浙江理工大学学报,第 51 卷,第 4 期,2024 年 7 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2024.04.016

两阶段金融衍生品清算问题的半定规划松弛方法

李　叶[1],洪陈春[2],罗和治[1]
(1.浙江理工大学理学院,杭州 310018;2.华信咨询设计研究院有限公司,杭州 310014)

摘　要:在不限制暂时性及永久性价格影响参数大小关系下,研究两阶段金融衍生品清算问题的半定规划(Semi-definite programming, SDP)松弛方法,其优化模型为一个带有线性和单个非凸二次约束的非凸二次规划(Quadratically constrained quadratic program, QCQP)问题。针对该非凸 QCQP 问题,给出了一个带有 Secant 割的 SDP 松弛,并估计了它与原问题之间的间隙。随机例子的数值结果表明该 SDP 松弛可以得到原问题更紧的上界,从而为寻求原问题的一个好的近似解提供方法。

关键词:两阶段清算模型;金融衍生品;非凸二次规划;SDP 松弛;Secant 割

中图分类号:O224　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:1673-3851(2024)04-0566-07

引文格式:李叶,洪陈春,罗和治.两阶段金融衍生品清算问题的半定规划松弛方法[J].浙江理工大学学报(自然科学),2024,51(4):566-572.

Reference Format: LI Ye, HONG Chenchun, LUO Hezhi. The semi-definite programming relaxation method for two-period financial derivatives′ liquidation problem[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University, 2024, 51(4): 566-572.

The semi-definite programming relaxation method for two-period financial derivatives′ liquidation problem

LI Ye[1], *HONG Chenchun*[2], *LUO Hezhi*[1]
(1. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;
2. Huaxin Consulting Co., Ltd., Hangzhou 310014, China)

Abstract: The semi-definite programming (SDP) relaxation method for two-period financial derivatives′ liquidation problem is studied without restricting the relationship between the magnitude of the temporary and permanent price impact parameters, and the optimization model is a nonconvex quadratically constrained quadratic programming (QCQP) problem with linear and single nonconvex quadratic constraints. An SDP relaxation with secant cuts for this nonconvex QCQP problem is presented and the gap between it and the original problem is estimated. The numerical results of random instances show that the SDP relaxation can obtain a tighter upper bound to the original problem and then provides a method for finding a good approximate solution to the problem.

Key words: two-period liquidation model; financial derivatives; nonconvex quadratic programming; SDP relaxation; Secant cut

0　引　言

清算持有的投资组合资产被认为是投资者在面临财务困境时最常采取的手段。设计一种有效的清算策

收稿日期:2022—10—12　　网络出版日期:2023—01—16
基金项目:国家自然科学基金项目(12271485,11871433);浙江省自然科学基金项目(LZ21A010003)
作者简介:李　叶(1997—　),女,江西南昌人,硕士研究生,主要从事最优化理论与算法方面的研究。
通信作者:罗和治,E-mail:hzluo@zstu.edu.cn

略，以最小的交易成本满足现金需求，对机构投资者和个人投资者至关重要。如果投资者不加选择地抛售大量资产，会造成非常大的交易成本。因此，在更多情况下，投资者会在一段时间内逐步进行交易。在清算过程中，由于早期的交易活动会对后续交易造成持续性的影响，在减少交易成本时需重点考虑价格影响因素。Madhava 等[1]将价格影响分为暂时和永久的价格影响，暂时性价格影响表示进行交易时价格的瞬时变化，而永久性价格影响表示交易前后价格的变化。

Brown 等[2]研究了带有永久和暂时价格影响的最优投资组合降杠杆问题，并要求交易后投资组合的杠杆率降低到可接受的水平；此外，他们考虑到交易后可能会出现流动性冲击，提出了两阶段模型，并指出在清算过程中对资产清算优先顺序进行选择时，需着重考虑资产价格的不确定性因素。在 Brown 等[2]的启发下，Chen[3]研究了资产种类更丰富的投资组合清算问题，提出了一个关于金融衍生品的两阶段鲁棒优化模型，并在凸性假设下证明了该模型等价于一个半定规划（Semi-definite programming，SDP）问题。值得一提，文献[3]中的凸性假设要求暂时性价格影响因素占主导地位。然而，实证分析表明了这种假设并不总是成立[4]。本文在去掉凸性假设下研究两阶段金融衍生品清算问题，其优化模型归结为一个带有非正变量、线性不等式和单个二次约束的非凸二次规划问题（Quadratically constrained quadratic program，QCQP），求其全局最优解是非常困难的。

众所周知，非凸 QCQP 问题一般是 NP-难的[5]。由于 SDP 松弛方法可以为非凸 QCQP 问题提供紧的松弛界和好的近似解[6]，学者们对于非凸 QCQP 问题提出了各种形式的 SDP 松弛。丁晓东等[7]针对带边际风险控制的投资组合优化问题提出了一个紧的 SDP 松弛；章显业等[8]针对带凸二次约束的非凸 QP 问题提出了一个紧的双非负规划松弛；Luo 等[9]利用罚函数方法提出了二次约束线性规划问题的 SDP 松弛；Zheng 等[10-11]针对非凸 QCQP 问题分别提出了基于二次型的最佳 D. C. 分解以及基于矩阵锥分解和多胞形逼近技术的紧 SDP 松弛；Eltved 等[12]针对广义信赖域子问题，提出了基于割技术的紧 SDP 松弛；Azuma 等[13]针对一类特殊 QCQP 问题，给出了精确 SDP 松弛解的充分条件。

本文在没有要求暂时性及永久性价格影响参数大小关系的条件下，研究两阶段金融衍生品清算问题的 SDP 松弛方法，以寻求其最优值的紧松弛界。针对问题的特殊结构，提出了一个带有 Secant 割的 SDP 松弛，并给出它与原问题之间的间隙估计。

本文引入如下记号：$\boldsymbol{S}^n$ 为 n 阶对称矩阵的集合，$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹；对于 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{S}^n$，$\boldsymbol{B}\succeq 0$ 表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为半正定矩阵；$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{S}^n$，$\boldsymbol{X}\bullet\boldsymbol{Y}=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{XY})$ 为 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 的内积；$\mathrm{diag}(\boldsymbol{a})$ 为以向量 $\boldsymbol{a}$ 的分量为对角元的对角矩阵；$\mathbf{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵。

1　两阶段金融衍生品清算模型

本节介绍 Chen[3]提出的两阶段金融衍生品清算问题的优化模型，该模型能够以最少的交易成本找到满足现金需求的最优清算策略，并利用 Delta-gamma 近似方法[14]估计金融衍生品的收益率。

在第 i 阶段，$i=1,2$，设 $\boldsymbol{y}_i$、$\boldsymbol{p}_i\in\mathbf{R}^n$ 表示各资产的交易量及资产价格。$\boldsymbol{\Lambda}$、$\boldsymbol{\Phi}$ 分别表示临时性和永久性价格影响矩阵，由于只考虑同一资产之间的价格影响因素，则 $\boldsymbol{\Lambda}$、$\boldsymbol{\Phi}$ 为 n 阶对角矩阵，其对角元素分别为 λ_i，$\phi_i(>0)$，$i=1,\cdots,n$。$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}_i$ 表示因为供需不平衡造成的暂时性影响，$\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_i$ 是交易后的信息不对称对资产价格产生的影响。$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 表示各资产的初始持有量，在清算期间不允许卖空或买入其他资产的约束可表示为：

$$\boldsymbol{y}_1\leqslant\mathbf{0},\boldsymbol{y}_2\leqslant\mathbf{0},-\boldsymbol{x}_0\leqslant\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2。$$

设 $\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^n$ 为第一阶段的资产收益率，Chen[3]采用 Delta-gamma 近似方法将金融衍生品的收益率近似为关于其标的资产收益率的二次函数：

$$\boldsymbol{r}_i\approx f_i(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}})=\frac{\bar{\boldsymbol{\theta}}_i T}{\boldsymbol{p}_{1,i}}+\left(\frac{\mathrm{diag}(\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{b}})\bar{\boldsymbol{\Delta}}_i}{\boldsymbol{p}_{1,i}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}^b+\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{diag}(\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_i\mathrm{diag}(\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{b}})}{\boldsymbol{p}_{1,i}}\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}},$$

其中：$\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}$，$\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{b}}\in\mathbf{R}^n$ 表示标的资产的收益率和初始价格；T 表示清算前后的时间长度；$\bar{\theta}_i$、$\bar{\boldsymbol{\Delta}}_i$ 和 $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_i$（Greeks）是作为衡量金融衍生品风险的指标，对于只拥有一项标的资产 j 的金融衍生品 i，$\bar{\boldsymbol{\Delta}}_i$ 为仅第 j 个元素非零的向量，$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_i$ 为仅第 j 个对角元素非零的矩阵。

考虑到资产流动产生的暂时性影响,这两个阶段的实际交易价格分别为 $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{\Lambda y}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{\Lambda y}_2$,且交易后会同样会产生永久性影响,第一阶段的交易行为会影响第二阶段初始的资产价格,因此 $\boldsymbol{p}_2=\mathrm{diag}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}))\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{\Phi y}_1$,其中:$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}})=[f_1(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}),\cdots,f_n(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}})]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}\in\mathbf{R}^n$ 为分量全为 1 的向量。所以清算后产生的总现金流 K 为:

$$
\begin{aligned}
K(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2)&=-(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{\Lambda y}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1-(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{\Lambda y}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2\\
&=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}))\boldsymbol{p}_1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}。
\end{aligned}
$$

设 a、l 为清算后的资产和负债,l_0 为初始负债。由于第二阶段的永久性影响 $\boldsymbol{\Phi y}_2$ 会影响交易后的资产价格,且无需考虑第二阶段的资产收益,所以在计算清算后的资产 a 时的资产价格为 $\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{\Phi y}_2$。清算过程产生的现金流可用于清偿负债,故清算后的净资产值为

$$
\begin{aligned}
e(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2)&=a-l=(\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{\Phi y}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)-(l_0-K(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2))\\
&=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Phi} & -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi x}_0+\mathrm{diag}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}))\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{\Phi x}_0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}+\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}))\boldsymbol{p}_1-l_0。
\end{aligned}
$$

清算问题的目标是最大化交易后的净资产,在满足现金流需求的同时尽量减少由价格影响造成的交易成本。因此,两阶段金融衍生品的清算模型可归结为如下带有线性和单个二次约束的二次规划问题:

$$
\begin{cases}
\max\limits_{\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in\mathbf{R}^n} & e(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2);\\
\text{s. t.} & K(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)\geqslant\kappa,\\
& -\boldsymbol{x}_0\leqslant\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\\
& \boldsymbol{y}_1\leqslant\mathbf{0},\boldsymbol{y}_2\leqslant\mathbf{0}
\end{cases}\tag{1}
$$

其中:κ 为清算后最低的现金流需求。文献[3]假设 $\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Phi}$ 为半正定矩阵,从而问题(1)是一个凸二次规划,证明了问题(1)等价于一个 SDP 问题。在没有假设 $\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Phi}$ 为半正定性的条件下,问题(1)是一个非凸二次约束二次规划,求其全局最优解是 NP-难的。

2 SDP 松弛方法及间隙估计

本节给出求解问题(1)的一个 SDP 松弛,并估计其与原问题之间的间隙。

为方便描述,将问题(1)重新改写为如下 QCQP 问题:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{2n}} & f(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{y}+\boldsymbol{q}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}_0;\\
\text{s. t.} & g(\mathbf{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{y}+\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}_1\leqslant 0,\\
& \boldsymbol{Ay}\leqslant\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{0}
\end{cases}\tag{2}
$$

其中:

$$
\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Phi} & -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\\ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Lambda}-\boldsymbol{\Phi}\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda} & \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{\Lambda}\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{q}_0=-\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi x}_0+\mathrm{diag}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}))\boldsymbol{p}_1\\ \boldsymbol{\Phi x}_0\end{pmatrix},\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}))\boldsymbol{p}_1\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{d}_0=\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{e}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}^{\mathrm{b}}))\boldsymbol{p}_1-l_0,\boldsymbol{d}_1=\kappa,\boldsymbol{A}=(-\mathbf{I}_n\quad-\mathbf{I}_n)。
$$

注意到 $\boldsymbol{Q}_0$、$\boldsymbol{Q}_1$ 均为分块矩阵,且每一子块均为对角矩阵。定理 1 给出了这类分块矩阵的特征值及其相应的正交单位特征向量。

定理 1　设 $Q=\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}$，其中 $A=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 和 $B=\mathrm{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 为对角阵，再设 $\mu_1,\cdots,\mu_n$，$\mu_{n+1},\cdots,\mu_{2n}$ 为 Q 的特征值，且 $\zeta_1,\cdots,\zeta_n,\zeta_{n+1},\cdots,\zeta_{2n}\in\mathbf{R}^{2n}$ 为其对应的正交单位特征向量，则

a) $\mu_i=\alpha_i+\beta_i,\mu_{n+i}=\alpha_i-\beta_i,i=1,\cdots,n$；

b) 若 $\alpha_i,\beta_i\neq0,i=1,\cdots,n$，且 $\alpha_i+\beta_i\neq\alpha_j+\beta_j,\alpha_i-\beta_i\neq\alpha_j-\beta_j,\forall i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$，则

$$\begin{cases}\zeta_{i,i}=\zeta_{i,n+i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\zeta_{i,j}=0,\forall j=1,\cdots,2n,j\neq i,n+i,i=1,\cdots,n,\\ \zeta_{n+i,i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\zeta_{n+i,n+i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\zeta_{n+i,j}=0,\forall j=1,\cdots,2n,j\neq i,n+i,i=1,\cdots,n。\end{cases}$$

证明　a) 计算矩阵 Q 的特征多项式：

$$\begin{aligned}f(\mu)&=\begin{vmatrix}\mu\mathbf{I}_n-A & -B\\ -B & \mu\mathbf{I}_n-A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu\mathbf{I}_n-A & -B\\ \mu\mathbf{I}_n-A-B & \mu\mathbf{I}_n-A-B\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}\mu\mathbf{I}_n-A+B & -B\\ \mathbf{O} & \mu\mathbf{I}_n-A-B\end{vmatrix}=|\mu\mathbf{I}_n-A+B|\,|\mu\mathbf{I}_n-A-B|\\&=(\mu-\alpha_1+\beta_1)\cdots(\mu-\alpha_n+\beta_n)(\mu-\alpha_1-\beta_1)\cdots(\mu-\alpha_n-\beta_n),\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{O}$ 为 n 阶零矩阵。令 $f(\mu)=0$，得 Q 的特征值为 $\mu_i=\alpha_i+\beta_i,\mu_{n+i}=\alpha_i-\beta_i,i=1,\cdots,n$。

b) 当 $\mu_1=\alpha_1+\beta_1$ 时，齐次线性方程组为 $(Q-\mu_1\mathbf{I}_{2n})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，其中 $\mathbf{I}_{2n}$ 为 $2n$ 阶单位矩阵。注意到 $\beta_1\neq0$，$\alpha_1+\beta_1\neq\alpha_j+\beta_j,\forall j=2,\cdots,n$。经矩阵行初等变换，系数矩阵化为阶梯型矩阵：

$$Q-\mu_1\mathbf{I}_{2n}=\begin{bmatrix}-\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2-\mu_1 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n-\mu_1 & 0 & 0 & \cdots & \beta_n\\ \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_2-\mu_1 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n-\mu_1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_2-\alpha_2+\mu_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_n-\alpha_n+\mu_1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系：$\boldsymbol{\eta}_1=(1,0,\cdots0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，再单位化得 $\boldsymbol{\zeta}_1=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\cdots0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}$。同理，对 $i=2,\cdots,n$，当 $\mu_i=\alpha_i+\beta_i$ 时，由 $(Q-\mu_i\mathbf{I}_{2n})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 得基础解系：$\boldsymbol{\eta}_i=(\eta_{i,1},\cdots,\eta_{i,2n})^{\mathrm{T}}$，其中：$\eta_{i,i}=\eta_{i,n+i}=1,\eta_{i,j}=0,\forall j=1,\cdots,2n,j\neq i,n+i$。再单位化得 $\boldsymbol{\zeta}_i=(\zeta_{i,1},\cdots,\zeta_{i,2n})^{\mathrm{T}}$，其中：$\zeta_{i,i}=\zeta_{i,n+i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\zeta_{i,j}=0,\forall j=1,\cdots,2n,j\neq i,n+i,i=2,\cdots,n$。

对 $i=1,\cdots,n$，当 $\mu_{n+i}=\alpha_i-\beta_i$ 时，由 $(Q-\mu_{n+i}\mathbf{I}_{2n})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，利用矩阵行初等变换和条件 $\alpha_i-\beta_i\neq\alpha_j-\beta_j$，$\forall j=1,\cdots,n,j\neq i$，得基础解系：$\boldsymbol{\eta}_{n+i}=(\eta_{n+i,1},\cdots,\eta_{n+i,2n})^{\mathrm{T}}$，其中：$\eta_{n+i,i}=1,\eta_{n+i,n+i}=-1,\eta_{n+i,j}=0,\forall j=$

$1,\cdots,2n,j\neq i,n+i$,再单位化得 $\boldsymbol{\zeta}_{n+i}=(\zeta_{n+i,1},\cdots,\zeta_{n+i,2n})^{\mathrm{T}}$,其中:$\boldsymbol{\zeta}_{n+i,i}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\boldsymbol{\zeta}_{n+i,n+i}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\boldsymbol{\zeta}_{n+i,j}=0$,$\forall j=1,\cdots,2n,j\neq i,n+i$。

注意到 $\boldsymbol{\zeta}_1,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_n,\boldsymbol{\zeta}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{2n}$ 是两两正交的。故 $\boldsymbol{\zeta}_1,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_n,\boldsymbol{\zeta}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{2n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 相应于特征值 $\mu_1,\cdots,\mu_n,\mu_{n+1},\cdots,\mu_{2n}$ 的正交单位特征向量。

证毕。

由定理 1,立得 $\boldsymbol{Q}_0$、$\boldsymbol{Q}_1$ 的特征值和相应的正交单位特征向量。

推论 1 设 $\mu_i^k,\mu_{n+i}^k,i=1,\cdots n$ 为 $\boldsymbol{Q}_k$ 的特征值,$k=0,1$,则

$$\begin{cases}\mu_i^0=\lambda_i-\frac{3}{2}\phi_i,\mu_{n+i}^0=\lambda_i-\frac{1}{2}\phi_i,i=1,\cdots,n;\\ \mu_i^1=\lambda_i+\frac{1}{2}\phi_i,\mu_{n+i}^1=\lambda_i-\frac{1}{2}\phi_i,i=1,\cdots,n。\end{cases}$$

并且 $\boldsymbol{Q}_0$、$\boldsymbol{Q}_1$ 有相同的正交单位特征向量 $\boldsymbol{\zeta}_1,\cdots,\boldsymbol{\zeta}_n,\boldsymbol{\zeta}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{\zeta}_{2n}\in\mathbf{R}^{2n}$,其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{\zeta}_{i,i}=\boldsymbol{\zeta}_{i,n+i}=\frac{\sqrt{2}}{2},\boldsymbol{\zeta}_{i,j}=0,\forall j=1,\cdots,2n,j\neq i,n+i,i=1,\cdots,n;\\ \boldsymbol{\zeta}_{n+i,i}=\frac{\sqrt{2}}{2},\boldsymbol{\zeta}_{n+i,n+i}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\boldsymbol{\zeta}_{n+i,j}=0,\forall j=1,\cdots,2n,j\neq i,n+i,i=1,\cdots,n。\end{cases}$$

基于推论 1,给出问题(2)的一个带有 Secant 割的 SDP 松弛。不失一般性,设 $\boldsymbol{Q}_0$、$\boldsymbol{Q}_1$ 的前 r_0,r_1 个特征值为负。根据推论 1,对 $\boldsymbol{Q}_k$ 特征值分解,得 $\boldsymbol{Q}_k=\boldsymbol{Q}_k{}^{+}-\boldsymbol{C}_k{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_k$,$k=0,1$,其中:

$$\boldsymbol{Q}_k{}^{+}=\sum_{i=r_k+1}^{2n}\mu_i^k\boldsymbol{\zeta}_i\boldsymbol{\zeta}_i^{\mathrm{T}}\succeq 0,\boldsymbol{C}_k=(\sqrt{-\mu_1^k}\boldsymbol{\zeta}_1,\cdots,\sqrt{-\mu_{r_k}^k}\boldsymbol{\zeta}_{r_k})^{\mathrm{T}},$$

且 $\mu_i^k<0,i=1,\cdots,r_k$,$\mu_i^k\geqslant 0\ i=r_k+1,\cdots,2n,k=0,1$。令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$,得 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}_k\bullet\boldsymbol{Y}$,$k=0,1$。设 $\boldsymbol{l}^k,\boldsymbol{u}^k\in\mathbf{R}^{r_k}$ 分别为 $\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{y}$ 在可行域 $\mathcal{S}$ 上的下界和上界,$k=0,1$,其中:

$$\mathcal{S}:=\left\{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y})\in\mathbf{R}^{2n}\times\boldsymbol{S}^{2n}\ \middle|\ \begin{array}{l}\boldsymbol{Q}_1\bullet\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{q}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}_1\leqslant 0\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{x}_0,\mathbf{y}\leqslant\mathbf{0}\\ \boldsymbol{Y}\succeq\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\end{array}\right\}。$$

令 $\boldsymbol{c}_i^k=\sqrt{-\mu_i^k}\boldsymbol{\zeta}_i$,$i=1,\cdots,r_k$,$k=0,1$,则 $\boldsymbol{l}^k,\boldsymbol{u}^k$ 可通过求解如下 SDP 问题得到:

$$\begin{cases}\boldsymbol{l}_i^k=\min\limits_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y})\in\mathcal{S}}(\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{u}_i^k=\max\limits_{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y})\in\mathcal{S}}(\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\end{cases}i=1,\cdots,r_k,k=0,1。$$

当 $\boldsymbol{l}_i^k\leqslant(\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{u}_i^k$ 时,有:

$$\boldsymbol{c}_i^k(\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\bullet\boldsymbol{Y}=((\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^2\leqslant(\boldsymbol{l}_i^k+\boldsymbol{u}_i^k)(\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{l}_i^k\boldsymbol{u}_i^k,i=1,\cdots,r_k,k=0,1\tag{3}$$

其中:式(3)为 Saxena 等[15]所提出的 Secant 割。将 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 松弛为半正定锥约束 $\boldsymbol{Y}\succeq\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$,可得问题(2)的如下 SDP 松弛问题:

$$\begin{cases}\min & \boldsymbol{Q}_0\bullet\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{q}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}_0;\\ \text{s. t.} & \boldsymbol{Q}_1\bullet\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{q}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}_1\leqslant 0,\\ & \boldsymbol{c}_i^k(\mathbf{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\bullet\boldsymbol{Y}\leqslant(\mathbf{l}_i^k+\boldsymbol{u}_i^k)(\mathbf{c}_i^k)^{T}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{l}_i^k\boldsymbol{u}_i^k,i=1,\cdots,r_k,k=0,1,\\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}\leqslant\mathbf{0},\\ & \boldsymbol{Y}\succeq\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{4}$$

定理 2 估计了问题(2)与问题(4)之间的间隙。记 $\hat{g}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Q}_1\bullet\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{q}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}_1$,且 f^* 和 v^* 分别为问题(2)和问题(4)的最优值。

定理 2 设$(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{Y}})$为问题(4)的最优解,则

$$\begin{cases} f(\bar{\boldsymbol{y}})-f^{*}\leqslant \sum_{i=1}^{r_0}\boldsymbol{c}_i^0(\boldsymbol{c}_i^0)^{\mathrm{T}}\bullet\bar{\boldsymbol{Y}}-((\boldsymbol{c}_i^0)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}^0-\boldsymbol{l}^0\|_2^2,\\ g(\bar{\boldsymbol{y}})\leqslant \sum_{i=1}^{r_1}\boldsymbol{c}_i^1(\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bullet\bar{\boldsymbol{Y}}-((\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}^1-\boldsymbol{l}^1\|_2^2。\end{cases}$$

证明　因问题(4)是问题(2)的松弛，故 $f^{*}\geqslant v^{*}$。根据 $\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{Q}_0^{+}-\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_0,\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\succeq 0$ 以及问题(4)中的 Secant 割约束，可推得：

$$\begin{aligned} f(\bar{\boldsymbol{y}})-f^{*}&\leqslant f(\bar{\boldsymbol{y}})-v^{*}=\boldsymbol{Q}_0\bullet(\bar{\boldsymbol{y}}\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}-\bar{\boldsymbol{Y}})=\boldsymbol{Q}_0^{+}\bullet(\bar{\boldsymbol{y}}\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}-\bar{\boldsymbol{Y}})+\sum_{i=1}^{r_0}\boldsymbol{c}_i^0(\boldsymbol{c}_i^0)^{\mathrm{T}}\bullet\bar{\boldsymbol{Y}}-((\boldsymbol{c}_i^0)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{r_0}\boldsymbol{c}_i^0(\boldsymbol{c}_i^0)^{T}\bullet\bar{\boldsymbol{Y}}-((\boldsymbol{c}_i^0)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2\leqslant\sum_{i=1}^{r_0}-((\boldsymbol{c}_i^0)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2+(\boldsymbol{l}_i^0+\boldsymbol{u}_i^0)(\boldsymbol{c}_i^0)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{l}_i^0\boldsymbol{u}_i^0\\ &\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}^0-\boldsymbol{l}^0\|_2^2。\end{aligned}$$

同理，由 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_1^{+}-\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\succeq 0$ 及 $(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{Y}})$ 的可行性，可推得

$$\begin{aligned} g(\bar{\boldsymbol{y}})&\leqslant g(\bar{\boldsymbol{y}})-\hat{g}(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{Y}})=\boldsymbol{Q}_1\bullet(\bar{\boldsymbol{y}}\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}-\bar{\boldsymbol{Y}})=\boldsymbol{Q}_1^{+}\bullet(\bar{\boldsymbol{y}}\bar{\boldsymbol{y}}^{\mathrm{T}}-\bar{\boldsymbol{Y}})+\sum_{i=1}^{r_1}\boldsymbol{c}_i^1(\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bullet\bar{\boldsymbol{Y}}-((\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2\\ &\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}\boldsymbol{c}_i^1(\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bullet\bar{\boldsymbol{Y}}-((\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2\leqslant\sum_{i=1}^{r_1}-((\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2+(\boldsymbol{l}_i^1+\boldsymbol{u}_i^1)(\boldsymbol{c}_i^1)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{l}_i^1\boldsymbol{u}_i^1\leqslant\frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}^1-\boldsymbol{l}^1\|_2^2。\end{aligned}$$

证毕。

推论 2　设 $(\bar{\boldsymbol{y}},\bar{\boldsymbol{Y}})$ 为问题(4)的最优解。若 $\boldsymbol{c}_i^k(\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\bullet\bar{\boldsymbol{Y}}=((\boldsymbol{c}_i^k)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{y}})^2,i=1,\cdots,r_k,k=0,1$，则 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 为问题(2)的最优解。

证明　由定理 2 及假设，得 $f(\bar{\boldsymbol{y}})-f^{*}\leqslant 0,g(\bar{\boldsymbol{y}})\leqslant 0$。结合 $\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{y}}\leqslant\boldsymbol{x}_0,\bar{\boldsymbol{y}}\leqslant\boldsymbol{0}$，知 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 为问题(2)的可行解，从而 $f(\bar{\boldsymbol{y}})\geqslant f^{*}$。因此，$f(\bar{\boldsymbol{y}})=f^{*}$。故 $\bar{\boldsymbol{y}}$ 为问题(2)的最优解。

证毕。

3　数值实验

本节给出了求解问题(1)和问题(4)的平均数值结果，并通过数值实验验证 SDP 松弛为原问题提供紧的松弛界。数值实验在 MATLAB(R2018b)中实现，电脑的操作系统为 Windows 10，处理器为 Intel(R) Core(TM)i7－10710U CPU(1.10 GiHz)，运行内存为 16 GiB。

在数值实验中，对随机生成的 10 个问题进行测试，并用 MOSEK 求解器求解 SDP 问题(4)，GUROBI 求解器求解问题(1)。测试问题中的参数类似于文献[3]的方法随机产生，即：$\boldsymbol{\Lambda}$、$\boldsymbol{\Phi}$ 的对角元服从 $U(10^{-5},10^{-4})$，即区间$[10^{-5},10^{-4}]$上的均匀分布；$\bar{\theta}$ 服从 $U(-0.1,-0.01)$，$\bar{\boldsymbol{\Delta}}_i$ 的元素服从 $U(0,1)$，$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_i$ 的元素服从 $U(0.01,0.1)$，$\boldsymbol{x}_{0,i}=10^4,\boldsymbol{p}_{1,i}=1,\boldsymbol{p}_{1,i}=1,\boldsymbol{r}_i^b=-0.05,i=1,\cdots,n,\kappa=0.2\times(\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_1$。

表 1 给出了 GUROBI 求解器对问题(1)及 MOSEK 求解器对问题(4)的 10 个随机测试例子的平均数值结果，其中：“v_{opt}”“v_{ub}”和“时间”分别表示对 10 个测试例子得到的问题(1)的平均最优值、问题(4)的平均最优值以及平均 CPU 时间(单位：s)；“(＊)”表示求解器在 3600 s 内求得全局最优解的实例数，“—”表示求解器未能在 3600 s 内找到全局最优解；“v_{gap}”表示问题(1)和问题(4)全局最优值的相对间隙(单位：%)，计算公式为：

$$v_{\mathrm{gap}}/\%=\frac{v_{\mathrm{ub}}-v_{\mathrm{opt}}}{|v_{\mathrm{opt}}|}\times 100。$$

由表 1 可知，按照相对间隙，SDP 松弛问题(4)能为问题(1)提供更紧的上界。当问题维数及 $\boldsymbol{Q}_0$、$\boldsymbol{Q}_1$ 的负特征值个数增多时，GUROBI 求解速度较慢，并且当 $n\geqslant 100$ 时，GUROBI 无法在 3600 s 内求到最优解。相比之下，松弛问题(4)在 $n=200$ 时仍有效求解，并为原问题提供更紧的上界。

表 1 求解问题(1)及问题(4)的平均数值结果

n	r_0	r_1	GUROBI		MOSEK		v_{gap}/%
			v_{opt}	时间/s	v_{ub}	时间/s	
20	18	5	22758.36	45.01	24230.89	0.74	6.81
40	38	8	49122.53	317.06	51205.64	4.74	4.22
60	55	12	71161.59(6)	1510.97	74992.33	15.36	5.42
80	76	19	101872.98(5)	1831.64	107385.35	42.60	5.37
100	91	19	—	—	123854.22	94.78	—
200	181	42	—	—	255044.33	893.89	—

4 结 语

本文在不限制暂时性价格影响因素占主导地位的交易市场中研究两阶段金融衍生品清算问题,其模型是一个带线性和单个非凸二次约束的非凸二次规划问题,给出了该模型的一个带有 Secant 割的 SDP 松弛及其间隙估计。随机例子的数值结果表明,本文提出的 SDP 松弛能为原问题提供了更紧的上界。

参考文献:

[1] Madhavan A . Market microstructure: A survey[J]. Journal of Financial Markets, 2000, 3(3): 205-258.

[2] Brown D B, Carlin B I, Lobo M S. Optimal portfolio liquidation with distress risk[J]. Management Science, 2010, 56(11):1997-2014.

[3] Chen J N. Optimal liquidation of financial derivatives[J]. Finance Research Letters, 2020, 34: 101233.

[4] Sias R W, Starks L T, Titman S. The price impact of institutional trading[EB/OL]. (2001-09-19)[2022-10-12]. https://papers. ssrn. com/sol3/papers. cfm? abstract_id=283779.

[5] Pardalos P M, Vavasis S A. Quadratic programming with one negative eigenvalue is NP-hard[J]. Journal of Global Optimization, 1991, 1(1): 15-22.

[6] Ye Y Y. Approximating quadratic programming with bound and quadratic constraints[J]. Mathematical Programming, 1999, 84(2): 219-226.

[7] 丁晓东, 肖琳灿, 罗和治. 带边际风险控制的投资组合问题的半定规划松弛[J]. 浙江工业大学学报, 2017, 45(1): 64-68.

[8] 章显业, 罗和治. 带凸二次约束非凸二次规划的双非负规划松弛及其解法[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版), 2022, 47(4): 601-607.

[9] Luo H Z, Bai X D, Peng J M. Enhancing semidefinite relaxation for quadratically constrained quadratic programming via penalty methods[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 180(3): 964-992.

[10] Zheng X J, Sun X L, Li D. Convex relaxations for nonconvex quadratically constrained quadratic programming: matrix cone decomposition and polyhedral approximation[J]. Mathematical Programming, 2011, 129(2): 301-329.

[11] Zheng X J, Sun X L, Li D. Nonconvex quadratically constrained quadratic programming: best D. C. decompositions and their SDP representations[J]. Journal of Global Optimization, 2011, 50(4): 695-712.

[12] Eltved A, Burer S. Strengthened SDP relaxation for an extended trust region subproblem with an application to optimal power flow[J]. Mathematical Programming, 2022: 1-26.

[13] Azuma G, Fukuda M, Kim S, et al. Exact SDP relaxations of quadratically constrained quadratic programs with forest structures[J]. Journal of Global Optimization, 2022, 82(2): 243-262.

[14] Zymler S, Kuhn D, Rustem B. Worst-case value at risk of nonlinear portfolios[J]. Management Science, 2013, 59(1): 172-188.

[15] Saxena A, Bonami P, Lee J. Convex relaxations of non-convex mixed integer quadratically constrained programs: projected formulations[J]. Mathematical Programming, 2011, 130(2): 359-413.

(责任编辑:康 锋)