浙江理工大学学报,第51卷,第2期,2024年3月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2024.02.015

P-Frobenius 问题与 p-对称数值半群

应皓天,小松尚夫
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要:针对 p-Frobenius 问题中出现的非对称性问题,利用数值半群理论以及 Apery 集等工具研究了 p-Frobenius 问题对应的 p-对称数值半群。首先利用数值半群和 Apery 集等工具对 p-Frobenius 问题进行预处理,得到了对应数值半群和 Apery 集的各个变量;并将这些变量与对称数值半群和 Frobenius 问题进行对比,由此定义了 p-对称数值半群,并给出了 p-对称性的刻画。在此基础上,首先给出了两大类 p-对称数值半群,其次研究了对称数值半群与 p-对称数值半群的 p 化关联性。这两类 p-对称数值半群给出了大量具体实例,而 p 化关联性则可用于处理 p-Frobenius 问题中出现的非对称问题。

关键词:数值半群;线性丢番图方程;Apery 集;对称性;Frobenius 问题

中图分类号:O156.7　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2024) 03-0265-06

引文格式:应皓天,小松尚夫. P-Frobenius 问题与 p-对称数值半群[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2024,51(2):265-270.

Reference Format: YING Haotian, TAKAO Komatsu. P-Frobenius problem and p-symmetric numerical semigroup [J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University,2024,51(2):265-270.

P-Frobenius problem and p-symmetric numerical semigroup

YING Haotian, TAKAO Komatsu
(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to deal with the non-symmetry in p-Frobenius problem, we use the theory of numerical semigroup and Apery set to research the corresponding p-symmetric numerical semigroup. We first use the numerical semigroup and the Apery set as tools to get all kinds of variables of the p-Frobenius problem in advance, then we compare these results with the symmetric numerical semigroup and Frobenius problem. Then we can define the p-symmetric numerical semigroup and obtain its properties. On the base of these properties, we find two kinds of p-symmetric numerical semigroup and then research the relationship between the symmetric numerical semigroup and the p-symmetric numerical semigroup. These two kinds of p-symmetric numerical semigroups give lots of examples and the properties can do help to research the non-symmetry in p-Frobenius problem.

Key words: numeical semigroup; linear Diophantine equation; Apery set; symmetry; Frobenius problem

0　引　言

线性丢番图 Frobenius 问题是数论中的一个经典的古老问题,是由 Ferdinand Frobenius 于20世纪初提

收稿日期:2022—09—26　　网络出版日期:2022—12—05
作者简介:应皓天(1993—　),男,杭州人,硕士研究生,主要从事数论方面的研究。
通信作者:小松尚夫,E-mail:komatsu@zstu.edu.cn

出的。令$\{a_1,\cdots,a_m\}$为一组给定的非负整数组,考虑线性丢番图方程$a_1r_1+\cdots+a_mr_m=n$是否存在正整数解,其中:n为给定自然数,r_i为正整数未知元。当n足够大时,这样的方程一定有正整数解,也称n可由$\{a_1,\cdots,a_m\}$表示。Frobenius问题就是寻找不能由该给定的非负整数组所表示的最大自然数的问题,而这个最大自然数则被称为Frobenius数,记为$g(a_1,\cdots,a_m)$。

Assi等[1]提出,所有可由$\{a_1,\cdots,a_m\}$所表示的自然数的集合其实就是一个由$\{a_1,\cdots,a_m\}$生成的数值半群,且$g(a_1,\cdots,a_m)$恰好就是该数值半群的Frobenius数,所以研究Frobenius问题等价于研究一个特殊的数值半群。目前研究数值半群的核心课题之一就是研究对称数值半群,因为所有数值半群都可以进行不可约分解,因此研究一般数值半群的性质可简化为研究不可约数值半群的性质,而不可约数值半群一定是对称数值半群或拟对称数值半群。以上分解可参见Rosales等[2]文献。

在Frobenius问题的基础上,进一步考虑解的数目,Komatsu[3]研究了推广的p-Frobenius数。令$\{a_1,\cdots,a_m\}$为一组给定的非负整数组,考虑可由$\{a_1,\cdots,a_m\}$所表示且其表示方法至少有p种的自然数所组成的集合,称该集合为p化数值半群。该p化数值半群的Frobenius数被称为p-Frobenius数,其恰好等于不能被至少p种$\{a_1,\cdots,a_m\}$所表示的最大自然数,而这样的问题被称为p-Frobenius问题。研究Frobenius问题及其对应数值半群,一般会先对对应数值半群进行不可约分解,再研究该数值半群的对称性。然而事实上,对称数值半群在p化后得到的p化数值半群却不一定保持对称性,因此难以利用以往的对称数值半群相关性质来研究和分解一般的p化数值半群。

为了研究p化数值半群的的不对称性,本文利用数值半群与Frobenius问题的密切联系,以及Apery集等工具研究p化数值半群,将对称数值半群的定义进行了p化推广,从而定义p-对称数值半群并研究了其相关性质。在此基础上,给出了两类p-对称数值半群,并得到对称数值半群与p-对称数值半群的p化关联性。这两类p-对称数值半群给出了大量具体实例,而p化关联性可解决p-Frobenius问题中出现的难以处理的非对称问题。

1 p-对称数值半群的定义及其性质

1.1 p-对称数值半群的定义

给定一组非负整数$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$且$a_1<\cdots<a_m$,记其生成的数值半群为$S(A)$,记其Frobenius数为$g(A)$,记其对应p化数值半群为$S_p(A)$,记p化数值半群的Frobenius数为$g_p(A)$。

一个数值半群$S(A)$被称为是对称的,如果它满足:对一切不属于$S(A)$的整数x有$g(A)-x\in S(A)$。

对每个$k\in S(A)^*:=S(A)\backslash\{0\}$,定义$k$相关Apery集为:

$$Ape(S(A);k):=\{s\in S(A)\mid s-k\notin S(A)\}=\{m_0,m_1,\cdots,m_{k-1}\}。$$

其中:m_i为$S(A)$中满足$m_i\equiv i(\mathrm{mod}k)$的最小元素;第一个等号后为Apery集的第一种定义;第二个等号后为第二种定义。以上两种定义等价,详细证明可参见文献[4]。由第二种定义,显然$Ape(S(A);k)$恰好含有k个元素;特别地,令$k=a_1$时,记$Ape(S_p(A);a_1)$中最小的元素为$l_0(p)$。

一个p化数值半群$S_p(A)$被称为是p-对称的,如果它满足:对一切不属于$S_p(A)$的整数x有$l_0(p)+g_p(A)-x\in S_p(A)$。注意到当$p=0$时有$l_0(p)=0$,所以$p$-对称数值半群包含了对称数值半群,是对称数值半群的p化推广。

例1 令$A=\{3,10,17\}$,则$S_1(A)=\{20,23,26,27,29,30,32,33,\cdots\}$,其中$\cdots$表示之后的整数都属于$S_1(A)$。故$l_0(1)=20$,$g_1(A)=31$,由定义易知$S_1(A)$是1-对称的。$S_2(A)=\{30,33,36,37,39,40,42,43,\cdots\}$,故$l_0(2)=30$,$g_2(A)=41$,由定义易知$S_2(A)$是2-对称的。$S_3(A)=\{40,43,46,47,49,50,\cdots\}$,故$l_0(3)=40$,$g_3(A)=48$,由于$44\notin S_3(A)$且$44+44=88=l_0(3)+g_3(A)$,故$S_3(A)$不是3-对称的。

1.2 p-对称数值半群的性质

令$G_p(A)$为所有不属于$S_p(A)$的整数的集合。由p-对称数值半群的定义显然有:

引理1 给定一个p化数值半群$S_p(A)$,以下条件等价:

a)$S_p(A)$是p-对称的;

b) $\#(S_p(A)\cap\{l_0(p),l_0(p)+1,\cdots,g_p(A)\})=\#(G_p(A)\cap\{l_0(p),\cdots,g_p(A)\})=\dfrac{g_p(A)-l_0(p)+1}{2}$;

c)若 x,y 为非负整数且满足 $x+y=l_0(p)+g_p(A)$,则 x,y 其中一个属于 $S_p(A)$ 而另一个属于 $G_p(A)$。

令 K 为任意代数闭域,$S_p^0(A)\coloneqq S_p(A)\cup\{0\}$,$R_0\coloneqq K[[t^s\mid s\in S_p^0(A)]]$,$\overline{R_0}$ 为 R_0 的整闭包,f 为 $t^{l_0(p)}R_0$ 到 R_0 的导子,$c_p=g_p(A)+1$。由于 R_0 是数值半群 $S_p{}^0(A)$的对应环,它是一个离散赋值环,以上环相关性质可参见文献[5-6],记其赋值为 v。

引理 2　$f=\{x\in\overline{R_0}\mid v(x)\geqslant c_p+l_0(p)\}$。

证明　一方面,对任意 $x\in f$ 和 $r\in\overline{R_0}$ 有 $rx\in t^{l_0(p)}R_0$,所以 $v(rx)=v(x)+v(r)\in v(t^{l_0(p)}R_0)$。因此 x 可以写成 $x=t^{l_0(p)}+x'$,从而有 $v(r)+v(t^{l_0(p)})+v(x')\in v(t^{l_0(p)}R_0)=v(R_0)+v(t^{l_0(p)})$。由 r 的任意性以及 $v(r)\geqslant 0$ 可得 $v(x)\geqslant c_p+l_0(p)$,即 $f\supseteq\{x\in\overline{R_0}\mid v(x)\geqslant c_p+l_0(p)\}$。

另一方面,对任意满足 $v(x)\geqslant c_p+l_0(p)$的 $x\in\overline{R_0}$,存在 $r\in t^{l_0(p)}R_0\subseteq R_0$ 使得 $v(x)=v(r)$。那么对任意的 $r'\in R_0$,有 $v(xr')=v(x)+v(r')=v(r)+v(r')\geqslant c_p+l_0(p)$。又由于 $g_p(A)$为最大的不属于 $S_p(A)$的整数且 $c_p=g_p(A)+1$,得到 $xr'\in t^{l_0(p)}R_0$,所以有 $f\subseteq\{x\in\overline{R_0}\mid v(x)\geqslant c_p+l_0(p)\}$。

综上所述,$f=\{x\in\overline{R_0}\mid v(x)\geqslant c_p+l_0(p)\}$。

证毕。

现令 d_1 为 R_0/f 的理想链长度,令 d_2 为 $\overline{R_0}/f$ 的 R_0-子模链长度,令 d_3 为 $S_p(A)\cap\{1,2,\cdots,c_p+l_0(p)-1\}$中元素的个数。

定理 1　p 化数值半群 $S_p(A)$是 p－对称的,当且仅当 $2d_1=d_2$。

证明　由于 $l_0(p)$是令 $k=a_1$ 时的特殊 a_1 相关 Apery 集中的最小元素,同时根据 Apery 集的第一种定义以及 a_1 为 A 中最小元素,可知$\{1,2,\cdots,l_0(p)-1\}\subseteq G_p(A)$。由 $g_p(A)$是 p 化数值半群的 Frobenius 数,知$\{g_p(A)+1,\cdots,l_0(p)+g_p(A)-1\}\subseteq S_p(A)$。故由引理 1 可得,$S_p(A)$是 p－对称的当且仅当 $d_3=\dfrac{l_0(p)+g_p(A)-1}{2}$。

一方面,将 $S_p(A)\cap\{1,2,\cdots,c_p+l_0(p)-1\}$中元素按升序指标排列,由上段末的当且仅当结果可知,当 $S_p(A)$是 p－对称时,当且仅当上述交集恰有 d_3 个元素,记为 $v_1<v_2<\cdots<v_{d_3}$。由引理 2 可知,存在理想链 $R_0\supset R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_{d_3}\supset f$,其中:$R_i=\{r\in R_0\mid v(r)\geqslant v_i\}$。将任意赋值为 v_i 的元素 $r\in R_0$ 添加到 R_i 中,可得 R_{i-1},所以理想链 $R_0\supset R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_{d_3}\supset f$ 是极大的,由此 $d_1=d_3+1$。

另一方面,类似可证 $S_p(A)$是 p-对称时 $\overline{R_0}=b_0\supset b_1\supset\cdots\supset b_{l_0(p)+g_p(A)+1}=f$ 为 $\overline{R_0}/f$ 的极大 R_0-子模链,其中:$b_i=\{r\in\overline{R_0}\mid v(r)\geqslant i\}$。因此,$d_2=l_0(p)+g_p(A)+1$。

综上,$S_p(A)$是 p-对称的当且仅当 $d_1-1=\dfrac{d_2-2}{2}$。

证毕。

对于给定的一组非负整数 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$且 $a_1<\cdots<a_m$,令 $G(A)$为所有不属于 $S(A)$的整数的集合,记其所包含元素个数为 $n(A)$,称其为 A 的 Sylvester 数,记 $n_p(A)$为对应 p 化数值半群 $S_p(A)$的 Sylvester 数,称为 p-Sylvester 数。特别地,对于 a_1 相关 Apery 集 $Ape(S_p(A);a_1)$,由第二种定义,记其元素 $m_i{}^p$ 为 $S_p(A)$中满足 $m_i^p\equiv i(\bmod a_1)$的最小元素。

定理 2　p 化数值半群 $S_p(A)$是 p-对称的,当且仅当 $n_p(A)=\dfrac{l_0(p)+g_p(A)+1}{2}$。

证明　Punyani 等[7]给出了以下用 k 相关 Apery 集中元素表示的 Sylvester 数公式:

$$n(A)=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}m_i-\frac{k-1}{2}。$$

对于 p-Sylvester 数,利用 a_1 相关 Apery 集 $Ape(S_p(A);a_1)$中元素可得:

$$n_p(A)=\frac{1}{a_1}\sum_{i=0}^{a_1-1}m_i^p-\frac{a_1-1}{2}。$$

等号两边同乘 2,并将右边的第一项求和中的 m_i^p 重新排序组合后求和,可得:

$$2n_p(A)=\frac{2}{a_1}\sum_{i=0}^{a_1-1}(m^p_{i+(l_0(p)+g_p(A)+1)/2}+m^p_{i+(l_0(p)+g_p(A)-1)/2})-a_1-1。$$

由 m_i^p 是 $S_p(A)$中满足 $m_i^p\equiv i(\bmod a_1)$的最小元素可知,当 p 化数值半群 $S_p(A)$是 p-对称的,当且仅当 $m^p_{i+(l_0(p)+g_p(A)+1)/2}+m^p_{i+(l_0(p)+g_p(A)-1)/2}=l_0(p)+g_p(A)+a_1$,代入上式后有:

$$2n_p(A)=\frac{2}{a_1}\sum_{i=0}^{a_1-1}(l_0(p)+g_p(A)+a_1)-a_1-1=l_0(p)+g_p(A)+1。$$

最后等号两边同除 2。

证毕。

2 两类 p-对称数值半群及其 p 化关联性

本节将给出两大类 p-对称数值半群,并研究这两类 p-对称数值半群与其初始数值半群之间的 p 化关联性。首先,采用标准表示研究二元情形下的一类 p-对称数值半群及其 p 化关联性,然后利用定理 2 来研究三元特殊情形下的一类 p-对称数值半群及其 p 化关联性。

2.1 二元情形

对于二元情形 $A=\{a,b\}$,若 a,b 不互素,设其最大公约数为 d,则其对应数值半群 $S(A)$中的元素是 $A'=\left\{\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right\}$对应数值半群 $S(A')$中元素的 d 倍。再由 Frobenius 数和 Sylvester 数的定义,显然 $g(A)$,$n(A)$是 $g(A')$,$n(A')$的 d 倍,所以不互素情形都可以约化成互素情形,故以下只考虑 $A=\{a,b\}$且 a,b 互素的情形。本节先证明,在二元情形下,一切 p 化数值半群都是 p-对称数值半群,再给出此情形下对称数值半群与 p-对称数值半群间的 p 化关联性。

不妨设 $a<b$。对于一切整数 $n\in S_p(A)$,令 x_0 为满足整数方程 $n=ax+by(y\geqslant 0)$的最大整数 x,则存在 y_0 使得 $n=ax_0+by_0$,称该形式为 n 的标准表示。由于整数是欧几里得整环,故该标准表示唯一。

引理 3 对于 n 的标准表示 $n=ax_0+by_0$ 有:

a)$0\leqslant y_0\leqslant a-1$;

b)对于任意整数 $n\in S(A)$,$n\in S_p(A)$当且仅当 $x_0\geqslant pb$。

证明 a)如若不然,则 $y_0<0$ 或 $y_0\geqslant a$。$y_0<0$ 不满足方程 $n=ax+by(y\geqslant 0)$中 y 的要求,而 $y_0\geqslant a$ 时 x 不是最大所求整数。故假设不成立因此 $0\leqslant y_0\leqslant a-1$。

b)先证明充分性。如若不然,则有 $n=ax_0+by_0$ 且 $x_0<pb$。由于 $x_0-pb<0$,故 $n=ax_0+by_0=a(x_0-b)+b(y_0+a)=\cdots=a(x_0-(p-1)b)+b(y_0+(p-1)a)$至多只有 p 种表示,但 $n\in S_p(A)$要求 n 至少有 $p+1$ 种表示,矛盾。故假设不成立,充分性得证。

再证明必要性。由 $x_0\geqslant pb$,$n=ax_0+by_0=a(x_0-b)+b(y_0+a)=\cdots=a(x_0-(p-1)b)+b(y_0+(p-1)a)=a(x_0-pb)+b(y_0+pa)$,则 n 至少有 $p+1$ 种表示,故 $n\in S_p(A)$。

证毕。

定理 3 对一切非负整数 p,给定 $A=\{a,b\}$且 a,b 互素,则 $S_p(A)$是 p-对称的。

证明 由引理 3,$S_p(A)$中最小元素为 pab 且其后 $ab-1$ 个元素可按如下排列:

$$\begin{pmatrix} pab & \cdots & pab+(a-1)b \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ pab+(b-1)a & \cdots & pab+(a-1)b+(b-1)a \end{pmatrix},$$

其中纵向逐行增加 a，横向逐列增加 b。注意到从 $pab+ab-a-b+1$ 开始，所有整数都属于上述排列，故属于 $S_p(A)$。由定义易得 $g_p(A)=pab+ab-a-b$。

此外，在此情形下有 $k=a_1=a$，故由定义知 $l_0(p)=pab$。

由 Komatsu 等[8]的结果，有以下关于二元情形的 p-Sylvester 数公式：

$$n_p(A)=pab+\frac{(a-1)(b-1)}{2}。$$

故有 $g_p(A)+l_0(p)+1=pab+ab-ab-pab+1=2pab+(a-1)(b-1)=2n_p(A)$，由定理 2 知，此时 $S_p(A)$是 p-对称的。

证毕。

特别地，由 Assi 等[1]可知，$A=\{a,b\}$且 a,b 互素时，对应数值半群 $S(A)$都是对称的，故有以下关于对称数值半群与 p-对称数值半群的 p 化关联性的推论：

推论 1　对于二元情形 $A=\{a,b\}$且 a,b 互素，所有对称数值半群 $S(A)$在 p 化后变为 p-对称数值半群 $S_p(A)$。

2.2　三元等差数列情形

对于高维一般情形，无论是 Frobenius 问题还是对应数值半群，相关研究都十分困难，目前许多文献都研究一些特殊情形下的性质，如 Marin 等[9]研究了 Fibonacci 数列情形，Robles-Pérez 等[10]研究了三角形和四面体情形，Rosales 等[11]研究了纯元数组情形。本节主要研究三元等差数列情形，先给出一类 p-对称数值半群，再研究其 p 化关联性。

定理 4　令 a 为大于等于 3 的偶数，d 为大于 0 的整数且 a,d 互素，$A=\{a,a+d,a+2d\}$，则当 $p=a/2-1$ 时 $S_p(A)$是 p-对称的。

证明　由 $l_0(p)$的定义可知，当 a 为偶数，$p=a/2-1$ 时，$l_0(p)=2p(a+d)$。此外，Robles-Pérez 等[12]给出了三元等差数列情形下关于 p-Frobenius 数和 p-Sylvester 数的公式：

$$g_p(A)=(a+2d)p+\left[\frac{a-2}{2}\right]+(a-1)d；$$

$$n_p(A)=\begin{cases}(2a+2d-1-p)p+\dfrac{(a-1)(a+2d-1)}{4}, & a\text{ 为奇数；}\\[2ex] (2a+2d-1-p)p+\dfrac{(a-1)(a+2d-1)+1}{4}, & a\text{ 为偶数，}\end{cases}$$

其中：[]表示取整。

根据定理 2 可知，当 a 为偶数且 $p=a/2-1$ 时有：$g_p(A)+l_0(p)+1=(a+2d)p+\dfrac{a-2}{2}+(a-1)d+2p(a+d)=(4a+4d-2-p)p+\dfrac{(a-1)(a+2d-1)+1}{2}=2n_p(A)$，故此时 $S_p(A)$是 p-对称的。

证毕。

特别地，由 Binner[13]知，a 为偶数，d 为大于 0 的整数，且 a,d 互素，$A=\{a,a+d,a+2d\}$时，此时数值半群 $S(A)$是对称的，故有以下推论：

推论 2　令 a 为大于等于 3 的偶数，d 为大于 0 的整数且 a,d 互素，$A=\{a,a+d,a+2d\}$，则当 $p=a/2-1$ 时，对称数值半群 $S(A)$在 p 化后是 p-对称的。

此外，当 $p=a/2-1$ 时，难以求得 $l_0(p)$，故无法利用上述方法考察 $S_p(A)$的 p-对称性及其 p 化关联性，但是通过计算和计算机辅助考察了许多例子后发现，$S_p(A)$也是 p-对称的。而且这种情况不仅存在于三元等差数列情形，经实验还发现，一般的高维对称数值半群在 p 化后仍保持 p-对称，故本文猜测，一切对称数值半群在 p 化后是 p-对称的。

例 2　令 $A=\{4,5,6\}$，则 $S_8(A)=\{36,38,40,41,\cdots\}$，此时 $p=8\neq\dfrac{a}{2}-1$ 且 $l_0(8)=36$，$g_8(A)=39$，由定义可验证 $S_8(A)$是 8-对称的。

3 结 论

本文利用数值半群理论以及 Apery 集等工具,研究了 p-Frobenius 问题以及 p-对称数值半群。通过链长度和 Sylvester 数等数值半群不变量,给出了 p-对称数值半群的两种等价刻画,并以此为基础研究了二元情形与三元等差数列情形,找到了两大类 p-对称数值半群。在这两种特殊情形下证明,对称数值半群在 p 化后会变为 p-对称数值半群;但对一般的高维情形,难以给出严格的数学证明。在这些基础之上,可继续研究一些特殊的情形,发现更多的 p-对称数值半群及其性质,以助于研究一般高维情形的 p-对称性。

参考文献:

[1] Assi A, D'Anna M, García-Sánchez P A. Numerical Semigroups and Applications[M]. Cham: Springer International Publishing, 2020:138.

[2] Rosales J C, Garcia-Sanchez P A. Numerical Semigroups[M]. New York: Springer-Verlag, 2009:181.

[3] Komatsu T. On the number of solutions of the Diophantine equation of Frobenius-general case[J]. Mathematical Communications, 2003,2(8):195-206.

[4] Apery R. Sur les branches superlineaires des courbes algebriques[J]. Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences, 1946, 222(21):1198-1200.

[5] Watanabe K. Some examples of one dimensional Gorenstein domains[J]. Nagoya Mathematical Journal, 1973, 49: 101-109.

[6] Kunz E. The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1970, 25(4): 748-751.

[7] Punyani P, Tripathi A. On changes in the Frobenius and Sylvester numbers[J]. Integers, 2018, 18B: A8.

[8] Komatsu T, Zhang Y. Weighted Sylvester sums on the Frobenius set[J]. Irish Mathematical Society Bulletin,2021, 87: 35-44.

[9] Marin J M, Alfonsín J L, Revuelta M P. On the Frobenius number of Fibonacci numerical semigroups[J]. Integers, 2007 (14A): 7-13.

[10] Robles-PérezA M, Rosales J C. The Frobenius number for sequences of triangular and tetrahedral numbers[J]. Journal ofNumber Theory, 2018, 186: 473-492.

[11] Rosales J C, Branco M B, Torrão D. The Frobenius problem for repunit numerical semigroups[J]. The Ramanujan Journal, 2016, 40(2): 323-334.

[12] Robles-Pérez A M, Rosales J C. The Frobenius problem for numerical semigroups with embedding dimension equal to three[J]. Mathematics of Computation, 2012, 81(279): 1609-1617.

[13] Binner D S. The number of solutions to $ax+by+cz=n$ and itsrelation to quadratic residues[J]. Journal of Integer Sequences, 2020, 23:206-225.

(责任编辑:康 锋)