浙江理工大学学报,第 51 卷,第 4 期,2024 年 7 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2024.04.017

多个度量之和的 Gromov 双曲性

曹杰军,张孝惠
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要: 为了将度量空间的 Gromov 双曲性由单个度量推广到多个度量,研究了对数型度量的性质,讨论了多个近似超度量之和的 Gromov 双曲性,并给出了由两个 Gromov 双曲度量之和构造一个新的 Gromov 双曲度量的例子。在 Ptolemy 空间中,由距离函数的上确界定义了一个含参数的度量,并证明了不同参数的度量之和的 Gromov 双曲性。特别地,借助类对数型度量变换的性质,推广了 Gromov 双曲空间的一般构造法。

关键词: Gromov 双曲性;近似超度量;度量变换;度量之和

中图分类号: O174.5　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673-3851 (2024) 04-0573-06

引文格式: 曹杰军,张孝惠. 多个度量之和的 Gromov 双曲性[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2024,51(4):573-578.

Reference Format: CAO Jiejun, ZHANG Xiaohui. Gromov hyperbolicity of sums of metrics[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University,2024,51(4):573-578.

Gromov hyperbolicity of sums of metrics

CAO Jiejun, ZHANG Xiaohui
(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to generalize the Gromov hyperbolicity of metric spaces from a single metric to multiple metrics, we discuss the Gromov hyperbolicity of sums of approximate ultrametrics by showing certain properties of logarithmic metrics. As an example, we construct a new Gromov hyperbolic space by the sum of two Gromov hyperbolic metrics. In a Ptolemy space, we define a metric with a parameter by the supremum of a distance function and further prove the Gromov hyperbolicity of sums of these metrics with different parameters. Specially, we extend a general construction of Gromov hyperbolic metric based on properties of logarithm-like metric transforms.

Key words: Gromov hyperbolicity; approximate ultrametric; metric transform; sum of metrics

0　引　言

1987 年,Gromov[1] 提出了 Gromov 双曲空间的概念。设(D,d)是一个度量空间,若存在 $\delta\geqslant 0$,对于任意的 $x,y,z,t\in D$,都有:

$$(x\mid y)_t\geqslant (x\mid z)_t\wedge (y\mid z)_t-\delta \tag{1}$$

其中$(x|y)_t=\frac{1}{2}[d(x,t)+d(y,t)-d(x,y)]$,则称度量空间$(D,d)$为 δ-双曲空间,也称为 Gromov 双曲空间。式(1)等价于如下四点不等式:

收稿日期:2022—11—04　　网络出版日期:2023—01—16
基金项目:国家自然科学基金项目(11771400);浙江省自然科学基金项目(LY22A010004)
作者简介:曹杰军(1998—　),男,浙江台州人,硕士研究生,主要从事复分析方面的研究。
通信作者:张孝惠,E-mail:xiaohui.zhang@zstu.edu.cn

$$d(x,y)+d(z,t)\leqslant(d(x,z)+d(y,t))\vee(d(x,t)+d(y,z))+2\delta,$$

其中:对于任意的实数 r 和 s,$r\vee s=\max\{r,s\}$,$r\wedge s=\min\{r,s\}$。Gromov 双曲空间中有很多比较满意的理论[2-6]。例如,Zhou 等[5]研究了 Gromov 双曲空间中的球化及其应用,Besson 等[6]研究了 Gromov 双曲空间的紧性和有限性。

双曲型度量是推动几何函数论发展的重要工具之一,它在复平面[7]和一般的高维空间中[8-10]都有广泛的应用。其中,Gromov 双曲性是双曲型度量的一个关键特征。因此,相关研究[11-12]构造了具有 Gromov 双曲性的双曲型度量,并研究了它们的性质。特别地,Dragomir 等[13]证明了近似超度量空间的 Gromov 双曲性,并将度量变换引入 Gromov 双曲空间中,给出了保持度量空间双曲性的度量变换的特征刻画。

目前,相关文献主要研究的是单个度量的 Gromov 双曲性。而 Aksoy 等[14]构造了两个单点型伸缩不变 Cassinian 度量的平均,证明了它们的 Gromov 双曲性,并举例说明了两个 Gromov 双曲度量的和不一定是 Gromov 双曲度量(见文献[14]引理 4.4)。因此,具有何种性质的多个度量之和是 Gromov 双曲的是一个值得研究的问题。

本文首先通过对数型度量构造了一类近似超度量空间,进而研究与这类近似超度量有关的度量之和的 Gromov 双曲性(定理 1);并根据两个特殊的 Gromov 双曲空间构造出一个新的 Gromov 双曲空间(推论 2)。其次,通过距离函数的上确界,在 Ptolemy 空间中定义了一个新的双曲型度量,并证明了它的 Gromov 双曲性(定理 2)。最后,给出更一般的构造法,通过刻画一类度量变换的特征,使得变换后的度量之和为 Gromov 双曲度量(定理 3)。这些构造方法有助于推广函数以及度量变换在空间中的应用。

1 主要结论

本文采用的符号如下:$\mathbf{R}$ 表示实数集,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间。$d(x,y)$表示度量空间(D,d)中任意的两点 x 和 y 之间的距离,$d(x)$表示 x 与 D 的边界 ∂D 之间的距离。当 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 时,$|x-y|$表示 x 和 y 之间的欧氏距离。

设(D,d)是一个度量空间,$\eta\geqslant 0$ 为一给定的常数。若对于任意的 $x,y,z\in D$,都有

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)\vee d(y,z)+\eta,$$

则称(D,d)是 η-超度量空间,也称为近似超度量空间。

为了研究多个近似超度量之和的 Gromov 双曲性,本文引入一个新的概念:如果对于任意的 $x,y,z\in D$,都有 $d_1(x,y)\leqslant d_1(x,z)$当且仅当 $d_2(x,y)\leqslant d_2(x,z)$,则称度量 d_1 和 d_2 是类距的。由此,通过近似超度量的相加求和,定理 1 构造了两类 Gromov 双曲空间。

定理 1 设(D,d_i),$i=1,2,\cdots,n$ 是 n 个近似超度量空间,那么,

a)对于任意的正数 λ、a 和 b,空间$(D,\lambda d_i+\log(1+ad_i)^b)$是 Gromov 双曲空间;

b)若所有度量是类距的,则$(D,\sum\limits_{i=1}^{n}d_i)$是 Gromov 双曲空间。

根据定理 1,可以构造出很多具体的 Gromov 双曲空间。例如,定理 2 给出了由 $S_{D,c}$ 构造的多个度量之和的 Gromov 双曲空间。其中,距离函数 $S_{D,c}$ 定义为:

$$S_{D,c}(x,y)=\sup_{p\in\partial D}\log\left(1+\frac{cd(x,y)}{(1+d(x,p))(1+d(y,p))}\right),$$

(D,d)是一个度量空间,且 $\partial D\neq\varnothing$,参数 c 为任意大于 0 的常数。

设(D,d)是一个度量空间,若对于所有的 $x,y,z,t\in D$ 都有

$$d(x,y)d(z,t)\leqslant d(x,z)d(y,t)+d(x,t)d(y,z),$$

则称(D,d)是 Ptolemy 空间。

定理 2 设(X,d)是一个 Ptolemy 空间。对于任意的开集 $D\subset X$ 且 $\partial D\neq\varnothing$,$(D,S_{D,c})$是 Gromov 双曲空间。特别地,对于任意的 $c_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,空间$(D,\sum\limits_{i=1}^{n}S_{D,c_i})$是 Gromov 双曲空间。

由文献[13]定义 2.1,对于任意的度量空间(D,d),若函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$满足$(D,d_\varphi)$仍然是一个度量空间,其中 $d_\varphi=\varphi\circ d$,就称 φ 是一个度量变换。度量变换的特征决定了变换后的度量空间的性质。因

此,通过刻画一类具体的度量变换的特征,可以给出多个度量之和的 Gromov 双曲空间的一般构造法,见定理 3。

定理 3　设(D,d)是一个度量空间。若 $\varphi_i(x)=\log(1+a_i x)^{b_i}+f_i(x)$,其中 $a_i,b_i>0,i=1,2,\cdots,n$, $f_i(x)$是连续的、非递减的有界凹函数,且满足 $f_i(0)=0$,则$(D,\sum_{i=1}^{n}d_{\varphi_i})$是 Gromov 双曲空间。

2　定理的证明及推论

2.1　定理 1 的证明及推论

由文献[13]命题 3.9,任意的 η-超度量空间是 η-双曲空间。

引理 1　设(D,d)是度量空间。对于任意 $a,b>0$,空间$(D,\log(1+ad)^b)$是 $b\log2$-超度量空间,因此是 $b\log2$-双曲空间。

证明　对于任意的度量空间(D,d),$\log(1+d)$是区域 D 上的度量[15]。因此,如果记 $d'=\log(1+ad)^b$,则 d'也是一个度量。对于任意的 $x,y,z\in D$,由三角不等式,度量 d'满足

$$\begin{aligned}d'(x,y)=&\log(1+ad(x,y))^b\leqslant b\log(1+ad(x,z)+ad(y,z))\leqslant b\log(1+2(ad(x,z))\vee(ad(y,z)))\\&\leqslant b\log2(1+(ad(x,z))\vee(ad(y,z)))=b\log(1+(ad(x,z))\vee(ad(y,z)))+b\log2\\&=\log(1+ad(x,z))^b\vee\log(1+ad(y,z))^b+b\log2=d'(x,z)\vee d'(y,z)+b\log2。\end{aligned}$$

因此,(D,d')是 $b\log2$-超度量空间,进而是 $b\log2$-双曲空间。

定理 1 的证明　先证明结论 a)。对于任意的 η-超度量空间(D,d),记度量 $d'=d_1+d_2$,其中:$d_1=\lambda d$, $d_2=\log(1+ad)^b$。注意到,d_1 和 d_2 都是关于 d 的函数,而且具有相同的单调性。由引理 1,对于任意的 $x,y,z\in D$,都有

$$\begin{aligned}d'(x,y)&=d_1(x,y)+d_2(x,y)\leqslant d_1(x,z)\vee d_1(y,z)+\lambda\eta+d_2(x,z)\vee d_2(y,z)+b\log2\\&=(d_1(x,z)+d_2(x,z))\vee(d_1(y,z)+d_2(y,z))+\lambda\eta+b\log2\\&=d'(x,z)\vee d'(y,z)+\lambda\eta+b\log2。\end{aligned}$$

因此,(D,d)是$(\lambda\eta+b\log2)$-双曲空间。

再证明结论 b)。设(D,d_i)是 η_i-超度量的,那么,

$$\sum_{i=1}^{n}d_i(x,y)\leqslant\sum_{i=1}^{n}d_i(x,z)\vee d_i(y,z)+\sum_{i=1}^{n}\eta_i=\Big(\sum_{i=1}^{n}d_i(x,z)\Big)\vee\Big(\sum_{i=1}^{n}d_i(y,z)\Big)+\sum_{i=1}^{n}\eta_i,$$

因此,$(D,\sum_{i=1}^{n}d_i)$是$\sum_{i=1}^{n}\eta_i$-超度量空间,进而也是$\sum_{i=1}^{n}\eta_i$-双曲空间。

由引理 1 可知,$\log(1+d)$是 $\log2$-双曲度量。又因为定理 1 的证明过程中给出了双曲空间的 Gromov 参数,所以得到推论 1。

推论 1　设(D,d_i), $i=1,2,\cdots,n$ 是 n 个度量空间。若所有的度量都是类距的,则空间$(D,\sum_{i=1}^{n}\log(1+d_i))$是 $n\log2$-双曲空间。

根据推论 1,下面给出由两个 Gromov 双曲度量之和构造出新的 Gromov 双曲度量的例子,见推论 2。对于任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,记 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$。二维欧氏空间上的两个距离函数 d_1 和 d_2 分别定义为:

$$d_1(x,y)=\log(1+|x_1-y_1|)+\arctan|x_2-y_2|,$$
$$d_2(x,y)=\log(1+|x_2-y_2|)+\arctan|x_1-y_1|。$$

这里定义 $\mathbf{R}^2$ 的一个子集:$V_k=\{(x_1,x_2):x_2=kx_1+b\}$,$k>0,b\in\mathbf{R}$。

推论 2　按照上述的定义方式,度量空间$(\mathbf{R}^2,d_1)$和$(\mathbf{R}^2,d_2)$都是$\left(\frac{\pi}{2}+\log2\right)$-双曲空间。进一步,对于任意的 $k>0$,都有(V_k,d_1+d_2)是$(\pi+2\log2)$-双曲空间。

证明　显然,d_1 和 d_2 都是非负的、对称的,$d_m(x,y)=0(m=1,2)$当且仅当 $x=y$。注意到 $\arctan x$ 在区间$[0,\infty)$上是单调递增的凹函数,所以 d_1 和 d_2 都遵循三角不等式。因此,d_1 和 d_2 都是 $\mathbf{R}^2$ 上的度量。

现在证明结论的第一部分。由于度量 d_1 和 d_2 的情况是类似的,这里只需要证明$(\mathbf{R}^2,d_1)$是

$\left(\frac{\pi}{2}+\log 2\right)$-双曲空间。记 $d'_1(x_1,y_1)=\log(1+|x_1-y_1|)$，则度量 d'_1 在 $\mathbf{R}$ 上是 log2-双曲的。也就是说，对于任意的 $p,q,r,v\in\mathbf{R}$，都有

$$d'_1(p,q)+d'_1(r,v)\leqslant[d'_1(p,r)+d'_1(q,v)]\vee[d'_1(p,v)+d'_1(q,r)]+2\log 2 \tag{2}$$

令 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$，$z=(z_1,z_2)$以及 $t=(t_1,t_2)$为 $\mathbf{R}^2$ 上的任意点。注意到，对于任意的 $a\in[0,\infty)$都有 $\arctan a<\frac{\pi}{2}$，于是由式(2)得到：

$$\begin{aligned} d_1(x,y)+d_1(z,t)&=d'_1(x_1,y_1)+d'_1(z_1,t_1)+\arctan|x_2-y_2|+\arctan|z_2-t_2| \\ &\leqslant d'_1(x_1,y_1)+d'_1(z_1,t_1)+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \\ &\leqslant[d'_1(x_1,z_1)+d'_1(y_1,t_1)]\vee[d'_1(x_1,t_1)+d'_1(y_1,z_1)]+2\log 2+\pi \\ &\leqslant[d_1(x,z)+d_1(y,t)]\vee[d_1(x,t)+d_1(y,z)]+2\log 2+\pi。\end{aligned}$$

由四点不等式即证得结论成立。

对于任意 $k>0$，下面证明(V_k,d_1+d_2)是 Gromov 双曲空间。对于任意 $x,y\in\mathbf{R}^2$，度量 d_T 定义为：

$$d_T(x,y)=\log(1+|x_1-y_1|)+\log(1+|x_2-y_2|)。$$

那么，

$$d_T(x,y)\leqslant d_1(x,y)+d_2(x,y)\leqslant d_T(x,y)+\pi \tag{3}$$

因为集合 V_k 上的点满足等式$|x_2-y_2|=k|x_1-y_1|$，所以度量$|x_1-y_1|$和$|x_2-y_2|$是类距的，从而由推论 1 可知，度量空间(V_k,d_T)是 2log2-双曲空间。由式(3)，进一步证得度量空间(V_k,d_1+d_2)是$(\pi+2\log 2)$-双曲空间。

2.2 定理 2 的证明

注意到，距离函数 $S_{D,c}$ 在一般空间中不满足三角不等式，所以不是一个度量。因此，定理 2 研究的是距离函数 $S_{D,c}$ 在 Ptolemy 空间中的 Gromov 双曲性。

定理 2 的证明 首先证明距离函数 $S_{D,c}$ 是一个度量。对于任意的 $x,y,z\in D$，显然 $S_{D,c}(x,y)\geqslant 0$，$S_{D,c}(x,y)=S_{D,c}(y,x)$，$S_{D,c}(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$，因此只需要证明 $S_{D,c}$ 满足三角不等式。记 $S_{D,c}(x,y)=\sup\limits_{p\in\partial D}\log(1+cs_p(x,y))$，其中：

$$s_p=\frac{d(x,y)}{(1+d(x,p))(1+d(y,p))}。$$

在 Ptolemy 空间(D,d)中，对于任意取定的 $p\in\partial D$，由文献[16]定理 3 可知 cs_p 是一个度量，所以$(D,\log(1+cs_p))$是一个度量空间。因此，

$$\log(1+cs_p(x,y))\leqslant\log(1+cs_p(x,z))+\log(1+cs_p(y,z))\leqslant S_{D,c}(x,z)+S_{D,c}(y,z)。$$

由 p 的任意性，证得 $S_{D,c}(x,y)\leqslant S_{D,c}(x,z)+S_{D,c}(y,z)$。

下面证明$(D,S_{D,c})$的 Gromov 双曲性。由引理 1，有

$$\log(1+cs_p(x,y))\leqslant\log(1+cs_p(x,z))\vee\log(1+cs_p(y,z))+\log 2\leqslant S_{D,c}(x,z)\vee S_{D,c}(y,z)+\log 2。$$

由 p 的任意性，得到 $S_{D,c}(x,y)\leqslant S_{D,c}(x,z)\vee S_{D,c}(y,z)+\log 2$。也就是说，$(D,S_{D,c})$是 log2-超度量空间，因此是 log2-双曲空间。

特别地，对于任意的 $c_i>0$，S_{D,c_i} 都是近似超度量，而且任意两个这样的度量都是类距的。由定理 1，即证得$(D,\sum\limits_{i=1}^{n}S_{D,c_i})$是 Gromov 双曲空间。

2.3 定理 3 的证明及推论

为方便起见，下文用 K 表示所有度量变换组成的集合。

引理 2 设(D,d)是一个度量空间，$\varphi_i\in K$，$\delta_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,n$。若对于任意 $t\geqslant 0$，都有 $\varphi_i(t)$是非递减的，且满足 $\varphi_i(2t)-\varphi_i(t)\leqslant\delta_i$，则$(D,\sum\limits_{i=1}^{n}d_{\varphi_i})$是 Gromov 双曲空间。

证明 由文献[13]命题 3.12 可知，(D,d_{φ_i})是 δ_i-超度量的。因为度量变换 φ_i 都是非递减的，所以变

换后的度量 d_{φ_i} 都是类距的。由定理 1，即证得结论成立。

度量变换的形式有很多种。根据文献[17]命题 2.3，若函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足次可加性、非递减性以及 $\varphi^{-1}(0)=\{0\}$，则 $\varphi\in K$。引理 2 中满足 $\varphi(2t)-\varphi(t)\leqslant\delta$ 的度量变换通常称为类对数型度量变换，定理 3 中给出的度量变换是它的一种特殊形式。

定理 3 的证明　显然，φ_i 是非递减的。由引理 2，只需要证明 $\varphi_i\in K$ 和 $\varphi_i(2t)-\varphi_i(t)$ 的有界性。

先证明 $\varphi_i\in K$。因为 f_i 是凹函数且满足 $f_i(0)=0$，所以对于任意的 $0<x\leqslant y$，有

$$\frac{f_i(x+y)}{x+y}\leqslant\frac{f_i(y)}{y},\frac{f_i(y)}{y}\leqslant\frac{f_i(x)}{x}。$$

因此，

$$f_i(x+y)\leqslant\frac{x+y}{y}f_i(y)=\frac{x}{y}f_i(y)+f_i(y)\leqslant f_i(x)+f_i(y)。$$

显然，当 $x=0$ 时，$f_i(x+y)\leqslant f_i(x)+f_i(y)$ 也成立。因此，对于任意的 $x,y\geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}\varphi_i(x+y)&=b_i\log(1+a_ix+a_iy)+f_i(x+y)\\&\leqslant b_i\log(1+a_ix)+b_i\log(1+a_iy)+f_i(x)+f_i(y)\\&=\varphi_i(x)+\varphi_i(y)。\end{aligned}$$

也就是说，φ_i 满足次可加性，从而 $\varphi_i\in K$。

下面证明 $\varphi_i(2t)-\varphi_i(t)$ 的有界性。由 f_i 的有界性，存在 $M_i\geqslant 0$，使得 $0\leqslant f_i(t)\leqslant M_i$ 对于任意的 $t\geqslant 0$ 都成立。因此，

$$\varphi_i(2t)-\varphi_i(t)=b_i\log\frac{1+2a_it}{1+a_it}+f_i(2t)-f_i(t)\leqslant b_i\log 2+M_i,$$

即证得结论成立。

推论 3　设 (D,d) 是一个度量空间。定义两个度量变换：

$$\varphi_1(x)=\log(1+x)+\arctan x,\varphi_2(x)=3\log(1+2x)+1-\mathrm{e}^{-x},$$

则 $(D,d_{\varphi_1}+d_{\varphi_2})$ 是 Gromov 双曲空间。

比较定理 3 和推论 1 可发现：推论 1 是从不同的度量出发，构造同样形式的对数型度量，从而研究这些度量之和的 Gromov 双曲性；而定理 3 是从同一个度量出发，通过不同的度量变换构造新的度量，从而研究这些度量之和的 Gromov 双曲性。

3　结　论

目前，关于单个度量的 Gromov 双曲性已经有了广泛研究，本文主要研究了多个度量之和的 Gromov 双曲性。

a)通过近似超度量的 Gromov 双曲性，研究了对数型度量的性质，从而由对数型近似超度量之和构造了两类 Gromov 双曲空间；作为一个推论，由二维欧氏空间上的两个 Gromov 双曲度量之和构造出了一个新的 Gromov 双曲空间。

b)通过特殊的对数型距离函数的上确界，在 Ptolemy 空间上定义了一类含参数的度量，并证明了它的 Gromov 双曲性；进一步地，根据参数的不同取值，由这类度量之和构造了一个 Gromov 双曲空间。

c)给出了一类具体的类对数型度量变换，使得任意一个度量在这类度量变换下得到的度量之和是 Gromov 双曲度量，这一结论建立了函数与度量空间的联系，推广了 Gromov 双曲空间的构造方法。

参考文献：

[1] Gromov M. Hyperbolic groups[M]//Gersten S M. Essays in Group Theory. New York：Springer，1987：75-263.
[2] Bonk M，Heinonen J，Koskela P. Uniformizing Gromov Hyperbolic Spaces[M]. Paris：Société Mathématique de France，2001.
[3] Buyalo S，Schroeder V. Elements of Asymptotic Geometry[M]. Berlin：EMS Press，2007.

[4] Väisälä J. Gromov hyperbolic spaces[J]. Expositiones Mathematicae, 2005, 23(3): 187-231.
[5] Zhou Q S, Li Y X, Li X N. Sphericalizations and applications in Gromov hyperbolic spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2022, 509(1): 125948.
[6] Besson G, Courtois G. Compactness and finiteness results for Gromov-hyperbolic spaces[M]//Papadopoulos A. Surveys in Geometry I. Cham: Springer, 2022: 205-268.
[7] Beardon A F, Minda D. The hyperbolic metric and geometric function theory[M]//Ponnusamy S, Sugawa T, Vuorinen M. Quasiconformal Mappings and Their Applications. New Delhi: Narosa, 2007: 9-56.
[8] Klén R, Lindén H, Vuorinen M, et al. The visual angle metric and Möbius transformations[J]. Computational Methods and Function Theory, 2014, 14(2): 577-608.
[9] Klén R, Vuorinen M, Zhang X H. Quasihyperbolic metric and Möbius transformations[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2014, 142(1): 311-322.
[10] Vuorinen M, Zhang X H. Distortion of quasiconformal mappings with identity boundary values[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2014, 90(3): 637-653.
[11] Hästö P A. Gromov hyperbolicity of the j_G and $\tilde{J}_G$ metrics[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2006, 134(4): 1137-1142.
[12] 贾改莉，张孝惠. 三角比度量的界和比较不等式[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版)，2020，43(6)：858-864.
[13] Dragomir G, Nicas A. Metric transforms yielding Gromov hyperbolic spaces[J]. Geometriae Dedicata, 2019, 200(1): 331-350.
[14] Aksoy A, Ibragimov Z, Whiting W. Averaging one-point hyperbolic-type metrics[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2018, 146(12): 5205-5218.
[15] Hästö P A. A new weighted metric: the relative metric I[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 274(1): 38-58.
[16] Zhang Z Q, Xiao Y Q. Strongly hyperbolic metrics on Ptolemy spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 478(2): 445-457.
[17] Corazza P. Introduction to metric-preserving functions[J]. The American Mathematical Monthly, 1999, 106(4): 309-323.

(责任编辑:康　锋)