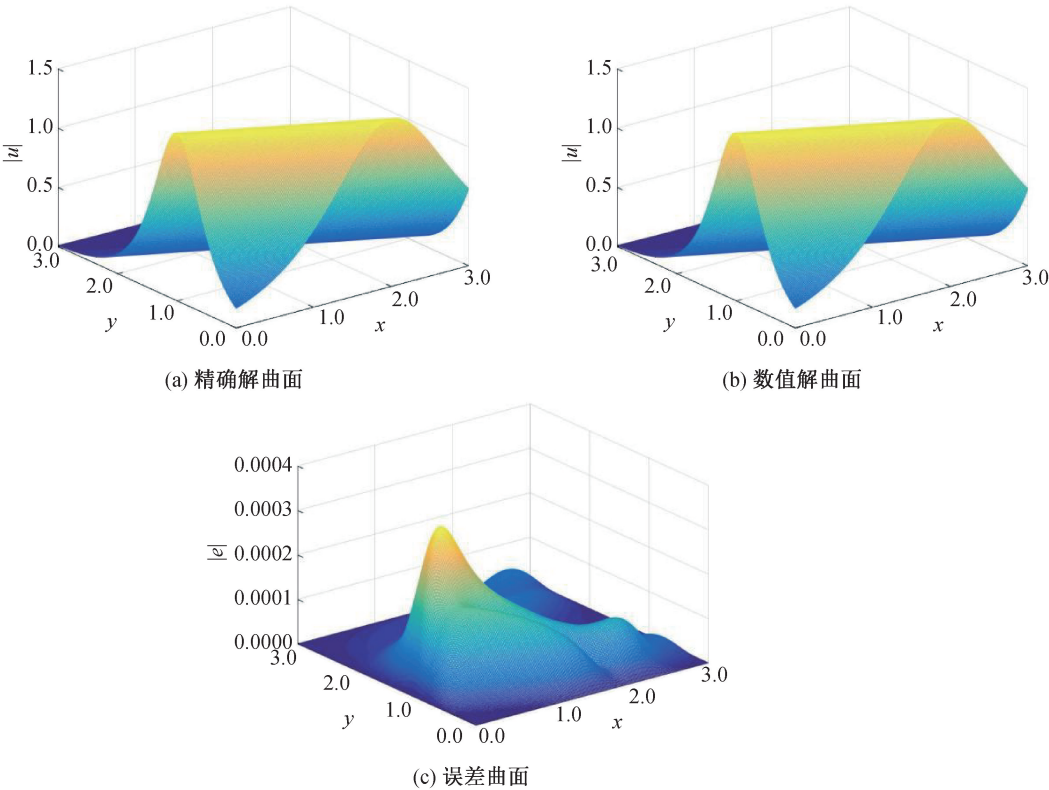


图 1 $t=1$ 时精确解曲面、数值解曲面和误差曲面

差分格式的 L^2 范数和收敛阶见表 1。表 1 中的计算结果表明,网格剖分越密,即步长 h 和 τ 越小,差分格式的误差越小。此外,还可看出差分格式的收敛阶随着 h 和 τ 的减小逐渐趋于 2。

3.2 有噪声

在实际问题中,观测数据往往可能包含一定的误差,为了研究噪声对孤子演化的影响,在系统(2)中加入不同的初始和边界扰动来观察噪声对孤子演化的影响。

首先研究初始扰动对孤子演化的影响。假设初始值分别带有 1%和 5%的扰动,利用式(12)进行求解。初始值带有 1%扰动, $t=1$ 时刻的数值解曲面和误差曲面如图 2 所示。初始值带有 5%扰动, $t=1$ 时刻的数

值解曲面和误差曲面如图 3 所示。从图 2 和图 3 中可看出:初始扰动为 1% 时,数值解开始出现一定程度的波动,绝对误差达到 10^{-2} ;当扰动为 5% 时,求出的数值解与真实解相差变大,此时的绝对误差达到 10^{-1} 。

表 1 差分格式的最大误差及其收敛阶

h	τ	$E(h, \tau)$	O_{rd}
3/10	1/10	2.8512×10^{-1}	
3/20	1/20	8.7814×10^{-2}	1.6990
3/40	1/40	2.3679×10^{-2}	1.8909
3/80	1/80	5.8642×10^{-3}	2.0136
3/160	1/160	1.4587×10^{-3}	2.0073
3/320	1/320	3.6376×10^{-4}	2.0036

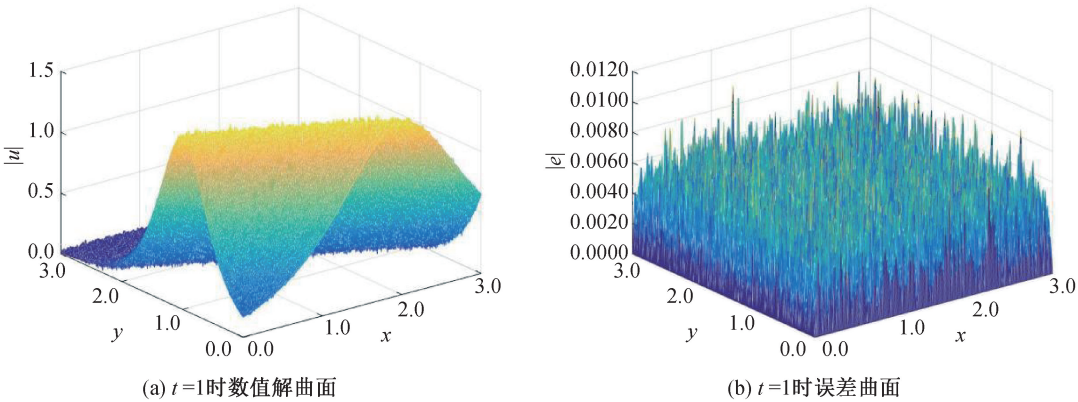


图 2 初始值中加入 1% 白噪声的数值解曲面和误差曲面

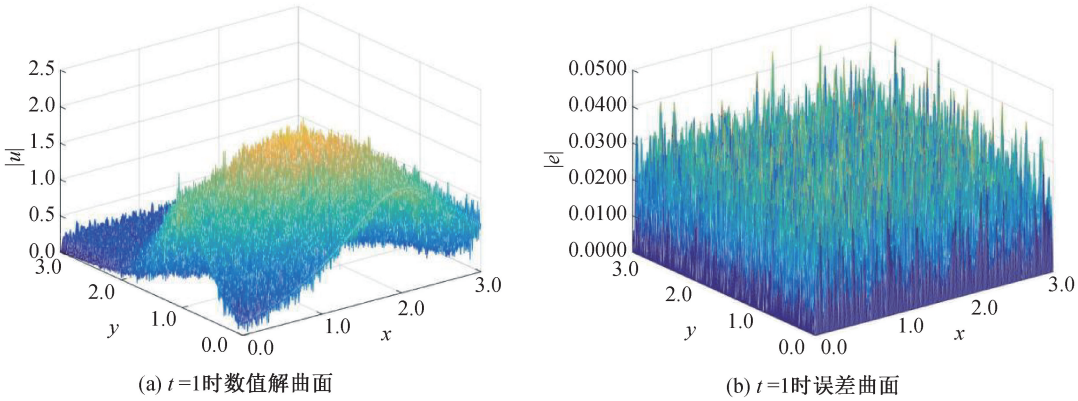


图 3 初始值中加入 5% 白噪声的数值解曲面和误差曲面

下面分析边界扰动对孤子演化的影响。当边界条件带有 1% 和 5% 的扰动时,使用式(12)进行求解。边界条件带有 1% 扰动, $t=1$ 时刻的数值解曲面和误差曲面如图 4 所示。边界条件带有 5% 扰动, $t=1$ 时刻的数值解曲面和误差曲面如图 5 所示。观察图 4 和图 5 可以发现,边界扰动带来的影响比初始值扰动小。1% 的边界扰动造成的绝对误差为 10^{-3} ,而初始扰动造成的绝对误差却为 10^{-2} ;5% 的边界扰动造成的绝对误差接近 0.015,而初始扰动造成的绝对误差接近 0.05。由此可知,初始扰动对数值计算结果的影响比边界扰动大。

4 结 语

本文研究了包含色散、光学滤波、非线性增益和线性增益项的(2+1)维复 Ginzburg-Landau 方程,证明了 CGLE 方程的解的有界性,建立了 CGLE 方程的二层非线性差分格式及其对应的 ADI 格式,并用傅里叶分析证明了该格式是无条件稳定的。数值实验表明,当步长网格变得细密时,差分格式达到了 2 阶收敛。此外,还发现当初始条件和边界条件带有噪声时,初始扰动对孤子演化的影响更大。

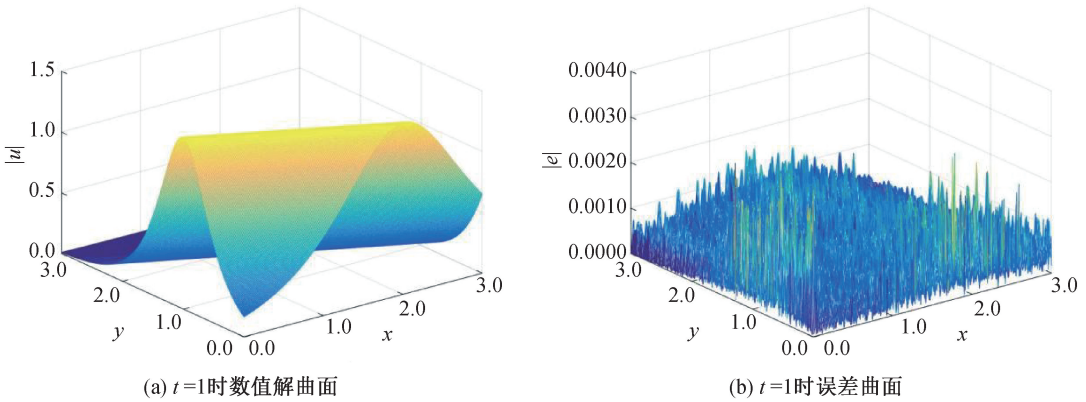


图 4 边界值中加入 1% 白噪声的数值解曲面和误差曲面

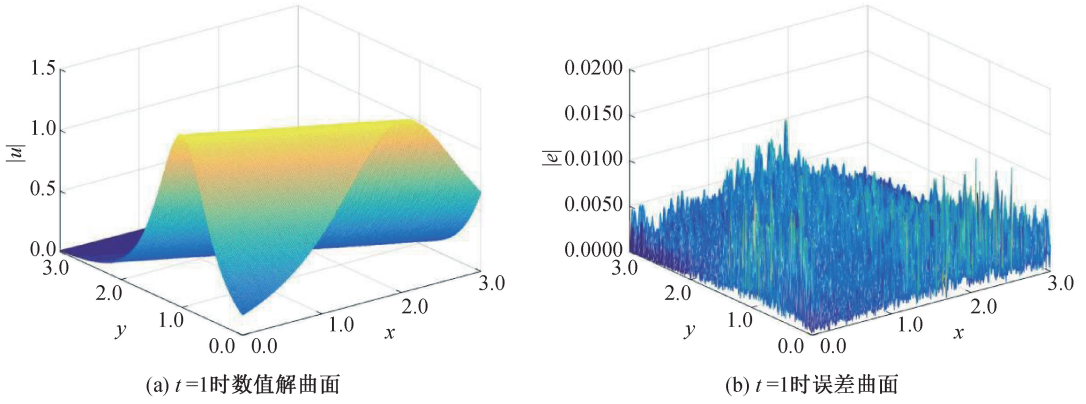


图 5 边界值中加入 5% 白噪声的数值解曲面和误差曲面

CGLE 方程的研究对获取高能超短光脉冲有重要意义。本文研究 CGLE 方程的正问题,能丰富 Ginzburg-Landau 方程的研究,并为 CGLE 方程的反问题提供基础。若将正问题求出的孤子数据,结合机器学习的方法来研究 CGLE 方程的反问题,确定出产生孤子的非线性材料的参数,有助于在实验室获取高能超短光脉冲。

参考文献:

[1] Ginzburg V L, Landau L D. On the theory of superconductivity[M]// Ginzburg V L. On Superconductivity and Superfluidity: A Scientific Autobiography. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009:113-137.

[2] Aranson I S, Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74(1):99-143.

[3] Chang W, Ankiewicz A, Soto-Crespo J M, et al. Dissipative soliton resonances[J]. Physical Review A, 2008, 78(2):023830.

[4] Kraus M, Walter D, Michalowski A, et al. Processing techniques and system technology for precise and productive microdrilling in metals [J]. Springer Series in Optical Sciences, 2016, 195: 201-230.

[5] He Y J, Mihalache D. Lattice solitons in optical media described by the complex Ginzburg-Landau model with PT-symmetric periodic potentials[J]. Physical Review A, 2013, 87: 013812.

[6] Liu Y, Chen S Q, Wei L X, et al. Exact solutions to complex Ginzburg-Landau equation[J]. Pramana, 2018, 91(2): 29.

[7] Osman M S, Ghanbari B, Machado J A T. New complex waves in nonlinear optics based on the complex Ginzburg-Landau equation with Kerr law nonlinearity[J]. The European Physical Journal Plus, 2019, 134(1): 20.

[8] Yan Y Y, Liu W J. Soliton rectangular pulses and bound states in a dissipative system modeled by the variable-coefficients complex cubic-quintic Ginzburg-Landau equation[J]. Chinese Physics Letters, 2021, 38(9): 094201.

[9] 胡艳,孙峪怀.应用多项式完全判别系统方法求解时空分数复 Ginzburg-Landau 方程[J].应用数学和力学,2021,42(8):874-880.

[10] 杨佳奇,刘文军.基于变系数 3+1 维三次-五次复金兹堡-朗道方程的亮孤子及混合孤子传输特性[J].物理学报,2023,72(10): 173-179.

[11] Shokri A, Afshari F. High-order compact ADI method using predictor-corrector scheme for 2D complex Ginzburg-Landau equation[J]. Computer Physics Communications, 2015, 197:43-50.

[12] Hao Z P, Sun Z Z, Cao W R. A three-level linearized compact difference scheme for the Ginzburg-Landau equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2015, 31(3): 876-899.

[13] Shi D Y, Liu Q. Unconditional superconvergent analysis of a linearized finite element method for Ginzburg-Landau equation[J]. Applied Numerical Mathematics, 2020, 147:118-128.

[14] 王鹏德,黄乘明.非线性空间分数阶 Ginzburg-Landau 方程的隐显型差分格式[J].中国科学:数学,2020,50(10):1505-1524.

[15] Wang P D. Fast exponential time differencing/spectral-Galerkin method for the nonlinear fractional Ginzburg-Landau equation with fractional Laplacian in unbounded domain[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 112: 106710.

[16] 宋岩,凌永辉.空间分数阶 Ginzburg-Landau 方程的一种块分裂迭代法[J].广西民族大学学报(自然科学版),2022,28(4):82-86.

[17] Lu H, Lü S J, Zhang M J. Fourier spectral approximations to the dynamics of 3D fractional complex Ginzburg-Landau equation[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2017, 37(5): 2539-2564.

[18] Li X Y, Wang Y L, Li Z Y. Numerical simulation for the fractional-in-space Ginzburg-Landau equation using Fourier spectral method[J]. AIMS Mathematics, 2022, 8(1): 2407-2418.

[19] Hong Q G, Ma L M, Xu J C, et al. An efficient iterative method for dynamical Ginzburg-Landau equations[J]. Journal of Computational Physics, 2023, 474: 111794.

[20] Xu C, Pei L F. Unconditional optimal error estimates of a modified finite element fully discrete scheme for the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2022, 115: 1-13.

[21] 孙志忠.非线性发展方程的有限差分方法[M].北京:科学出版社,2018: 190-212.

[22] 张启峰,熊海洋,徐定华,等.带周期边界复 Ginzburg-Landau 方程的四阶显格式[J].高等学校计算数学学报,2018,40(4):313-330.

[23] 朱晨怡,王廷春.二维复值 Ginzburg-Landau 方程的一个高阶紧致 ADI 差分格式[J].南京航空航天大学学报,2019,51(3):341-349.

[24] Zhang Q F, Zhang L, Sun H W. A three-level finite difference method with preconditioning technique for two-dimensional nonlinear fractional complex Ginzburg-Landau equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2021, 389: 113355.

[25] Varah J M. A lower bound for the smallest singular value of a matrix[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1975, 11(1): 3-5.

[26] Zhao Z H, Dai Z D, Li D L. Breather type of chirped soliton solutions for the 2D Ginzburg-Landau equation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(4):1712-1719.

(责任编辑:康 锋)