浙江理工大学学报,第 51 卷,第 6 期,2024 年 11 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2024.06.014

带参数敏感度的最优权衡投资组合问题的半定规划松弛

王　琳[1],洪陈春[2],罗和治[1]
(1.浙江理工大学理学院,杭州 310018;2.华信咨询设计研究院有限公司,杭州 310014)

摘　要:考虑带参数敏感度的最优权衡投资组合问题,其模型是一个非凸非可微优化问题,其中目标函数含有极大和极小函数。将该优化问题变换为一个等价的非凸二次约束二次规划问题,提出了等价变换问题的一个紧的半定规划松弛,并估计了其与原问题之间的间隙。数值结果表明,该半定规划松弛可以有效找到大多数测试问题的全局最优解,且计算时间优于求解器 GUROBI,从而为寻求问题的一个好的近似解提供方法。

关键词:参数敏感度;投资组合;非凸二次约束二次规划;半定规划松弛;GUROBI
中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2024)11-0861-06
引文格式:王琳,洪陈春,罗和治. 带参数敏感度的最优权衡投资组合问题的半定规划松弛[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2024,51(6):861-866.
Reference Format: WANG Lin, HONG Chenchun, LUO Hezhi. Semi-definite programming relaxation for optimal trade-off portfolio selection with sensitivity of parameters[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University, 2024, 51(6): 861-866.

Semi-definite programming relaxation for optimal trade-off portfolio selection with sensitivity of parameters

WANG Lin[1], *HONG Chenchun*[2], *LUO Hezhi*[1]
(1. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;
2. Huaxin Consulting Co., Ltd., Hangzhou 310014, China)

Abstract: In this paper, we consider the optimal trade-off portfolio problem with parameter sensitivity. For this problem, the model is a non-convex and non-differentiable optimization problem in which the objective function contains the maximum and minimum functions. This optimization problem is transformed into an equivalent non-convex quadratically constrained quadratic programming problem. A tight semi-definite programming relaxation for the equivalent transformation problem is proposed and the gap between it and the original problem is estimated. The numerical results show that the semi-definite programming relaxation can effectively find the global optimal solution of most test problems, and the computational time is less than that of the solver GUROBI. It can provide a method for finding a good approximate solution to the problem.

Key words: sensitivity of parameters; portfolio selection; non-convex quadratically constrained quadratic programming; semi-definite programming relaxation; GUROBI

0　引　言

1952 年,Markowitz[1]提出了投资组合选择的均值一方差(Mean-variance,MV)模型,开辟了投资组合

收稿日期:2022—12—08　　网络出版日期:2023—01—17
基金项目:国家自然科学基金项目(12271485,11871433);浙江省自然科学基金项目(LZ21A010003)
作者简介:王　琳(1998—　),女,山东泰安人,硕士研究生,主要从事非线性规划理论与算法方面的研究。
通信作者:罗和治,E-mail:hzluo@zstu.edu.cn

量化分析的新时代,MV 模型开创性的贡献是用均值和方差衡量投资组合的预期收益和风险。MV 模型中的基本参数是期望收益和协方差矩阵,通常来源于历史数据,然而历史数据的缺失可能会导致 MV 模型的参数估计不准确,参数估计的准确性直接影响收益和风险的测量,因此如何应对模型中参数的估计误差成为投资组合选择问题的一个重要研究方向。

Chopra 等[2]研究了均值、方差和协方差的误差对最优投资组合选择的影响,指出一个小的参数误差都可能会导致结果与真实最优组合间产生很大的偏差。为了克服参数估计误差的影响,常用的方法是鲁棒优化,Goldfarb 等[3]提出了一个投资组合选择的鲁棒 MV 模型,并将其等价变换为一个二阶锥规划问题。然而,Scherer[4]指出,鲁棒 MV 模型不仅不能带来额外的回报,反而增加了计算成本。最近,Cui 等[5]考虑投资组合对单个资产期望收益和标准差的敏感度,利用导数作为敏感度的度量,将一组参数敏感度约束集成到传统的 MV 模型中,提出了一种具有参数敏感度控制的 MV 模型,并通过分支定界算法求解,但当分支变量维数较大时算法的收敛速度较慢,并且该模型中参数敏感度的上下界选择比较困难。为克服参数敏感度上下界的选择,Bai 等[6]提出了一个带参数敏感度的最优权衡投资组合选择问题,将该问题等价变换为无约束复合优化问题,给出了一个改进的加速梯度算法,证明了该算法收敛到无约束复合优化问题的一个稳定点。

本文研究带参数敏感度的最优权衡投资组合选择问题的半定规划(Semi-definite programming,SDP)松弛方法,以寻求其近似最优解。众所周知,SDP 松弛可以为非凸二次约束二次规划(Quadratically constrained quadratic programming,QCQP)问题提供更紧的下界或近似解[7-9]。Zheng 等[10-11]对非凸 QCQP 问题给出了基于最佳 DC(Difference of convex function,DC)分解、矩阵锥分解和多胞形逼近技术的 SDP 松弛。Luo 等[12]对非凸 QCQP 问题提出了基于罚方法的 SDP 松弛。Luo 等[13]对凸二次约束非凸 QP 问题利用 Disjunctive 割技术改进了 SDP 松弛界。章显业等[14]针对带凸二次约束非凸 QP 问题提出了一个紧的双非负规划松弛及其解法。丁晓东等[15]给出了带边际风险控制的投资组合优化问题的一个紧的 SDP 松弛。受以上文献[12-15]的启发,本文首先将带参数敏感度的最优权衡投资组合选择问题变换为一个等价的非凸 QCQP 问题,进而提出基于 Secant 割的 SDP 松弛,并给出它与原问题之间的间隙估计,最后给出数值结果验证 SDP 松弛的紧性。

引入如下记号:S^n 为 n 阶对称矩阵的集合,设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in S^n$,$\boldsymbol{A}\succeq 0$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵,S^n 的内积定义为 $\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}$。

1 带参数敏感度最优权衡投资组合模型的等价变换

本节描述带参数敏感度的最优权衡投资组合选择模型[6]。考虑金融市场上有 n 个风险资产可供投资者选择,第 i 个资产的收益随机变量用 $\boldsymbol{r}_i$ 表示,投资组合的收益随机向量为 $\boldsymbol{r}=(r_1,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$。假设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是一个投资组合决策变量,那么投资组合 $\boldsymbol{x}$ 的收益为 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$,其预期收益和方差为 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$,其中 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})_{n\times n}$ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 的均值向量和协方差矩阵,则 MV 投资组合模型可表述如下:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x};\\ \text{s. t.} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\rho,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1,\boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{1}$$

其中:ρ 是投资者规定的最低期望收益;$\boldsymbol{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$;$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 分别为 $\boldsymbol{x}$ 的上、下界向量,$\boldsymbol{l},\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}_+^n$。问题(1)中投资组合的方差可以写成:

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\eta}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j x_i x_j,$$

其中:$\boldsymbol{\eta}_{ij}$ 是第 i 个资产与第 j 个资产之间的相关系数;$\boldsymbol{\sigma}_i$ 为资产 i 收益率的标准差。文献[5]给出了参数敏感度的概念。

定义 1[5] 投资组合 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的方差对单个资产标准差 $\boldsymbol{\sigma}_i$ 的敏感度定义为:

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_i}=2\boldsymbol{x}_i^2\boldsymbol{\sigma}_i+2\sum_{i\neq j}\boldsymbol{\eta}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x},i=1,2,\cdots,n,$$

其中：

$$\boldsymbol{Q}_i=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \boldsymbol{\eta}_{1i}\boldsymbol{\sigma}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{i1}\boldsymbol{\sigma}_1 & \cdots & 2\boldsymbol{\sigma}_i & \cdots & \boldsymbol{\eta}_{in}\boldsymbol{\sigma}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boldsymbol{\eta}_{ni}\boldsymbol{\sigma}_n & \cdots & 0 \end{pmatrix}。$$

定义 2[5]　投资组合 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的期望收益对单个资产期望收益 $\boldsymbol{\mu}_i$ 的敏感度定义为：

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\partial\boldsymbol{\mu}_i}=\boldsymbol{x}_i,i=1,2,\cdots,n。$$

记 $D=\{1,2,\cdots,m\}$ 为参数敏感度需要加以限制的资产集，其中 $m\leqslant n$。文献[6]提出了如下带参数敏感度的最优权衡投资组合选择模型：

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n} & \tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\max\limits_{i\in D}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\}-\min\limits_{i\in D}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\}; \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\rho,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1,\boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\tau\in(0,\infty)$ 是一个权衡因子。由于问题(2)的目标函数含有极大和极小函数，故它是一个非凸非可微优化问题，因此寻求其局部或全局最优解是非常困难的。

注意到 $\min\limits_{i\in D}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\}=-\max\limits_{i\in D}\{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\}$，问题(2)可改写为如下问题：

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n} & f(\boldsymbol{x}):=\tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\max\limits_{i\in D}\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\}+\max\limits_{i\in D}\{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\}; \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\rho,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1,\boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{3}$$

通过引入辅助变量，问题(3)可以等价变换为如下问题：

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x},k,t} & \tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+k+t; \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\leqslant k,i\in D, \\ & -\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{x}\leqslant t,i\in D, \\ & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\rho,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1,\boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{4}$$

容易验证问题(3)和问题(4)是等价的，即二者有相同的最优解与最优值。因为矩阵 $\boldsymbol{Q}_i$ 是不定矩阵，所以问题(4)是一个非凸 QCQP 问题。因此，求其全局最优解是 NP－难的。

2　半定规划松弛及其间隙估计

本节给出问题(4)的一个紧的半定规划松弛并估计其与问题(4)最优值之间的间隙。

注意到矩阵 $\boldsymbol{Q}_i$ 是具有一个正负特征值的秩 2 不定矩阵[5]，故它可以分解为

$$\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{w}_i\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\gamma}_i\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\tag{5}$$

其中：$\boldsymbol{\lambda}_i$ 是 $\boldsymbol{Q}_i$ 的正特征值，$\boldsymbol{\lambda}_i>0$；$\boldsymbol{\gamma}_i$ 是 $\boldsymbol{Q}_i$ 的负特征值的绝对值，$\boldsymbol{\gamma}_i>0$；$\boldsymbol{w}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 是对应的正交单位特征向量。令

$$\boldsymbol{p}_i=\sqrt{\boldsymbol{\gamma}_i}\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{p}_{m+i}=\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i}\boldsymbol{w}_i,i=1,2,\cdots,m,$$

记 $J=\{1,2,\cdots,2m\}$，则 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_j,j\in J)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{|J|\times n}$，其中 $|J|$ 表示集合 J 的元素个数。设 $\boldsymbol{z}_u,\boldsymbol{z}_l\in\mathbf{R}^{2m}$ 分别为函数 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 在 F 上的上、下界，即

$$\boldsymbol{z}_l^j=\min_{x\in F}\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_u^j=\max_{x\in F}\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x},j\in J\tag{6}$$

其中 $F:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\rho,\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1,\boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}\}$，则对 $\boldsymbol{x}\in F$，有 $\boldsymbol{z}_l\leqslant\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{z}_u$。

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，则由 $\boldsymbol{z}_l\leqslant\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{z}_u$ 得：

$$\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\bullet\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^2\leqslant(\boldsymbol{z}_l^j+\boldsymbol{z}_u^j)\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_l^j\boldsymbol{z}_u^j,j\in J\tag{7}$$

式(7)即为 Saxena 等[16]所提出的 Secant 割。将 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 松弛为半定约束 $\boldsymbol{X}\succeq\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，可以得到问题(4)的一个半定松弛(Semi-definite relaxation，SDR)：

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x},k,t,\boldsymbol{X}} & \widetilde{f}(t,k,\boldsymbol{X})=\tau\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{X}+k+t; \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{Q}_i\bullet\boldsymbol{X}\leqslant k, i\in D, \\ & -\boldsymbol{Q}_i\bullet\boldsymbol{X}\leqslant t, i\in D, \\ & \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1, \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\rho, \boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}, \\ & \boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\bullet\boldsymbol{X}\leqslant(\boldsymbol{z}_l^j+\boldsymbol{z}_u^j)\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_l^j\boldsymbol{z}_u^j, j\in J, \\ & \quad \boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\succeq 0 \end{cases} \tag{8}$$

定理 1 比较了问题(3)和它的松弛问题(8)在最优解处的目标值。

定理 1　设 $f^*_{[\boldsymbol{z}_l,\boldsymbol{z}_u]}$ 为问题(3)的最优值,$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}})$ 是问题(8)的最优解,则

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})-f^*_{[\boldsymbol{z}_l,\boldsymbol{z}_u]}\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})-\widetilde{f}(\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}}) \\ &\leqslant \max_{i\in D}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\}+\max_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_u-\boldsymbol{z}_l\|_2^2。\end{aligned}$$

证明　问题(8)可改写为如下问题:

$$\begin{cases} \min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}} & h(\boldsymbol{X})=\tau\boldsymbol{Q}\bullet\boldsymbol{X}+\max\limits_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\boldsymbol{X}\}+\max\limits_{i\in D}\{-\boldsymbol{Q}_i\bullet\boldsymbol{X}\}; \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\rho, \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1, \boldsymbol{l}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{u}, \\ & \boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}\bullet\boldsymbol{X}\leqslant(\boldsymbol{z}_l^j+\boldsymbol{z}_u^j)\boldsymbol{p}_j^{\mathrm{T}}x-\boldsymbol{z}_l^j\boldsymbol{z}_u^j, j\in J, \\ & \boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\succeq 0 \end{cases} \tag{9}$$

注意到问题(8)和问题(9)是等价的:二者有相同的最优解与最优值。令$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}})$是问题(8)的最优解,则$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{X}})$也是问题(9)的最优解且 $\widetilde{f}(\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}})=h(\bar{\boldsymbol{X}})$。由于问题(9)是问题(3)的凸松弛问题,得到 $f^*_{[\boldsymbol{z}_l,\boldsymbol{z}_u]}\geqslant\widetilde{f}(\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}})$。注意到问题(9)的最优解也是问题(3)的可行解,则由 $f^*_{[\boldsymbol{z}_l,\boldsymbol{z}_u]}$ 的定义可推得:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})-f^*_{[\boldsymbol{z}_l,\boldsymbol{z}_u]}\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})-\widetilde{f}(\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}})=f(\bar{\boldsymbol{x}})-h(\bar{\boldsymbol{X}}) \\ &\leqslant\max_{i\in D}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}-\max_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\}+\max_{i\in D}\{-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}-\max_{i\in D}\{-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\} \\ &=\max_{i\in D}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}+\min_{i\in D}\{-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\}+\max_{i\in D}\{-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}+\min_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\} \\ &\leqslant\max_{i\in D}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\}+\max_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}, \end{aligned}$$

其中第 3 个不等式是因为 $\tau>0$,$\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\succeq 0$ 和 $\boldsymbol{Q}\succeq 0$。注意到 $\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{w}_i\boldsymbol{w}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\gamma}_i\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}$,由问题(8)的约束可以得到:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}} &=(\boldsymbol{p}_{m+i}\boldsymbol{p}_{m+i}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}})\bullet(\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}-\bar{\boldsymbol{X}})\leqslant\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\bullet\bar{\boldsymbol{X}}-(\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}})^2 \\ &\leqslant-(\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{x}})^2+(\boldsymbol{z}_l^i+\boldsymbol{z}_u^i)\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_l^i\boldsymbol{z}_u^i\leqslant\frac{1}{4}(\boldsymbol{z}_u^i-\boldsymbol{z}_l^i)^2\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{z}_u-\boldsymbol{z}_l\|_2^2, i\in D, \end{aligned}$$

其中第 1 个不等式由 $\boldsymbol{p}_{m+i}\boldsymbol{p}_{m+i}^{\mathrm{T}}\succeq 0$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\succeq 0$ 推得,第 2 个不等式由问题(8)中 Secant 割不等式推得。类似地,可以得到:

$$\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{p}_{m+i}\boldsymbol{p}_{m+i}^{\mathrm{T}})\bullet(\bar{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}-\bar{\boldsymbol{X}})\leqslant\frac{1}{4}(\boldsymbol{z}_u^{m+i}-\boldsymbol{z}_l^{m+i})^2\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{z}_u-\boldsymbol{z}_l\|_2^2, i\in D。$$

于是,得

$$\max_{i\in D}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\}+\max_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{z}_u-\boldsymbol{z}_l\|_2^2。$$

证毕。

从定理 1 中可以得到以下推论。

推论 1　设$(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}})$是问题(8)的最优解且 $\varepsilon>0$,若

$$\max_{i\in D}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\}+\max_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}\leqslant\varepsilon,$$

则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(3)的一个 ε-最优解。

证明　注意到 $\bar{x}$ 是问题(3)的一个可行解。由定理 1 得到

$$f(\bar{\boldsymbol{x}})-f^*_{[z_l,z_u]}\leqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})-(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t},\bar{k},\bar{\boldsymbol{X}})\leqslant\max_{i\in D}\{\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}\}+\max_{i\in D}\{\boldsymbol{Q}_i\bullet\bar{\boldsymbol{X}}-\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_i\bar{\boldsymbol{x}}\}\leqslant\varepsilon。$$

因此，$f(\bar{\boldsymbol{x}})\leqslant f^*_{[z_l,z_u]}+\varepsilon$，从而 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(3)的一个 ε-最优解。

证毕。

3　数值结果

本节通过数值实验给出问题(4)的半定规划松弛的有效性。数值实验在 Matlab R2017b 上实现，在 PC 机(2.10 GiHz，16 GiB，ADM)上运行，问题(4)使用 GUROBI 9.5.2 Matlab 接口求解，问题(6)使用 CPLEX 12.8.0 Matlab 接口求解，SDR 使用 MOSEK 10.0.24 Matlab 接口求解。测试问题中的参数 τ、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{\mu}$、ρ、$\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{u}$ 参考文献[17]相同的方法随机生成，具体如下：

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i r_m+\boldsymbol{\theta}_i,i=1,2,\cdots,n,$$

其中：$\boldsymbol{r}_i$ 是第 i 个资产的收益；r_m 是市场指数的收益；$\boldsymbol{\theta}_i$ 是第 i 个资产的收益残差。由上式可得：

$$\boldsymbol{\mu}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i\mathrm{E}(r_{\mathrm{m}}),q_{ii}=\boldsymbol{\beta}_i^2\mathrm{Var}(r_{\mathrm{m}})+\mathrm{Var}(\boldsymbol{\theta}_i),q_{ij}=\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\beta}_j\mathrm{Var}(r_{\mathrm{m}}),$$

其中的参数设置如下：

a)$\boldsymbol{\alpha}_i=10^{-5}\times r_{\mathrm{d}}$，$r_{\mathrm{d}}$ 是由标准正态分布生成的随机数，$i=1,2,\cdots,n$；

b)$\boldsymbol{\beta}_i$ 由[0.6，1.4]上的均匀分布随机生成，$i=1,2,\cdots,n$；

c)$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\theta}_i)$由$[0,0.2\times10^{-3}]$上的均匀随机分布生成，$i=1,2,\cdots,n$；

d)$\mathrm{E}(r_{\mathrm{m}})=4\times10^{-3}$，$\mathrm{Var}(r_{\mathrm{m}})=0.03$；

e)$\tau=5$，$\rho=4\times10^{-3}$；

f)$\boldsymbol{l}=(0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{u}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$。

令 v_{Gap} 表示问题(4)和问题(8)最优值的相对间隙(单位：%)，可用公式表示为：

$$v_{\mathrm{Gap}}/\%=\frac{(v_{\mathrm{Opt}}-v_{\mathrm{LB}})}{|v_{\mathrm{Opt}}|}\times100,$$

其中：v_{Opt} 表示用 GUROBI 求解问题(4)得到的全局最优值，v_{LB} 表示由问题(8)提供的下界。

表 1 为 GUROBI 求解问题(4)与 SDR 对 10 个随机测试例子的平均数值结果，其中 n 为资产的数目，m 为参数敏感度需要控制的资产数目。表 1 中“v_{Opt}”“v_{LB}”“v_{Gap}”“时间”分别表示 10 个测试问题得到的平均全局最优值、平均下界、平均相对间隙和平均时间(单位：s)，“(＊)”表示 GUROBI 在 1000 s 内找到全局最优解的实例数。从表 1 的数值结果中可知，当 $n=10$，$m=10$ 时，SDR 提供的下界与全局最优值的平均相对间隙小于 7%，对于 20～200 维的所有测试例子 SDR 可以在 13 s 内快速地找到原问题的一个全局最优解，而 GUROBI 在 $n=50$，$m=40$ 和 $n=200$，$m=80$ 时无法在 1000 s 以内找到问题(4)的 10 个例子的全局最优解。此外，在表 1 所列的维数中，除 $n=100$，$m=20$ 和 $n=200$，$m=20$ 这两组维数外，SDR 的计算时间都优于求解器 GUROBI。

4　结　论

本文考虑了带参数敏感度的最优权衡投资组合问题，其模型是一个非凸优化问题，求解它的全局最优解是非常困难的。对该问题提出了一个等价的非凸 QCQP 变换问题，给出了该问题的一个紧的半定规划松弛。初步的数值结果表明，本文提出的半定规划松弛可以快速得到 20 至 200 维带参数敏感度的最优权衡投资组合问题的全局最优解，并且对于大部分测试例子，半定规划松弛的求解时间小于求解器 GUROBI。然而，目前只通过数值实验证明了该半定规划松弛可求得原问题的全局最优解，后续将针对更一般的问题研究基于该半定规划松弛求解原问题的全局算法。

表 1 GUROBI 求解问题(4)与 SDR 的平均数值结果

n	m	GUROBI		SDR		
		v_{Opt}	时间/s	v_{LB}	v_{Gap}/%	时间/s
10	10	0.1714	0.151	0.1595	6.90	0.027
20	10	0.1496	0.171	0.1496	0.00	0.028
30	10	0.1491	0.169	0.1491	0.00	0.069
30	20	0.1492	0.893	0.1492	0.00	0.073
40	10	0.1490	0.082	0.1490	0.00	0.069
40	20	0.1488	0.192	0.1488	0.00	0.106
40	30	0.1492	16.421	0.1492	0.00	0.158
50	20	0.1489	0.219	0.1489	0.00	0.151
50	40	0.1494(9)	39.189	0.1494	0.00	0.572
100	20	0.1485	0.518	0.1485	0.00	0.679
100	50	0.1486	7.013	0.1486	0.00	1.765
200	20	0.1483	1.013	0.1483	0.00	2.994
200	50	0.1484	111.713	0.1484	0.00	12.160
200	80	0.1485(9)	32.201	0.1485	0.00	8.828

注:表 1 中 SDR 的时间包含 $\boldsymbol{Q}_i$ 特征值分解和求解问题(6)的时间。

参考文献:

[1] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1): 77-91.

[2] Chopra V K, Ziemba W T. The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfoliochoice[J]. The Journal of Portfolio Management, 1993, 19(2): 6-11.

[3] Goldfarb D, Iyengar G. Robust portfolio selection problems[J]. Mathematics of Operations Research, 2003, 28(1): 1-38.

[4] Scherer B. Can robust portfolio optimization help to build better portfolios[J]. Journal of Asset Management, 2007, 7(6): 374-387.

[5] Cui X T, Zhu S S, Li D, et al. Mean-variance portfolio optimization with parameter sensitivity control[J]. Optimization Methods and Software, 2016, 31(4): 755-774.

[6] Bai Y Q, Wei Y D, Li Q. An optimal trade-off model for portfolio selection with sensitivity of parameters[J]. Journal of Industrial & Management Optimization, 2017, 13(2): 947-965.

[7] Peng J M, Zhu T, Luo H Z, et al. Semi-definite programming relaxation of quadratic assignment problems based on nonredundant matrix splitting[J]. Computational Optimization and Applications, 2015, 60(1): 171-198.

[8] Parrilo P A. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems[J]. Mathematical Programming, 2003, 96(2): 293-320.

[9] Anstreicher K M. Semidefinite programming versus the reformulation-linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming[J]. Journal of Global Optimization, 2009, 43(2): 471-484.

[10] Zheng X J, Sun X L, Li D. Nonconvex quadratically constrained quadratic programming: best D.C. decompositions and their SDP representations[J]. Journal of Global Optimization, 2011, 50(4): 695-712.

[11] Zheng X J, Sun X L, Li D. Convex relaxations for nonconvex quadratically constrained quadratic programming: matrix cone decomposition and polyhedral approximation[J]. Mathematical Programming, 2011, 129(2): 301-329.

[12] Luo H Z, Bai X D, Peng J M. Enhancing semidefinite relaxation for quadratically constrained quadratic programming via penalty methods[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 180(3): 964-992.

[13] Luo H Z, Chen S K, Wu H X. A new branch-and-cut algorithm for non-convex quadratic programming via alternative direction method and semidefinite relaxation[J]. Numerical Algorithms, 2021, 88(2): 993-1024.

[14] 章显业, 罗和治. 带凸二次约束非凸二次规划的双非负规划松弛及其解法[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版), 2022, 47(4): 601-607.

[15] 丁晓东, 肖琳灿, 罗和治. 带边际风险控制的投资组合问题的半定规划松弛[J]. 浙江工业大学学报, 2017, 45(1): 64-68.

[16] Saxena A, Bonami P, Lee J. Convex relaxations of non-convex mixed integer quadratically constrained programs: Projected formulations[J]. Mathematical Programming, 2011, 130(2): 359-413.

[17] Zhu S S, Li D, Sun X L. Portfolio selection with marginal risk control[J]. The Journal of Computational Finance, 2010, 14(1): 3-28.

(责任编辑:康 锋)