



坐标变换下平面解析系统单值轨道的不变性

郭 春,黄土森

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要: 为了研究平面解析系统在何种坐标变换下单值轨道具有不变性,首先给出平面解析系统的轨线沿固定方向进入奇点的两个定义,并证明了它们是等价的;其次引入判别轨线沿固定方向进入奇点的一个充要条件,得到平面解析系统在非正则变换下系统轨道可以具有不同的单值性;最后通过对平面解析系统做正则变换,证明了变换前后的系统轨线具有相同的单值性。该结果对研究平面解析系统单值轨道的不变性具有参考价值。

关键词: 平面解析系统;轨线;奇点;单值性问题;正则坐标变换

中图分类号: O175.14

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2023)11-0775-09

引文格式: 郭春,黄土森. 坐标变换下平面解析系统单值轨道的不变性[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2023,49(6):775-783.

Reference Format: GUO Chun, HUANG Tusen. Invariance of monodromic orbits of planar analytic system under coordinate transformation[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University,2023,49(6):775-783.

Invariance of monodromic orbits of planar analytic system under coordinate transformation

GUO Chun, HUANG Tusen

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to study the invariance of monodromic orbits under which coordinate transformation of planar analytic system, firstly, two definitions of orbits of planar analytic system entering singular point along a fixed direction are given, and they are proved to be equivalent. Secondly, a necessary and sufficient condition for discriminating that orbits enter singular point along a fixed direction is introduced, and it is obtained that the orbits for the planar analytic system and the associated system under non-regular coordinate transformation have a different monodromy. Finally, by making a regular coordinate transformation on the planar analytic system, it is proved that the orbits for the planar analytic system and the associated system have the same monodromy. The result can provide a reference for studying the invariance of monodromic orbits of planar analytic system.

Key words: planar analytic system; orbit; singular point; monodromy problem; regular coordinate transformation

0 引 言

非线性微分方程出现在应用科学的许多分支中,而中心与焦点的区分问题(简称中心问题或稳定性问

收稿日期:2022-09-15 网络出版日期:2022-12-05

基金项目:国家自然科学基金项目(11671359,11672270)

作者简介:郭 春(1998—),女,河南南阳人,硕士研究生,主要从事微分方程定性理论方面的研究。

通信作者:黄土森,E-mail:huangtusen@sina.com

题)是平面微分系统定性理论中尚未完全解决的经典问题之一^[1]。

在中心问题中,首先要确定系统的奇点是否为单值的,即在该点的某邻域中是否可以定义 Poincaré 第一返回映射^[2];然后进一步确定它是中心还是焦点。对平面解析系统而言,如果有轨线进入奇点,那么只能螺旋形进入或沿固定方向进入^[3],当系统没有轨线沿固定方向进入奇点,则该奇点只能是单值奇点。因此人们可以根据系统有无轨线沿固定方向进入奇点研究单值性问题。

当奇点的线性化矩阵不恒为零时,单值性问题已经完全解决;当线性化矩阵的特征值是一对共轭复数(本文称这样的奇点为简单奇点)时,单值性问题由 Poincaré^[4]解决;当线性化矩阵是幂零矩阵(本文称这样的奇点为幂零奇点)时,单值性问题由 Andreev^[5]解决;当线性化矩阵恒等于零(本文称这样的奇点为线性零奇点)时,单值性问题的研究要困难很多,目前学界仍然没有完全解决。目前判别中心和焦点的一种常用方法是 Blow-up 技术^[6],它通过对这样的系统在线性零奇点附近做一系列变量变换,把奇点变为一个不可定向曲面上的一条封闭曲线,进而只需研究其上的简单奇点或幂零奇点,再通过反变换得到原系统线性零奇点的单值性。然而,为确定参数比较多的平面线性零奇点单值性,一方面 Blow-up 技术过程就会变得十分繁杂;另一方面,每一次变量变换前后两个系统的单值性有可能发生了改变(见例 1)。正因为如此,使用 Blow-up 技术研究线性零奇点单值性仅仅取得了部分结果^[7-9]。较好的结果是 Algaba 等^[10]给出的一种新算法,这种算法虽然繁杂,但还是能有效地确定形式比较简单的线性零奇点的单值性。

坐标变换是研究系统奇点单值性的另外一个有力工具,其基本思想是通过坐标变换,将平面解析系统化简为更简单的形式,特别是可以减少系统中一些不起作用的参数的项,使得变换后的系统在形式上更为简单,从而能更好地解决问题。例如正规形理论^[11]就是一种典型的工具,它通过寻找合适的近恒等变量变换,在形式上尽可能多地消去一些不影响系统定性结构的参数,简化系统以方便研究^[12-15]。针对平面解析系统奇点单值性的判定,人们自然希望经过坐标变换,不但要把系统变得简单,而且还应保持变换前后两个系统的对应奇点具有相同的单值性。然而,事实并非如此:连续且可逆的坐标变换(即拓扑变换)或可微但不可逆的坐标变换(比如 Blow-up 技术中的变换),都可以把一个非单值奇点变为单值奇点,或反之。

本文研究平面解析系统在不同坐标变换下单值轨道的不变性。首先,用两个实例说明系统在非正则变换下,变换前后系统的轨道的单值性是不同的;其次,在正则变换下,将变换表达式的非线性部分表示为积分形式,结合微分定义得到轨线函数的极限存在,从而证明了坐标变换是正则时,能够实现经过坐标变换,使得变换前与变换后的两个系统的对应奇点具有相同的单值性,这为中心焦点的判别问题提供了一定的理论依据。

1 预备知识

对于平面解析系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = Y(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

设 $X(0,0)=Y(0,0)=0$;且当 $0<x^2+y^2<<1$ 时,有 $X^2(x,y)+Y^2(x,y)\neq 0$,即点 $O(0,0)$ 是系统(1)的一个孤立奇点;又设 $X(x,y),Y(x,y)$ 在原点 O 的某邻域 $S_\delta(O)$ 内解析。

令

$$L: x=x(t), y=y(t)$$

是系统(1)的一条轨线,并设当 $t\rightarrow +\infty$ (或 $t\rightarrow -\infty$) 时,它趋于奇点 $O(0,0)$ 。

下面仅研究 $t\rightarrow +\infty$ 时的情形,否则只需把 t 换成 $-t$ 即可。

定义 1 令 $OM(t)$ 是从 O 点出发且经过轨线 L 上一点 $M(t)=(x(t),y(t))$ 的一条射线。如果当 $t\rightarrow +\infty$ 时射线 $OM(t)$ 趋于一个确定的极限位置 OM^* ,则称轨线 L 以确定的方向 θ^* 趋于奇点 O ,其中 θ^* 是 x -轴正向与射线 OM^* 的夹角。

定义 1 中的轨线 L 如图 1 所示。角 θ^* 可以相差 2π 的整数倍。通常根据需要,限制 $0\leq \theta^* < 2\pi$ 或 $-\pi \leq \theta^* < \pi$ 。

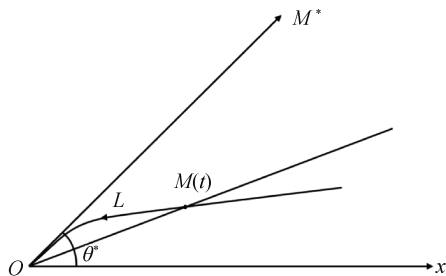


图1 定义1中的轨线L

轨线沿固定方向进入奇点的一个等价定义如下。

定义2 设 L 是系统(1)趋于奇点 O 的一条轨线。如果对任意的 $\varepsilon > 0$, L 上对应于充分大的 t 的点都位于由射线 $\theta = \theta^* - \varepsilon$ 与 $\theta = \theta^* + \varepsilon$ 界定的并且包含 $\theta = \theta^*$ 的区域中;即 $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall t > T$, 使得 L 上点 $M(t) = (x(t), y(t))$ 位于射线 $\theta = \theta^* - \varepsilon$ 与 $\theta = \theta^* + \varepsilon$ 界定的并且包含 $\theta = \theta^*$ 的区域中, 则称轨线 L 以确定的方向 θ^* 趋于奇点 O 。

定义2中的轨线 L 如图2所示。

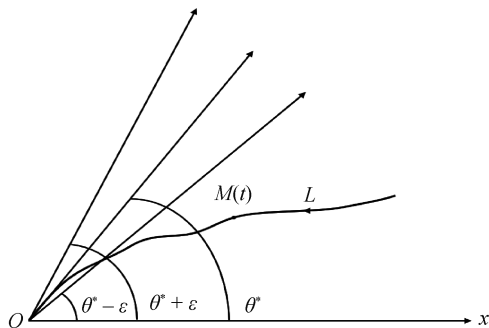


图2 定义2中的轨线L

定理1 定义1与定义2是等价的。

证明 定义1 \Rightarrow 定义2。

设射线 $OM(t)$ 与 x -轴正向的夹角为 θ , 因为当 $t \rightarrow +\infty$ 时射线 $OM(t)$ 趋于极限位置 OM^* , 且射线 OM^* 与 x -轴正向的夹角为 θ^* , 所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \theta^*$, 于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall t > T, |\theta - \theta^*| < \varepsilon$, 即 $\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon$, 从而轨线 L 上对于充分大的 t 的点 $M(t)$ 位于由射线 $\theta = \theta^* - \varepsilon$ 与 $\theta = \theta^* + \varepsilon$ 界定的并且包含 $\theta = \theta^*$ 的区域中, 因此轨线 L 以确定方向 θ^* 趋于奇点 O 。

定义2 \Rightarrow 定义1。

设 $M(t) = (x(t), y(t))$ 是轨线 L 上对应于时间 t 的一点, 则连接奇点 O 与 $M(t)$ 的割线的斜率为:

$$\tan \theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}.$$

因为 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \theta^*$ 存在, 这恰好表明, 以 $\tan \theta^*$ 为斜率的射线 OM^* 是割线 $OM(t)$ 当点 $M(t)$ 沿轨线趋于奇点 O (即 $t \rightarrow +\infty$) 时的极限位置。

证毕。

文献[3]还给出了轨线沿固定方向进入奇点的另外一个等价定义, 即定义3。

定义3 设 L 是系统(1)的轨线, 点 $A(r, \theta)$ (点 $M(t)$ 的极坐标表示) 是 L 上的动点。若当 $r \rightarrow 0$ 时, 有 $\theta \rightarrow \theta_0$, 则轨线 L 叫做沿固定方向 $\theta = \theta_0$ 进入奇点 $O(0, 0)$ 。

下面给出系统轨线沿固定方向进入奇点的一个判定定理, 即引理1。为叙述方便, 本文用“正半轨线 L^+ 沿固定方向趋于奇点 O ”表示“当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 轨线 L 沿固定方向趋于奇点 O ”。

引理1 一条正半轨线 $L^+ : x = x(t), y = y(t), t \geq t_0$ 沿固定方向 θ^* 趋于奇点 O , 当且仅当 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \tan \theta^*$ 。

k^* 存在,其中 k^* 是一个有限数或 ∞ 。进一步成立关系式: $\tan\theta^*=k^*$ 。

证明 先证明必要性。必要性由定义 2 立即得到。

然后证明充分性。假设 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}=k^*$,其中 k^* 是一个有限数或 ∞ 。正半轨线 L^+ 如图 3 所示,过奇点 O 作斜率为 k^* 的直线 $M_1^*M_2^*$,并作过奇点 O 且与直线 $M_1^*M_2^*$ 的夹角分别为 $+\epsilon$ 和 $-\epsilon$ 的直线 A_1A_2 和 B_1B_2 ,其中 ϵ 是一个非常小的正数。因为 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}=k^*$,所以当 $t \rightarrow +\infty$ 时,直线 $OM(t)$ 趋于直线 $M_1^*M_2^*$ 。于是,正半轨线 L^+ 上对应于充分大的 t 的那一段位于直线 A_1A_2 和 B_1B_2 之间的区域中。但由轨线的唯一性,正半轨线 L^+ 实际上不“穿过”奇点 O ,所以正半轨线 L^+ 上的这一段或者完全位于区域 I (射线 OA_1 与 OB_1 之间)中,或者完全位于区域 II (射线 OA_2 与 OB_2 之间)中。因此,当 $t \rightarrow +\infty$ 时,射线 $OM(t)$ 趋于射线 OM_1^* 与 OM_2^* 中之一,且只有一条。

证毕。

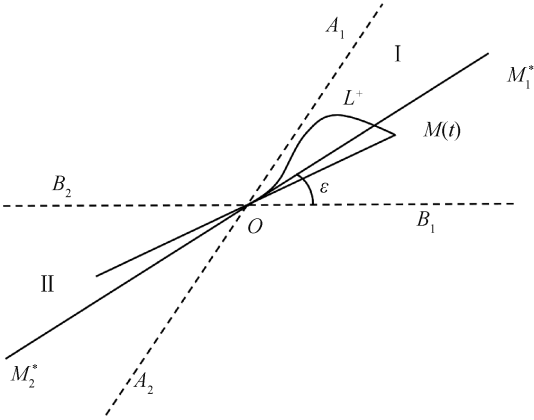


图 3 系统(1)的正半轨线 L^+

值得注意的是,只知道数 k^* ($k^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$) 还不足以确定正半轨线 L^+ 趋于奇点 O 的方向,因为存在两个方向(实际上是相反的方向)使得 $\tan\theta^*=k^*$,其中 $0 \leq \theta^* < 2\pi$ 。

在考虑线性零奇点时,人们经常称“轨线以斜率 k^* 趋于奇点”。这种说法适用于沿方向 θ^* 趋于奇点的轨线及沿方向 $\pi+\theta^*$ 趋于奇点的轨线,其中 $0 \leq \theta^* < 2\pi$,并且 $\tan\theta^*=k^*$ 。

当奇点是简单奇点时,正半轨线 L^+ 在奇点 O 存在切线,当且仅当正半轨线 L^+ 在点 $M(t)$ 的切线当 $t \rightarrow +\infty$ 时有极限位置,并且当存在极限位置时,两者是一样的,即有引理 2。

考虑系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=ax+by+\varphi(x,y), \\ \frac{dy}{dt}=cx+dy+\psi(x,y) \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,都称为 C^1 -类函数,(此时,系统(2)是 C^1 -类动力系统),并且它们以及所有一阶偏导数在原点 O 均为零。假设奇点 O 是简单奇点,即 $ad-bc \neq 0$ 。

引理 2 令系统(2)是 C^1 -类动力系统, O 是一个简单奇点,并且 $x=x(t),y=y(t)$ 是系统(2)趋于 O 的一条正半轨线,则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt}$ 有极限(有限或 ∞)当且仅当 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ 有极限(有限或 ∞);并且当它们存在时,极限是相等的,即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt}=\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ 。

证明 因为函数 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 以及它们的一阶偏导数在原点 O 均为零,所以 $\varphi(x,y)=o(\rho),\psi(x,y)=o(\rho)$,其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 。

先证明充分性。假设 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = k$, k 是有限数或 ∞ 。首先假设 k 是一个有限数, 因为奇点是孤立的, 所以对充分大的 t 使得 $x(t) \neq 0$ 。于是有:

$$\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt} = \frac{c + d \frac{y(t)}{x(t)} + \frac{\phi(x(t), y(t))}{\rho(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}}{a + b \frac{y(t)}{x(t)} + \frac{\varphi(x(t), y(t))}{\rho(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)^2}} \quad (3)$$

因为 $ad - bc \neq 0$, 所以 $c + dk$ 与 $a + bk$ 不能同时为零。若 $a + bk \neq 0$, 由式(3)知 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt}$ 存在并且等于 $\frac{c + dk}{a + bk}$ 。

如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$ 。从与前面类似的论证出发得到极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx(t)}{dt}$ 存在, 因此 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)}{dt}$ 也存在。于是证明了 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$ 存在性隐含 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt}$ 的存在性。

然后证明必要性。假设 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt} = k$, k 是有限数或 ∞ 。首先假设 k 是一个有限数, 显然 $\frac{dx(t)}{dt} \neq 0$, 即对充分大的 t , $\frac{dx(t)}{dt}$ 不能改变符号。于是对充分大的 t , $x(t)$ 是一个单调函数, 所以 $x = x(t)$ 存在反函数 $t = t(x)$, 从而在 origin 附近的正半轨线 L^+ 的函数可以写成 $y = y(x)$ 。因为对任意的 t , $x(t)$ 不可能为零, 所以函数 $y(x)$ 在 $x = 0$ 点没有定义。现延拓定义: 取 $y(0) = 0$, 则

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y(x)}{x} = \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = y'(\gamma x),$$

其中 $0 < \gamma < 1$ 。由此得到:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} y'(\gamma x) = k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt}.$$

如果 $k = \infty$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt} = 0$, 并且由上面的论证得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \infty$ 。

证毕。

对于系统(1), 如果仅满足解的存在唯一性条件, 特别地, 如果奇点 O 不是简单奇点, 则引理 2 的充分性一般是不成立的。

2 主要结果及其证明

对于系统(1), 为了研究奇点 O 是否是单值的, 人们采用的一种常用方法是通过做坐标变换化为简单的系统进行研究。

定义 4 设函数组

$$\begin{cases} u = f(x, y), \\ v = g(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

是定义在 xy 平面的某个区域 B 上, 取值在 uv 平面的区域 \widetilde{B} 上的两个函数, 对每一点 $P(x, y) \in B$, 由式(4)有 uv 平面上唯一的一点 $Q(u, v) \in \widetilde{B}$ 与之对应, 称式(4)确定了 B 到 \widetilde{B} 的一个映射(变换), 记作 T 。

定义 5 如果 T 是 B 到 \widetilde{B} 的一个一一映射, 并且 T 和 $T^{-1}: \widetilde{B} \rightarrow B$ 都是连续的, 则称 T 是一个拓扑映射(同胚)。

定义 6 如果 T 是一个同胚映射, 且 T 和 T^{-1} 是 C^r -光滑的, 其中 $r \geq 1$, 则称 T 是一个 C^r -微分同胚。如果 $r = \infty$, 则称 T 是一个无穷阶微分同胚; 如果 $r = \omega$, 则称 T 是一个解析同胚。进一步, 如果 T 在某

给定点 $P(x, y) \in B$ 的雅可比行列式非零, 则称 T 是该点的一个正则变换。

假设在式(4)的坐标变换下, 系统(1)变为:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = U(u, v), \\ \frac{dv}{dt} = V(u, v) \end{cases} \quad (5)$$

可以证明, 式(4)的坐标变换把系统(1)的每条轨线 $x=x(t), y=y(t)$ 变为系统(5)的轨线

$$\begin{cases} u = u(t) = f[x(t), y(t)], \\ v = v(t) = g[x(t), y(t)]. \end{cases}$$

那么, 如果 $(x, y) = (0, 0)$ 是系统(1)的奇点, 则 $(u, v) = (0, 0)$ 是系统(5)奇点; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 轨线 $x=x(t), y=y(t)$ 趋于奇点 $(x, y) = (0, 0)$, 则对应轨线 $u=u(t), v=v(t)$ 也趋于奇点 $(u, v) = (0, 0)$ 。如果式(4)的坐标变换是可逆的, 则上面的结论反之也成立。

现在研究当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 式(4)的坐标变换能否保证系统(1)与系统(5)对应的奇点具有相同的单值性。文献[16]定理 1.5 表明: 如果式(4)的坐标变换仅是同胚变换, 则系统(1)与系统(5)对应的奇点具有不同的单值性。下面的例子表明: 如果式(4)的坐标变换是可微但不可逆的变换, 则系统(1)与系统(5)对应的奇点也具有不同的单值性。

例 1 考虑下面的系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 - x^4 \end{cases} \quad (6)$$

若取变换 $x=u, y=uv$, 并令 $d\tau = u^2 dt$, 则系统(6)化为:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = v, \\ \frac{dv}{d\tau} = -u \end{cases} \quad (7)$$

对于系统(6)的奇点 $(x, y) = (0, 0)$, 存在当 $t \rightarrow +\infty$ 时沿固定方向进入该奇点的轨线, 即它是非单值的; 对于系统(7)的对应奇点 $(u, v) = (0, 0)$, 不存在当 $t \rightarrow +\infty$ 时沿固定方向进入该奇点的轨线, 即它是单值的(实际上是一个中心)。系统(6)与系统(7)的相图如图 4 所示。

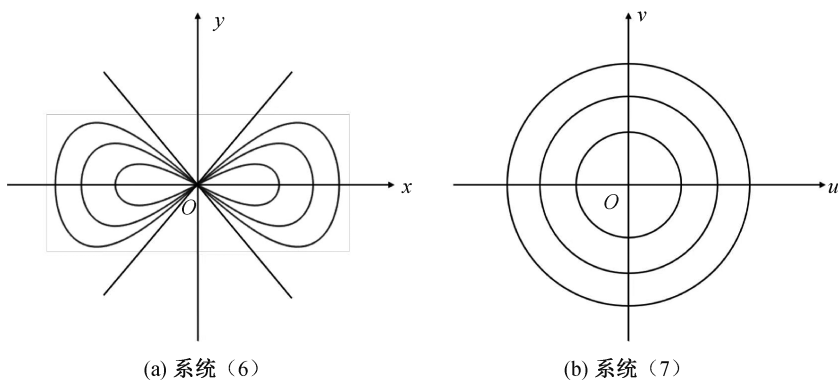


图 4 系统(6)与系统(7)的相图

定理 2 是本文的主要结果: 如果式(4)的坐标变换是正则变换, 则系统(1)和系统(5)的对应奇点具有相同的单值性。

定理 2 设式(4)的坐标变换是正则变换, 若系统(1)有轨线沿固定方向进入奇点, 则系统(5)也有轨线沿固定方向进入奇点。反之亦然。

证明 因为式(4)的坐标变换是正则变换, 所以它可写成如下形式:

$$\begin{cases} u = a_{10}x + a_{01}y + \varphi(x, y), \\ v = b_{10}x + b_{01}y + \psi(x, y) \end{cases} \quad (8)$$

其中: $\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0, \varphi_x(0, 0) = \varphi_y(0, 0) = \psi_x(0, 0) = \psi_y(0, 0) = 0$, 并且 $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} \neq 0$ 。

先把式(8)等号右边的函数 $\varphi(x, y)$ 和 $\psi(x, y)$ 表示成另一形式。记 $F(s) = \varphi(sx, sy)$, 则

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi(0, 0) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds。$$

于是:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_0^1 d\varphi(sx, sy) = \int_0^1 [\varphi_x(sx, sy)x + \varphi_y(sx, sy)y] ds \\ &= x \int_0^1 \varphi_x(sx, sy) ds + y \int_0^1 \varphi_y(sx, sy) ds = x\varphi_1(x, y) + y\varphi_2(x, y), \end{aligned}$$

其中: $\varphi_1(x, y) = \int_0^1 \varphi_x(sx, sy) ds, \varphi_2(x, y) = \int_0^1 \varphi_y(sx, sy) ds$ 。因为 $\varphi_x(0, 0) = \varphi_y(0, 0) = 0$, 所以 $\varphi_1(0, 0) = \int_0^1 \varphi_x(0, 0) ds = 0, \varphi_2(0, 0) = \int_0^1 \varphi_y(0, 0) ds = 0$, 因此,

$$u = a_{10}x + a_{01}y + x\varphi_1(x, y) + y\varphi_2(x, y)。$$

同理可证,

$$v = b_{10}x + b_{01}y + x\psi_1(x, y) + y\psi_2(x, y)。$$

设系统(1)的轨线 $x = x(t), y = y(t)$ 当 $t \rightarrow +\infty$ 时沿固定方向趋于奇点 $(x, y) = (0, 0)$ 。由引理 1 知,

可设 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = k^*$, 其中 k^* 是有限数或 ∞ 。对于 k^* 是有限数情形, 因为 $a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10} \neq 0$, 所以 $a_{10} + a_{01}k^*$ 与 $b_{10} + b_{01}k^*$ 是不能同时为零的有限数。若 $a_{10} + a_{01}k^* \neq 0$, 则系统(5)的对应轨线满足:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{v(t)}{u(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b_{10}x(t) + b_{01}y(t) + x(t)\psi_1[x(t), y(t)] + y(t)\psi_2[x(t), y(t)]}{a_{10}x(t) + a_{01}y(t) + x(t)\varphi_1[x(t), y(t)] + y(t)\varphi_2[x(t), y(t)]} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{b_{10} + b_{01} \frac{y(t)}{x(t)} + \psi_1[x(t), y(t)] + \frac{y(t)}{x(t)} \psi_2[x(t), y(t)]}{a_{10} + a_{01} \frac{y(t)}{x(t)} + \varphi_1[x(t), y(t)] + \frac{y(t)}{x(t)} \varphi_2[x(t), y(t)]} = \frac{b_{10} + b_{01}k^*}{a_{10} + a_{01}k^*}, \end{aligned}$$

且 $\frac{b_{10} + b_{01}k^*}{a_{10} + a_{01}k^*}$ 是一个有限数。因此, 由引理 1 可得系统(5)的对应轨线 $u = u(t), v = v(t)$ 当 $t \rightarrow +\infty$ 沿固定方向趋于奇点 $(u, v) = (0, 0)$ 。对其他情形可同理证明。

证毕。

作为此结果的一个应用, 下面给出两个推论^[17]。

给定平面上的线性齐次常系数系统:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y}, \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y} \end{cases} \quad (9)$$

记 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 。

设 \mathbf{J} 为矩阵 \mathbf{A} 的实 Jordan 标准形, 即存在非奇异实矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$ 。作非奇异的坐标线性变换:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

系统(9)化为:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (10)$$

推论 1 如果系统(10)的一条轨线 $x=x(t), y=y(t)$ 当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时沿一个确定的方向趋于坐标原点, 则系统(9)的对应轨线 $\tilde{x}=\tilde{x}(t), \tilde{y}=\tilde{y}(t)$ 也是如此; 反之亦然。

推论 2 如果系统(10)的一条轨线绕坐标原点无限盘旋, 且当 $t \rightarrow +\infty$ (或 $t \rightarrow -\infty$) 时趋于坐标原点, 则系统(9)也是如此; 反之亦然。

3 结 语

本文研究了平面解析系统的单值轨道的不变性问题。若系统是解析的但坐标变换是拓扑的或是(非可逆)可微的, 则这样的坐标变换不能保证变换前后的系统有相同的单值性。本文证明: 如果坐标变换是正则的, 则能保证变换前后系统有相同的单值性。正规型理论中所做的近恒等变换显然是正则变换, 因此任何解析系统与它的正规型具有相同的单值性。这个结果在平面解析系统经典的中心问题的研究中具有重要的理论意义与应用价值。因为一方面, 在研究中心问题前, 需要先解决奇点的单值性问题; 另一方面, 研究奇点的单值性问题, 可以利用正规型理论把系统中那些不重要的项通过近恒等坐标变换消去, 从而得到形式更简单的系统以易于研究。尤其对含线性零奇点的系统, 有例子表明, 通过 Blow-up 技术是难以实现的, 尽管任何解析系统可以通过做有限次的可微但不可逆的 Blow-up 变换, 把线性零奇点化为一般是不可定向曲面上的一条封闭曲线, 并且可进一步通过时间尺度变换化为有限个简单奇点去研究。

由于可逆的可微坐标变换一般未必是正则变换, 对于这种变换能否保证变换前后系统有相同的单值性仍有待继续研究。另外, 如果系统不是解析的, 何种坐标变换能保证变换前后系统有相同的单值性也是一个有待研究的问题。

参考文献:

- [1] Algaba A, Freire E, Gamero E, et al. Monodromy, center-focus and integrability problems for quasi-homogeneous polynomial systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(3/4): 1726-1736.
- [2] Arnold V I, Il'yashenko Y S. Ordinary Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 1-148.
- [3] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985: 19-96.
- [4] Poincaré H. Mémoire Sur Les Courbes Définies Par Une Équation Différentielle Oeuvres[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1957: 251-290.
- [5] Andreev A F. Investigation of the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1958, 8(2): 183-207.
- [6] Álvarez M J, Ferragut A, Jarque X. A survey on the blow up technique[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011, 21(11): 3103-3118.
- [7] Algaba A, García C, Reyes M. Characterization of a monodromic singular point of a planar vector field[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2011, 74(16): 5402-5414.
- [8] Mañosa V. On the center problem for degenerate singular points of planar vector fields[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(4): 687-707.
- [9] García I A, Giné J, Grau M. A necessary condition in the monodromy problem for analytic differential equations on the plane[J]. Journal of Symbolic Computation, 2006, 41(9): 943-958.
- [10] Algaba A, García C, Reyes M. A new algorithm for determining the monodromy of a planar differential system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 237: 419-429.
- [11] Ashkenazi M, Chow S N. Normal forms near critical points for differential equations and maps[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988, 35(7): 850-862.
- [12] Algaba A, García C, Giné J. Analytic integrability around a nilpotent singularity[J]. Journal of Differential Equations, 2019, 267(1): 443-467.
- [13] Algaba A, García C, Reyes M. Algebraic integrability of nilpotent planar vector fields[J]. Chaos, Solitons & Fractals,

2021, 145: 110765.

[14] Queiroz L, Pessoa C. Nilpotent centers in \mathbf{R}^3 [EB/OL]. (2021-10-05) [2022-10-22]. <https://arxiv.org/abs/2110.02383v1>.

[15] Pessoa C, Queiroz L. Monodromic nilpotent singular points with odd Andreev number and the center problem[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2022, 21(4): 1-24.

[16] 唐敏, 黄土森. 关于平面解析系统的定性结构[J]. 浙江理工大学学报, 2015, 33(1): 140-145.

[17] 陆启韶, 彭临平, 杨卓琴. 常微分方程与动力系统[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010: 74-103.

(责任编辑:康 锋)