



Riordan 有向图

汤思豪,王伟平

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘要: 为了拓展 Riordan 阵与 Riordan 群理论,提出 Riordan 有向图的概念并研究其性质,由此建立整数序列、Riordan 阵与图之间的联系。首先,基于 Riordan 阵,定义 Riordan 有向图,并利用 Riordan 阵的基本性质得到 Riordan 有向图的边集满足的条件。然后,给出 Riordan 有向图含有 Hamilton 路的一个充分条件以及 Riordan 有向图是本原有向图的一个充分条件。最后,通过 Riordan 群上的对角平移算子提出构造同构 Riordan 有向图的方法。结果表明:一些特殊的整数序列与有向图之间有良好的对应,且利用 Riordan 阵理论可以将一些整数序列的性质反映到有向图的性质上。

关键词: Riordan 阵; Riordan 有向图; 整数序列; 本原有向图; Hamilton 路

中图分类号: O151.26

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2023) 03-0272-07

引文格式: 汤思豪,王伟平. Riordan 有向图[J]. 浙江理工大学学报(自然科学), 2023, 49(2): 272-278.

Reference Format: TANG Sihao, WANG Weiping. Riordan digraphs[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University, 2023, 49(2): 272-278.

Riordan digraphs

TANG Sihao, WANG Weiping

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to expand the theory of Riordan arrays and Riordan group, we introduce the concept of Riordan digraphs and study their properties. As a result, we establish the relations among integer sequences, Riordan arrays and graphs. Firstly, we define the Riordan digraphs on the basis of Riordan arrays, and obtain the conditions of the edge-sets of the Riordan digraphs by using the basic properties of Riordan arrays. Next, we conclude a sufficient condition for the existence of a Hamilton path in a Riordan digraph and a sufficient condition for a Riordan digraph to be primitive. Finally, we propose a method to construct isomorphic Riordan digraphs by using diagonal translation operator on the Riordan group. The results show that some special integer sequences are well related to digraphs, and some properties of integer sequences can be reflected to those of digraphs by using the theory of Riordan arrays.

Key words: Riordan arrays; Riordan digraphs; integer sequences; primitive digraph; Hamilton path

0 引言

Riordan 阵及 Riordan 群的研究是组合数学中的重要课题。Rogers^[1] 在 1978 年引入了 Renewal 阵的概念, Renewal 阵可研究 Pascal 三角、Catalan 三角和 Motzkin 三角等著名的组合矩阵及相关组合序

收稿日期: 2022-09-27 网络出版日期: 2022-12-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(11671360); 浙江省自然科学基金项目(LY22A010018)

作者简介: 汤思豪(1998—), 男, 浙江嘉兴人, 硕士研究生, 主要从事组合数学方面的研究。

通信作者: 王伟平, E-mail: wpingwang@zstu.edu.cn

列。1991 年, Shapiro 等^[2]对 Rogers 的工作做了进一步推广, 首次引入了 Riordan 阵和 Riordan 群的概念, 介绍了 Riordan 阵基本定理, 并给出了 Riordan 阵在组合恒等式、格路计数、反演关系中的许多应用。2008 年, Wang 等^[3]提出了广义 Riordan 阵的概念, 证明了广义 Riordan 群与广义 Sheffer 群同构, 并研究了相应的反演关系问题及多项式序列的连接常数问题。2019 年, 张晨璐等^[4]又给出了广义 Riordan 阵新的刻画, 并由此研究了 Riordan 阵的分解及 Lucas u 序列、Lucas v 序列等多项式序列之间的关系。

设 $g(t)$ 与 $f(t)$ 为形式幂级数, 其中 $f(0)=0$, 但 $f'(0)\neq 0$ 。关于形式幂级数对 $(g(t), f(t))$ 的 Riordan 阵 $\mathcal{R}(g(t), f(t))$ 是一个无穷下三角矩阵 $(d_{n,k})_{n,k\geq 0}$, 其 (n,k) 元为

$$d_{n,k}=[t^n]g(t)f(t)^k,$$

其中: $[t^n]f(t)$ 表示形式幂级数 $f(t)$ 中 t^n 的系数。特别地, 若 $g(0)\neq 0$, 则称该 Riordan 阵为正常的。设 $\mathcal{R}(g(t), f(t))$ 与 $\mathcal{R}(h(t), l(t))$ 为两个 Riordan 阵, 由矩阵乘法可得:

$$\mathcal{R}(g(t), f(t)) * \mathcal{R}(h(t), l(t)) = \mathcal{R}(g(t)h(f(t)), l(f(t))),$$

由此可进一步证明全体正常的 Riordan 阵关于乘法构成一个群, 称为 Riordan 群。关于 Riordan 群的研究可以参考 Barry 等^[5]、He 等^[6]、Luzón 等^[7-8]、Cheon 等^[9]的工作。

另一方面, 一些学者不仅关注组合序列与相关矩阵, 还研究这些组合序列及矩阵与图的联系。Deo 等^[10]在 1983 年研究了与 Pascal 三角相关的图的性质。2019 年, Cheon 等^[11-12]对他们的工作做了进一步推广, 首次提出了 Riordan 图的概念, 并系统研究了 Riordan 图的性质, 如 Riordan 图的分解、Riordan 图的分形、含有 Euler 圈或 Hamilton 圈的 Riordan 图等。

二值 Riordan 阵 $\mathcal{B}(g(t), f(t))=(b_{n,k})_{n,k\geq 0}$ 是定义在 \mathbb{Z} 上的 Riordan 阵 $\mathcal{R}(g(t), f(t))$ 的所有元素模 2 得到的矩阵, 即

$$b_{n,k}\equiv [t^n]g(t)f(t)^k \pmod{2},$$

或记为

$$\mathcal{B}(g(t), f(t))\equiv \mathcal{R}(g(t), f(t)) \pmod{2}.$$

设 \mathbf{A} 是一个 $n\times n$ 的矩阵。用符号 $\mathbf{A}(i|j)$ 表示一个 $(n-1)\times(n-1)$ 的矩阵, 它由矩阵 \mathbf{A} 删去第 i 行和第 j 列后得到。用符号 \mathbf{A}_k 表示 \mathbf{A} 的 k 阶主子矩阵。由此可以给出 Riordan 图的定义, 具体定义见 Cheon 等^[11]的定义 2.4。

设 G 是具有 n 个顶点的简单标号无向图, 若其邻接矩阵 $\mathbf{A}(G)$ 是一个 $n\times n$ 的对称 $(0,1)$ 矩阵, 表示为 $\mathbf{A}(G)=\mathbf{B}+\mathbf{B}^T$, 其中 $\mathbf{B}=\mathcal{B}(tg(t), f(t))_n$, 即 \mathbf{B} 是一个 $n\times n$ 的 $(0,1)$ 下三角矩阵, 且其对角线上的元素都是 0, 使得

$$\mathbf{B}(1|n)=\mathcal{B}(g(t), f(t))_{n-1},$$

则称 G 为 Riordan 阵 $\mathbf{R}=\mathcal{R}(g(t), f(t))$ 对应的 n 阶 Riordan 图, 记为 $G_n(\mathbf{R})$ 。因为 Riordan 阵 $\mathcal{R}(g(t), f(t))$ 中元素的指标 n,k 从 0 开始, 所以对 $\mathbf{A}(G)=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, 有 $a_{i,i}=0$, 且当 $i>j\geq 1$ 时有

$$a_{i,j}\equiv [t^{i-1}]tg(t)f(t)^{j-1}=[t^{i-2}]g(t)f(t)^{j-1}=d_{i-2,j-1} \pmod{2}.$$

不论是 Deo 等^[10]还是 Cheon 等^[11-12]都只考虑了无向图的情况, 而在图论中, 有向图也是重要的研究对象, 许多性质并非是二者共有的。例如, 若讨论连通、圈、支撑树、平面性、边割、匹配等概念时往往与边的方向无关, 但讨论边空间、支撑树计数和整数流时会与边的方向有关^[13]。

本文将定义 Riordan 有向图并研究它们的一些基本性质。首先, 推广 Cheon 等^[11-12]的 Riordan 图的概念, 提出 Riordan 有向图的概念, 并利用 Riordan 阵理论得到 Riordan 有向图的边集满足的性质; 然后, 考虑一种含 Hamilton 路的 Riordan 有向图, 提出一种构造本原 Riordan 有向图的方法, 并得到相应本原指数的上界; 最后, 通过对角平移算子给出两个 n 阶 Riordan 有向图同构的充分条件。

1 Riordan 有向图及其性质

定义 1 设 D 是具有 n 个顶点的简单标号有向图, 如果 D 的邻接矩阵 $\mathbf{A}(D)$ 是一个 $n\times n$ 的 $(0,1)$ 矩阵, 表示为 $\mathbf{A}(D)=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2^T$, 其中 $\mathbf{B}_1=\mathcal{B}(tg(t), f(t))_n$, $\mathbf{B}_2=\mathcal{B}(th(t), l(t))_n$, 则称有向图 D 为 Riordan

阵 $\mathbf{R}_1 = \mathcal{R}(g(t), f(t))$ 和 $\mathbf{R}_2 = \mathcal{R}(h(t), l(t))$ 对应的 n 阶 Riordan 有向图, 记为 $D_n(g(t), f(t), h(t), l(t))$ 或 $D_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 。Riordan 阵 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 称为 $D_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 的生成矩阵。当生成矩阵已知时, 将 n 阶 Riordan 有向图简记为 D_n 。

特别地, 对 Riordan 阵 $\mathbf{R} = \mathcal{R}(g(t), f(t))$, Riordan 有向图 $D_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 是 Riordan 图 $G_n(\mathbf{R})$ 的一个定向图, Riordan 图 $G_n(\mathbf{R})$ 是 Riordan 有向图 $D_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 的基础图。另外, 当两个生成矩阵 $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2$ 时, $D_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 和 $D_n(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1)$ 是不同的有向图, 它们对应边的方向恰好相反。

设 $\mathcal{R}(g(t), f(t)) = (d_{n,k})_{n,k \geq 0}$ 和 $\mathcal{R}(h(t), l(t)) = (\hat{d}_{n,k})_{n,k \geq 0}$ 为 Riordan 有向图 D_n 的生成矩阵, 若 D_n 的邻接矩阵为 $\mathbf{A}(D_n) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, 则 $a_{i,i} = 0$, 且当 $i > j \geq 1$ 时, 有

$$a_{i,j} \equiv [t^{i-1}]tg(t)f(t)^{j-1} = [t^{i-2}]g(t)f(t)^{j-1} = d_{i-2,j-1} \pmod{2} \quad (1)$$

当 $j > i \geq 1$ 时, 有

$$a_{i,j} \equiv [t^{j-1}]th(t)l(t)^{i-1} = [t^{j-2}]h(t)l(t)^{i-1} = \hat{d}_{j-2,i-1} \pmod{2} \quad (2)$$

例 1 Riordan 阵 $\mathbf{R}_1 = \mathcal{R}(2+t^3+t^4, t)$, $\mathbf{R}_2 = \mathcal{R}(1+t, t)$ 及它们生成的 6 阶 Riordan 有向图 D_6 的邻接矩阵 $\mathbf{A}(D_6)$ 分别是:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \mathbf{A}(D_6) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

根据邻接矩阵 $\mathbf{A}(D_6)$, 得到有向图 D_6 , 它是 6 阶循环有向图 $D(6; \{1, 2\})$, 如图 1 所示。

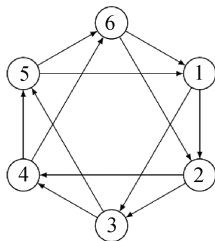


图 1 \mathbf{R}_1 与 \mathbf{R}_2 生成的循环有向图 $D_6 = D(6; \{1, 2\})$

类似于 Cheon 等^[11]的定理 2.11, 关于 Riordan 有向图, 有以下结论成立。

定理 1 设 $D_n(g(t), f(t), h(t), l(t))$ 为一个 n 阶 Riordan 有向图, 其顶点集为 $V = [n]$, 边集记为 E , 则有序对 $(i+1, i)$ 必满足以下条件之一:

- 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 有 $(i+1, i) \notin E$;
- 对于 $2 \leq i \leq n-1$, 有 $(i+1, i) \notin E$ 但 $(2, 1) \in E$;
- 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 有 Hamilton 路 $n \rightarrow n-1 \rightarrow \cdots \rightarrow 1$ 。

类似地, 有序对 $(i, i+1)$ 必满足以下条件之一:

- 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 有 $(i, i+1) \notin E$;
- 对于 $2 \leq i \leq n-1$, 有 $(i, i+1) \notin E$ 但 $(1, 2) \in E$;
- 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 有 Hamilton 路 $1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n$ 。

证明 设 $\mathbf{A}(D) = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ 为 D_n 的邻接矩阵, 根据式(1)可知对于任意 $1 \leq i \leq n-1$, 有

$$a_{i+1,i} \equiv [t^{i-1}]g(t)f(t)^{i-1} = g_0f_1^{i-1} \pmod{2},$$

其中: $g_0 = [t^0]g(t)$, $f_1 = [t^1]f(t)$ 。因此, 当 $g_0 \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 不论 f_1 为何值, 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 都有 $a_{i+1,i} = 0$, 即 $(i+1, i) \notin E$ 。当 $g_0 \equiv 1 \pmod{2}$ 且 $f_1 \equiv 0 \pmod{2}$ 时, 对于 $2 \leq i \leq n-1$, 都有 $a_{i+1,i} = 0$, 但是 $a_{2,1} = 1$, 即 $(i+1, i) \notin E$ 但 $(2, 1) \in E$ 。当 $g_0 \equiv 1 \pmod{2}$ 且 $f_1 \equiv 1 \pmod{2}$ 时, 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 有 $a_{i+1,i} = 1$, 即 $(i+1, i) \in E$ 。

同理,根据式(2), $a_{i,i+1} \equiv h_0 l_1^{i-1} \pmod{2}$,其中 $h_0 = [t^0]h(t)$, $l_1 = [t^1]l(t)$ 。以类似的方法,可得到定理中的结果。

根据 Luzón 等^[8]的定理 7, Riordan 群 \mathcal{R} 的换位子群 $[\mathcal{R}, \mathcal{R}]$ 由所有对角线上元素为 1 的 Riordan 阵组成,从而可得以下结论。

推论 1 由换位子群 $[\mathcal{R}, \mathcal{R}]$ 中的 Riordan 阵为其中一个生成矩阵的任意阶 Riordan 有向图都有 Hamilton 路。

下面利用推论 1 进一步考虑一个 Riordan 有向图为本原有向图的条件。此时,还需用到以下两个引理。

引理 1^[14] 有向图 D 是本原有向图当且仅当 D 是强连通的,而且 D 中所有不同有向圈的圈长 l_1, l_2, \dots, l_c 的最大公约数为 1,即 $\gcd(l_1, l_2, \dots, l_c) = 1$ 。

引理 2^[15] 设 D 是 $n(n \geq 2)$ 阶本原有向图且含长为 s 的有向圈,则 $\gamma(D) \leq n + s(n-2)$,其中 $\gamma(D)$ 为 D 的本原指数,即使得 $\mathbf{A}(D)^k$ 的所有元素大于零的最小正整数 k 。

定理 2 设 $D_n(g(t), f(t), h(t), l(t))$ 为一个 $n(n \geq 2)$ 阶 Riordan 有向图,其生成矩阵满足 $\mathcal{R}(g(t), f(t)) \in [\mathcal{R}, \mathcal{R}]$,以及 $[t^{n-2}]h(t) \equiv 1 \pmod{2}$,则 D_n 是 Hamilton 图。在此基础上,若存在 k ,使得 $0 \leq k < n-2$, $[t^k]h(t) \equiv 1 \pmod{2}$ 且 $\gcd(k+2, n) = 1$,则 D_n 是 n 阶本原有向图,并且本原指数 $\gamma(D_n) \leq n + (k+2)(n-2)$ 。

证明 由推论 1 可知 Riordan 有向图 D_n 存在 Hamilton 路 $n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 1$,又根据式(2)和定理条件,有

$$a_{1,n} \equiv \hat{d}_{n-2,0} = [t^{n-2}]h(t) \equiv 1 \pmod{2},$$

从而存在边 $(1, n)$,因此该 Riordan 有向图具有 Hamilton 圈,长度为 $l_1 = n$ 。

若存在 k ,使得 $0 \leq k < n-2$,且 $[t^k]h(t) \equiv 1 \pmod{2}$,则由式(2),有

$$a_{1,k+2} \equiv \hat{d}_{k,0} = [t^k]h(t) \equiv 1 \pmod{2},$$

从而 $(1, k+2) \in E$,因此存在一个有向圈 $k+2 \rightarrow k+1 \rightarrow \dots \rightarrow 1 \rightarrow k+2$,其长度为 $l_2 = k+2$ 。此时如果还存在其他有向圈,其长度分别为 l_3, l_4, \dots, l_c ,由于 $\gcd(l_1, l_2) = \gcd(k+2, n) = 1$,所以 $\gcd(l_1, l_2, \dots, l_c) = 1$ 。因为 D_n 作为 Hamilton 图是强连通的,再根据引理 1, D_n 是 n 阶本原有向图。该有向图存在长为 $k+2$ 的圈,因此根据引理 2,有 $\gamma(D_n) \leq n + (k+2)(n-2)$ 。

特别地,如果 $[t^0]h(t) \equiv 1 \pmod{2}$ 且 n 为奇数,可以将本原指数的上界进一步缩小为 $\gamma(D_n) \leq n + 2(n-2)$ 。

例 2 考虑 Pascal 三角 $\mathbf{P} = \mathcal{R}(1/(1-t), t/(1-t))$ 以及 Catalan 三角

$$\mathbf{C} = \mathcal{R}\left(\frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}, \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2}\right)$$

这两个经典 Riordan 阵,其中前者的 (n, k) 元为二项式系数 $\binom{n}{k}$,后者的 $(0, n)$ 元及第 $n-1$ 行的行和为 Catalan 数 $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 。这两个 Riordan 阵以及它们生成的 5 阶有向图 D_5 的邻接矩阵 $\mathbf{A}(D_5)$ 分别为:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \mathbf{A}(D_5) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据邻接矩阵 $\mathbf{A}(D_5)$,可以得到由 \mathbf{P} 和 \mathbf{C} 生成的 5 阶 Riordan 有向图 $D_5 = D_5(\mathbf{P}, \mathbf{C})$,如图 2 所示。根据定理 2, D_5 不仅是 Hamilton 图,而且是本原有向图,其本原指数 $\gamma(D_5) = 2 \leq 11$ 。另外,可以验证,由这两个 Riordan 阵生成的 3 阶和 4 阶 Riordan 有向图均是本原的。

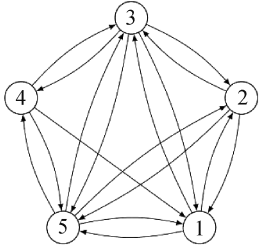


图 2 Riordan 有向图 D_5

设 $\mathbf{R}=\mathcal{R}(g(t),f(t))$ 为 Riordan 阵,称 $\Phi:\mathcal{R}(g(t),f(t))\mapsto\mathcal{R}(g(t)f(t)/t,f(t))$ 为对角平移算子。根据 Riordan 阵的定义,Riordan 阵 $\mathbf{R}=(d_{n,k})$ 和 $\Phi\mathbf{R}=(d_{n,k}^*)$ 的一般元的关系为:

$$d_{n,k}^*=[t^n]g(t)f(t)^{k+1}/t=[t^{n+1}]g(t)f(t)^{k+1}=d_{n+1,k+1} \tag{3}$$

从而对角平移算子 Φ 的作用为删去 Riordan 阵 \mathbf{R} 的第 0 行和第 0 列(见 Luzón 等^[7]的推论 3.2)。

定理 3 设 $\mathbf{R}_1=\mathcal{R}(g(t),f(t))$ 和 $\mathbf{R}_2=\mathcal{R}(h(t),l(t))$ 为两个 Riordan 阵,且当整数 n 和 k 满足 $0\leq k\leq n-2$ 时,有:

$$[t^{n-1}]h(t)l(t)^{k+1}\equiv[t^k]g(t)(\text{mod}2)$$

及

$$[t^{n-1}]g(t)f(t)^{k+1}\equiv[t^k]h(t)(\text{mod}2),$$

则 n 阶 Riordan 有向图 $D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$ 和 $D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2)$ 同构。

证明 要证明 $D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$ 和 $D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2)$ 同构,只需证明存在双射

$$\theta:V(D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2))\rightarrow V(D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2)),$$

使得

$$(x,y)\in E(D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2))\Leftrightarrow(\theta(x),\theta(y))\in E(D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2)) \tag{4}$$

设 $a_{i,j}$ 和 $a_{i,j}^*$ 为 $D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2)$ 和 $D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2)$ 的邻接矩阵的 (i,j) 元。由式(1),当 $i>j\geq 2$ 时,有

$$a_{i,j}\equiv d_{i-2,j-1}(\text{mod}2)$$

及

$$a_{i-1,j-1}^*\equiv d_{i-3,j-2}^*(\text{mod}2)。$$

再根据式(3),由于 $d_{i-2,j-1}=d_{i-3,j-2}^*$,因此,当 $2\leq j<i\leq n$ 时,有 $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}^*$ 。当 $2\leq i<j\leq n$ 时,针对 Riordan 阵 $\mathbf{R}_2=(\hat{d}_{n,k})$ 进行类似讨论仍有 $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}^*$ 。 $\mathbf{A}(D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2))$ 与 $\mathbf{A}(D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2))$ 如图 3 所示,图 3 中两个矩形所含的两个实三角形和两个虚三角形的点、边是一一对应的。因此,对角平移算子 Φ 自然地诱导出两个有向图之间部分顶点间的一一对应 $\theta:i\mapsto i-1(2\leq i\leq n)$,当 $2\leq i,j\leq n$ 时,使得

$$(i,j)\in E(D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2))\Leftrightarrow(\theta(i),\theta(j))=(i-1,j-1)\in E(D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2))。$$

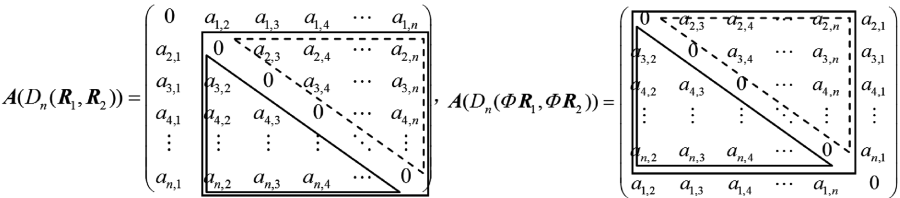


图 3 $\mathbf{A}(D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2))$ 与 $\mathbf{A}(D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2))$ 对比

根据定理 3 的条件,对于任意整数 n 和 k ,满足 $0\leq k\leq n-2$,有

$$[t^{n-1}]h(t)l(t)^{k+1}\equiv[t^k]g(t)(\text{mod}2),$$

即 $\hat{d}_{n-1,k+1}\equiv d_{k,0}(\text{mod}2)$ 。令 $k=i-2$,则对于 $2\leq i\leq n$,有 $\hat{d}_{n-1,i-1}\equiv d_{i-2,0}(\text{mod}2)$ 。因此,根据式(1)和式(2),当 $2\leq i\leq n$ 时, $\mathbf{A}(D_n(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2))$ 的第 1 列与 $\mathbf{A}(D_n(\Phi\mathbf{R}_1,\Phi\mathbf{R}_2))$ 的第 n 列元素满足:

$$a_{i,1}\equiv d_{i-2,0}\equiv\hat{d}_{n-1,i-1}(\text{mod}2),a_{i-1,n}^*\equiv\hat{d}_{n-2,i-2}^*(\text{mod}2)。$$

而 $\hat{d}_{n-1,i-1} = \hat{d}_{n-2,i-2}^*$, 于是, 得到 $a_{i,1} = a_{i-1,n}^*$. 同理可得 $a_{1,i} = a_{n,i-1}^*$. 因此, 若令 $\theta(1) = n$, 当 $2 \leq i \leq n$ 时, 有

$$(i, 1) \in E(D_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)) \Leftrightarrow (\theta(i), \theta(1)) = (i-1, n) \in E(D_n(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2))$$

以及

$$(1, i) \in E(D_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)) \Leftrightarrow (\theta(1), \theta(i)) = (n, i-1) \in E(D_n(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2)).$$

综上所述, 两个图的顶点集之间存在双射 $\theta: V(D_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)) \rightarrow V(D_n(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2))$, 且

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

为一个轮换, 使得式(4)成立. 因此 n 阶 Riordan 有向图 $D_n(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 和 $D_n(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2)$ 同构. \square

推论 2 设 $\mathbf{R} = \mathcal{R}(g(t), f(t))$ 为 Riordan 阵, 则无向图 $G_n(\mathbf{R})$ 与 $G_n(\Phi\mathbf{R})$ 同构.

证明 $G_n(\mathbf{R})$ 与 $G_n(\Phi\mathbf{R})$ 分别是 $D_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 与 $D_n(\Phi\mathbf{R}, \Phi\mathbf{R})$ 的基础图, 由定理 3, $D_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 与 $D_n(\Phi\mathbf{R}, \Phi\mathbf{R})$ 同构, 因此其基础图也同构.

例 3 考虑由 Riordan 阵 $\mathbf{R} = \mathcal{R}(1/(1-t^2), t(1+t^4)/(1-t^2)^2)$ 生成的 n 阶 Riordan 有向图 $D_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. 由于形式幂级数 $1/(1-t^2)$ 的展开式中只含有偶次项, 又由于

$$\frac{t(1+t^4)}{(1-t^2)^2} = t + \frac{2t^3}{(1-t^2)^2} = t + t^2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \right) = t + \sum_{k=1}^{\infty} 2kt^{2k+1},$$

则 $t(1+t^4)/(1-t^2)^2$ 的展开式只含有奇次项, 因此 \mathbf{R} 属于 Riordan 群中的棋盘子群. \mathbf{R} 对应的二值 Riordan 阵 $\mathcal{B}(1/(1-t^2), t(1+t^4)/(1-t^2)^2)$ 为

$$\mathcal{B}(1/(1-t^2), t(1+t^4)/(1-t^2)^2) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中在下三角部分, 每一列的元素都是先 1 后 0 交替出现, 且第 n 行的行和为 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, 为整数序列网 (OEIS) 中序列 A004526. 该矩阵使用对角平移算子 Φ 后保持不变, 因此, n 阶 Riordan 有向图 $D_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 和 $D_n(\Phi\mathbf{R}, \Phi\mathbf{R})$ 相同. 根据推论 2, 由 $D_n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ 和 $D_n(\Phi\mathbf{R}, \Phi\mathbf{R})$ 导出的基础图 $G_n(\mathbf{R})$ 与 $G_n(\Phi\mathbf{R})$ 也相同. 6 阶 Riordan 图 $G_6(\mathbf{R})$ 如图 4 所示.

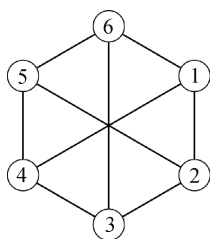


图 4 Riordan 图 $G_6(\mathbf{R})$

例 4 有 Riordan 阵 $\mathbf{R}_1 = \mathcal{R}(1/(1-t), t/(1-t))$ 与 $\mathbf{R}_2 = \mathcal{R}((1+t^3)/(1-t), t/(1-t))$:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 2 & 3 & 3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

当 $n=4$ 时, 它们满足定理 3 的条件, 因此它们生成的 4 阶 Riordan 有向图 $D_4(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 与 $D_4(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2)$ 同构. 这两个有向图的邻接矩阵分别为:

$$A(D_4(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A(D_4(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

这样就得到 Riordan 有向图 $D_4(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 与 $D_4(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2)$, 如图 5 所示。

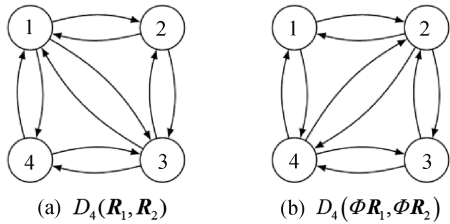


图 5 Riordan 有向图 $D_4(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ 与 $D_4(\Phi\mathbf{R}_1, \Phi\mathbf{R}_2)$

2 结 论

本文引入了 Riordan 有向图的概念,研究了 Riordan 有向图的边集、含 Hamilton 路的有向图、本原有向图,还利用 Riordan 阵与 Riordan 群理论,给出一种构造同构 Riordan 有向图的方法。后续可以在此基础上,利用图的群表示理论,研究 Riordan 有向图为可迁图的充分条件或必要条件。

参考文献:

[1] Rogers D G. Pascal triangles, Catalan numbers and renewal arrays[J]. Discrete Mathematics, 1978, 22(3): 301-310.

[2] Shapiro L W, Getu S, Woan W J, et al. The Riordan group[J]. Discrete Applied Mathematics, 1991, 34(1/2/3): 229-239.

[3] Wang W P, Wang T M. Generalized Riordan arrays[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(24): 6466-6500.

[4] 张晨璐, 王伟平. 与 Riordan 阵相关的若干多项式序列的关系研究[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版), 2019, 41(6): 818-822.

[5] Barry P, Hennessy A, Pantelidis N. Algebraic properties of Riordan subgroups[J]. Journal of Algebraic Combinatorics, 2021, 53(4): 1015-1036.

[6] He T X, Hsu L C, Shiue P J S. The Sheffer group and the Riordan group[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155(15): 1895-1909.

[7] Luzón A, Merlini D, Morón M A, et al. Complementary Riordan arrays[J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 172: 75-87.

[8] Luzón A, Morón M A, Prieto-Martínez L F. The group generated by Riordan involutions[J]. Revista Matemática Complutense, 2022, 35(1): 199-217.

[9] Cheon G S, Kim H. The elements of finite order in the Riordan group over the complex field[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 439(12): 4032-4046.

[10] Deo N, Quinn M J. Pascal graphs and their properties[J]. Fibonacci Quarterly, 1983, 21: 203-214.

[11] Cheon G S, Jung J H, Kitaev S, et al. Riordan graphs I: Structural properties[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2019, 579: 89-135.

[12] Cheon G S, Jung J H, Kitaev S, et al. Riordan graphs II: Structural properties[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2019, 579: 174-215.

[13] 徐俊明. 图论及其应用[M]. 4 版. 合肥:中国科学技术大学出版社, 2018: 4-5.

[14] Rosenblatt D. On the graphs and asymptotic forms of finite boolean relation matrices and stochastic matrices [J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1957, 4(2): 151-167.

[15] Dulmage A L, Mendelsohn N S. Graph and matrices[M]//Hararf F. Graph Theory and Theoretical Physics. London: Academic Press, 1967: 167-227.