浙江理工大学学报，2022，47(2)：262-272
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(n).2022.02.017

扭曲组合分数阶随机占优法则及其应用

周　恬，骆　桦，杨建萍
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：为了给几乎厌恶风险但在某些财富水平又喜爱风险的决策者提供合理、有效地比较复杂风险的标准，在已有组合分数阶随机占优法则的基础上，提出了扭曲组合分数阶随机占优法则。利用扭曲期望对组合分数阶随机占优在扭曲变化下的性质进行了研究，得到了一个更易于处理的扭曲组合分数阶随机占优的等价刻画，为扭曲组合分数阶随机占优能比较更为复杂的风险提供了理论依据；然后将一些主要结果应用于比较两个系统的可靠性。结果表明该扭曲组合分数阶随机占优法则能够有效比较两个不同系统的寿命问题，进一步表明该随机占优法则不仅扩展了风险比较的条件，而且比较复杂风险时非常有效。

关键词：组合分数阶；随机占优；扭曲期望；寿命问题；风险比较

中图分类号：O211.9；O225　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2022) 03-0262-11

Distorted combined fractional-degree stochastic dominance rule and its application

ZHOU Tian, *LUO Hua*, *YANG Jianping*
(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to provide a reasonable and effective standard on the comparison of more complex risks for decision makers who have almost risk aversion but prefer risk at some wealth level, the distorted combined fractional degree stochastic dominance rule is introduced based on the combined fractional degree stochastic dominance rule. The nature of combined fractional degree stochastic dominance rule under distorted transformation is studied using distorted expectation, and the equivalent characterization of a more tractable distorted combined fractional degree stochastic dominance rule is obtained, which provides a theoretical basis for the distorted combined fractional degree stochastic dominance rule to compare the more complex risks. Then some main results in this paper are applied to compare the reliability of two systems. The results show that the distorted combined fractional degree stochastic dominance rule can effectively compare the age problems of two different systems, further indicating that the stochastic dominance rule not only expands the conditions of risk comparison, but also has high effectiveness for the comparison of complex risks.

Key words: combined fractional degree; stochastic dominance; distorted expectations; age problems; risk comparison

收稿日期：2021－06－29　　网络出版日期：2021－11－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11701518，12071436)
作者简介：周　恬(1998－　)，女，河南南阳人，硕士研究生，主要从事投资决策方面的研究。
通信作者：杨建萍，E-mail：yangjp@zstu.edu.cn

0 引　言

1969 年，Hanoch 等[1]提出了随机占优（Stochastic dominance，SD）理论，该理论被认为是金融学研究领域中的又一项开创性成果[2]。目前，该理论已成为行为金融学研究中比较风险的一种重要工具，为不确定性条件下的决策问题的研究提供了一个系统而有效的标准范式。SD 理论使用风险的整个概率分布来进行刻画，并且考虑了投资者的风险偏好，与行为金融学中的期望效用理论相吻合，是一种既有良好定义又有经济学含义的风险比较工具。在实际应用中，虽然经典的 SD 理论中涉及决策者的效用函数，但它具有一些基于概率分布的简单易于处理的性质[2-3]，使得它在实际应用时并不需要知道具体的效用函数表达式，因此比期望效用理论更行之有效。到目前为止，SD 理论及其应用已经得到了很好的发展，其中最流行的是一阶随机占优（First-order stochastic dominance，FSD）理论和二阶随机占优（Second-order stochastic dominance，SSD）理论[4-8]。

FSD 理论代表了风险偏好用单调增效用函数描述的风险决策者，SSD 理论对应的是凹性单调增效用函数，这些限制导致它们在实际应用中不能有效解释凸性单调增效用函数（风险喜爱）与凹性单调增效用函数（风险厌恶）的决策者决策行为的差异性。而且基于 FSD、SSD 法则的分析结果极易受风险分布的影响，类似尾部风险分布的微小偏差就有可能导致随机占优关系不成立，这对理论的实际应用带来了一些困难。近年来有许多研究者致力于发展随机占优理论及应用，已有大量的文献提出了新的随机占优概念。考虑到尾部风险分布对 FSD、SSD 随机占优法则的影响，Lehmann 等[9]提出了带约束的 FSD 和 SSD 法则，即风险只需要在某个固定的闭区间上满足 FSD 或 SSD 随机占优法则，对于区间的选择没有限制。鉴于除了绝对风险厌恶投资者和绝对风险喜爱投资者之外，还有大量几乎厌恶风险投资者，他们在买保险（表现为风险厌恶）的同时，也常买一些股票（表现为风险喜爱）。Leshno 等[10]将 SD 理论扩展到几乎随机占优（Almost stochastic dominance，ASD）理论，为几乎风险投资者提供了一类可供参考的比较风险的标准。Müller 等[11]对几乎风险厌恶投资者的效用函数进行了更细致的刻画，定义了风险喜爱参数和风险厌恶参数，并引入了分数阶和组合分数阶随机占优法则，对整数阶随机占优作了连续化处理，其中一阶几乎随机占优（ε-AFSD）、分数阶随机占优是组合分数阶随机占优的两种特殊情况。

最近出现了有关随机占优在扭曲变换下性质的研究[12]。如果函数 $h:[0,1]\to[0,1]$ 单调递增，且满足 $h(0)=0, h(1)=1$，则称 h 为扭曲函数。当扭曲函数 h 作用在分布函数 F 上时，h 常解释为 F 的一个主观权重，反映了决策者对风险的态度[13]。一般来说，凹的 h 对在较小财富水平的分布函数值有更大的权重，这与决策者风险厌恶的偏好相符。令 X 是无原子概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 中的一个随机变量，其分布函数为 F。如果 h 是一个右连续函数，那么，$h(F(x))$ 可视为某一随机变量 X^h 的扭曲分布函数。Yaari[13]首先将扭曲分布函数应用于风险选择对偶理论中。一些研究者还证明，与期望效用理论相一致的 FSD、SSD 理论都可以通过扭曲变换来刻画[2,14]。更多关于扭曲分布函数在保险精算中的应用可参考文献[15-17]。

假定扭曲函数 h 是右连续的，此时随机变量 X^h 的数学期望称作随机变量 X 的扭曲期望，用 $\mathrm{E}_h(x)$ 来表示[12]。在保险学中，$\mathrm{E}_h(X)$ 被称为风险 X 的扭曲度量，常用来测量风险和计算风险保费。许多较好的风险度量都可以表示为扭曲分布的期望。众所周知，随机占优是一种偏序，在实际应用中，经常会遇到不相容的情况，并且当存在较多风险时，两两比较就变得很繁琐。因此研究扭曲期望与随机占优之间的隐含关系，用扭曲期望风险度量代替随机占优法则比较风险就显得非常重要。近年来，已经有一些研究者研究了 FSD、SSD 理论基于扭曲期望的等价刻画。对于任意的随机变量 $X_i, i=1,2$，Levy 等[14]证明，X_2 一阶随机占优于 X_1，当且仅当对所有的扭曲函数 h，扭曲期望 $\mathrm{E}_h(X_1)\leqslant\mathrm{E}_h(X_2)$ 成立；他们同时也证明，X_2 二阶随机占优于 X_1，当且仅当对所有的凸扭曲函数 h，扭曲期望 $\mathrm{E}_h(X_1)\leqslant\mathrm{E}_h(X_2)$ 成立。虽然 FSD、SSD 和 ε-AFSD 可以通过扭曲期望来等价刻画，但这对一般的组合分数阶随机占优并不一定成立，因为 SD 理论是通过分布函数的积分定义的，而扭曲期望则与分位数函数的积分有关。本文进一步探索了组合分数阶随机占优基于扭曲期望的等价刻画和在扭曲变化下保持性的充分条件，为组合分数阶随机占优能比较更为复杂的风险提供充足的理论依据。

1 组合分数阶随机占优法则

首先定义一些符号。设 X_i 表示具有累积分布函数 F_i 的随机变量，$i=1,2$。设 $U_{\gamma_{cv}}^{\gamma_{cx}}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续可微函数类，定义

$$U_{\gamma_{cv}}^{\gamma_{cx}}=\left\{u:0\leqslant\gamma_{cv}u'(y)\leqslant u'(x)\leqslant\frac{1}{\gamma_{cx}}u'(y),\forall x\leqslant y\right\},$$

其中对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$x_+=\max\{x,0\}$。下面回顾分数阶随机占优的定义。

定义 1[11] 对于 $0\leqslant\gamma_{cv},\gamma_{cx}\leqslant1$，如果对于任意的 $u\in\mathscr{U}_{\gamma_{cv}}^{\gamma_{cx}}$，$\mathrm{E}[u(X_1)]\leqslant\mathrm{E}[u(X_2)]$，则称 X_2 是$(1+\gamma_{cv},1+\gamma_{cx})$阶随机占优于 X_1 的，表示为 $X_1\leqslant_{(1+\gamma_{cv},1+\gamma_{cx})-\mathrm{SD}}X_2$（或 $F_1\leqslant_{(1+\gamma_{cv},1+\gamma_{cx})-\mathrm{SD}}F_2$）。

对于 γ_{cv}、γ_{cx}的不同取值，可以得到以下特殊情况：

a)当 $\gamma_{cv}=0,\gamma_{cx}=0$ 时，对应于 FSD，表示为 $X_1\leqslant_1X_2$，其中 $\boldsymbol{u}_{\gamma_{cv}}^{\gamma_{cx}}$ 为递增的函数类；

b)当 $\gamma_{cv}=1,\gamma_{cx}=0$ 时，对应于 SSD，表示为 $X_1\leqslant_2X_2$，其中 $\boldsymbol{u}_{\gamma_{cv}}^{\gamma_{cx}}$ 为递增且凹的函数类；

c)当 $\gamma_{cv}=\gamma,\gamma_{cx}=0$ 时，对应于分数阶随机占优，表示为 $X_1\leqslant_{(1+\gamma)-\mathrm{SD}}X_2$；

d)当 $\gamma_{cv}=\gamma_{cx}=\gamma=\varepsilon/(1-\varepsilon)$时，对应于 ε-AFSD，表示为 $X_1\leqslant_{\varepsilon-\mathrm{AFSD}}X_2$，其中 $\varepsilon=\gamma/(1+\gamma)$。

定理 1 提供了$(1+\gamma_{cv},1+\gamma_{cx})-\mathrm{SD}$ 的一个积分条件。

定理 1[11] 对于 $0\leqslant\gamma_{cv},\gamma_{cx}\leqslant1$，$F_1\leqslant_{(1+\gamma_{cv},1+\gamma_{cx})-\mathrm{SD}}F_2$ 当且仅当对于任意的 $t\in\mathbf{R}$，

$$\begin{aligned}&\min\left\{1,\frac{\gamma_{cv}}{\gamma_{cx}}\right\}\int_{-\infty}^{t}[F_2(x)-F_1(x)]_+\,\mathrm{d}x+\min\left\{1,\frac{\gamma_{cx}}{\gamma_{cv}}\right\}\int_{t}^{\infty}[F_2(x)-F_1(x)]_+\,\mathrm{d}x\\&\quad\leqslant\gamma_{cv}\int_{-\infty}^{t}[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}x+\gamma_{cx}\int_{t}^{\infty}[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{1}$$

2 主要结果

2.1 组合分数阶随机占优法则基于扭曲期望的等价刻画

给定分布函数为 $F(x)$的随机变量 X 和右连续扭曲函数 h，定义扭曲期望

$$\mathrm{E}_h(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,\mathrm{d}h(F(x))=\int_0^1F^{-1}(u)\mathrm{d}h(u),$$

其中：$F^{-1}(u)=\sup\{x:F(x)\leqslant u\}$。扭曲期望在统计、金融和经济文献中都非常重要。在经济学中，对于任意非负的随机变量 X(如收入)，当 $h(u)=u^n$，$u\in[0,1]$，$n\in Z_+$时，可以得到：

$$\mathrm{E}_n(X)=\int_0^{\infty}(1-F(x))^n\mathrm{d}x。$$

上式即为由 Donaldson 和 Weymark[18] 于 1983 年引入的广义 Gini 系数。扭曲期望具有良好的性质，为风险选择的对偶理论提供了基础[13]。

对于任意的扭曲函数 h，定义

$$h'(0)=\lim_{x\to0+}\frac{h(x)}{x},h'(1)=\lim_{x\to1-}\frac{h(x)-1}{x-1}。$$

令 H 为所有可微扭曲函数类，对于 $0\leqslant\gamma_{cv},\gamma_{cx}\leqslant1$，设

$$\mathcal{H}_{\gamma_{cv}}^{\gamma_{cx}}=\left\{h\mid h\in H,0\leqslant\gamma_{cv}h'(y)\leqslant h'(x)\leqslant\frac{1}{\gamma_{cx}}h'(y),\forall x\leqslant y\right\}\tag{2}$$

下面，本文将通过扭曲期望对偶刻画组合分数阶随机占优。为此，先证明引理 1。

引理 1 对于任意的 $0\leqslant\gamma_{cv},\gamma_{cx}\leqslant1$，$X_2$ 依$(1+\gamma_{cv},1+\gamma_{cx})$阶随机占优于 X_1，当且仅当对于任意的 $p\in[0,1]$，

$$\begin{aligned}&\min\left\{1,\frac{\gamma_{cv}}{\gamma_{cx}}\right\}\int_0^p[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u+\min\left\{1,\frac{\gamma_{cx}}{\gamma_{cv}}\right\}\int_p^1[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u\\&\quad\leqslant\gamma_{cv}\int_0^p[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u+\gamma_{cx}\int_p^1[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{3}$$

证明　由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}x=\int_0^1[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u,$$

因此，对于任意的 $t\in\mathbf{R}$，存在 $p\in[0,1]$使得

$$\int_{-\infty}^{t}[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}x=\int_0^p[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u$$

和

$$\int_{t}^{\infty}[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}x=\int_p^1[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u$$

成立，从而结论成立。

证毕。

定理 2　对于任意的 $0\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}\leqslant 1$，以下条件等价：

a) $X_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_2$；

b) 对于所有的 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}}^{\gamma_{\mathrm{cx}}}$，$\mathrm{E}_h(X_1)\leqslant\mathrm{E}_h(X_2)$。

证明　a)⇒b)。考虑 $\gamma_{\mathrm{cv}}>\gamma_{\mathrm{cx}}$ 的情况，$\gamma_{\mathrm{cv}}\leqslant\gamma_{\mathrm{cx}}$ 的情况类似。由引理 1，$X_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_2$ 当且仅当对于任意的 $p\in[0,1]$，

$$\begin{aligned}&\int_0^p[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u+\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\int_p^1[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}}\int_0^p[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u+\gamma_{\mathrm{cx}}\int_p^1[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{4}$$

设 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}}^{\gamma_{\mathrm{cx}}}$。为不失一般性，假设 $R:=\sup_{u\in(0,1)}h'(u)\in(0,\infty)$，对于任意固定的 $n\geqslant 2$，定义 $\varepsilon_n=2^{-n}$，且 K 为下式中最大的整数 k：

$$R\left[1-k\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right)\varepsilon_n\right]\geqslant\max\left\{R\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}},\inf_{u\in(0,1)}h'(u)\right\}。$$

将$[0,1]$区间划分为$[z_k,z_{k+1}]$这样的区间段，其中 $z_0=0$，$z_{K+1}=1$，且

$$z_k=\sup\left\{u:h'(u)\geqslant R\left[1-k\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right)\varepsilon_n\right]\right\},k=1,\cdots,K。$$

定义

$$m_k=\sup\{h'(u):z_{k-1}\leqslant u\leqslant z_k\}=R\left[1-(k-1)\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right)\varepsilon_n\right],$$

根据式(2)，对于任意的 $u\in[z_{k-1},z_k]$，$k=1,\cdots,K+1$，可以得到：

$$\gamma_{\mathrm{cv}}\left[m_k-R\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right)\varepsilon_n\right]\leqslant h'(u)\leqslant m_k,$$

即对于任意的 $1\leqslant k\leqslant K+1$，

$$\sum_{k=1}^{K+1}\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,h'(u)\mathrm{d}u\geqslant\gamma_{\mathrm{cv}}\sum_{k=1}^{K+1}\left[m_k-R\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right)\varepsilon_n\right]\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u$$

和

$$\sum_{k=1}^{K+1}\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\,h'(u)\mathrm{d}u\leqslant\sum_{k=1}^{K+1}m_k\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u。$$

令

$$T_k=\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u-\gamma_{\mathrm{cv}}\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u,$$

$$c_k=R(\gamma_{\mathrm{cv}}-\gamma_{\mathrm{cx}})\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u,$$

则

$$\mathrm{E}_h(X_1)-\mathrm{E}_h(X_2)=\int_0^1F_1^{-1}(u)\mathrm{d}h(u)-\int_0^1F_2^{-1}(u)\mathrm{d}h(u)=\int_0^1[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]h'(u)\mathrm{d}u$$

$$=\sum_{k=1}^{K+1}\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+h'(u)\mathrm{d}u-\sum_{k=1}^{K+1}\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+h'(u)\mathrm{d}u$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{K+1}m_kT_k+\varepsilon_n\sum_{k=1}^{K+1}c_k。$$

由式(4)可得,对于所有的 $k\leqslant K+1$,

$$\sum_{i=1}^{k}T_i+\gamma_{\mathrm{cx}}/\gamma_{\mathrm{cv}}\sum_{i=k+1}^{K+1}T_i\leqslant 0 \tag{5}$$

下面的证明过程主要是为了说明结论 $\sum_{k=1}^{K+1}m_kT_k\leqslant 0$。设

$$A(0)=\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\sum_{i=1}^{K+1}T_i,$$

$$A(k)=\sum_{i=1}^{k}T_i+\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\sum_{i=k+1}^{K+1}T_i=\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right)T_k+A(k-1),$$

则

$$T_k=\frac{A(k)-A(k-1)}{1-\gamma_{\mathrm{cx}}/\gamma_{\mathrm{cv}}}。$$

因此,

$$\sum_{k=1}^{K+1}m_kT_k=\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}-\gamma_{\mathrm{cx}}}\sum_{k=1}^{K+1}m_k[A(k)-A(k-1)]=m_{K+1}A(K+1)-m_1A(0)+\sum_{k=1}^{K+1}(m_k-m_{k+1})A(k)$$

$$=\left(m_{K+1}-\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}R\right)A(K+1)+\sum_{k=1}^{K+1}(m_k-m_{k+1})A(k)。$$

由于对于任意的 $k>0$,$A(k)\leqslant 0$ 且使得 $R\gamma_{\mathrm{cx}}/\gamma_{\mathrm{cv}}\leqslant m_k\leqslant R$ 的序列 $\{m_k\}$ 是递减的,因此 $\sum_{k=1}^{K+1}m_kT_k\leqslant 0$。于是,

$$\int_0^1[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]\mathrm{d}h(u)\leqslant\varepsilon_n\sum_{k=1}^{K+1}c_k\leqslant\varepsilon_nR(\gamma_{\mathrm{cv}}-\gamma_{\mathrm{cx}})\int_0^1[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\mathrm{d}u。$$

令 $n\to\infty$,则 b)成立。

b)⇒a)。定义一个扭曲函数 h 使其偏导数满足:

$$h'(u)=\begin{cases}\min\left\{1,\dfrac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\right\},F_1^{-1}(u)>F_2^{-1}(u),u\leqslant p,\\[2ex] \min\left\{1,\dfrac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right\},F_1^{-1}(u)>F_2^{-1}(u),u>p,\\[2ex] \gamma_{\mathrm{cv}},F_1^{-1}(u)<F_2^{-1}(u),u\leqslant p,\\ \gamma_{\mathrm{cx}},F_1^{-1}(u)<F_2^{-1}(u),u>p。\end{cases}$$

容易验证 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}}^{\gamma_{\mathrm{cx}}}$,于是

$$\mathrm{E}_h(X_1)-\mathrm{E}_h(X_2)=\int_0^1F_1^{-1}(u)\mathrm{d}h(u)-\int_0^1F_2^{-1}(u)\mathrm{d}h(u)$$

$$=\int_0^1[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+h'(u)\mathrm{d}u-\int_0^1[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+h'(u)\mathrm{d}u$$

$$=\min\left\{1,\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\right\}\int_0^p[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\mathrm{d}u+\min\left\{1,\frac{\gamma_{\mathrm{cx}}}{\gamma_{\mathrm{cv}}}\right\}\int_p^1[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]_+\mathrm{d}u-$$

$$\gamma_{\mathrm{cv}}\int_0^p[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\mathrm{d}u-\gamma_{\mathrm{cx}}\int_p^1[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]_+\mathrm{d}u。$$

因此,对于所有的 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}}^{\gamma_{\mathrm{cx}}}$,$\mathrm{E}_h(X_1)\leqslant\mathrm{E}_h(X_2)$ 意味着式(3)成立,即 $X_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_2$。

证毕。

2.2 组合分数阶随机占优法则在扭曲变换下的封闭性

Levy 等[14]研究了经典随机占优法则在扭曲变换下的封闭性问题,发现所有扭曲函数对于 FSD 法则都有封闭性,而 SSD 法则只对凹扭曲函数有封闭性。本文将研究扭曲函数满足什么条件下时,组合分数阶随

机占优法则也满足封闭性。

性质 1　对于 $0\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}}^i,\gamma_{\mathrm{cx}}^i\leqslant1$，若 X_2 是$(1+\gamma_{\mathrm{cv}}^1\times\gamma_{\mathrm{cv}}^2,1+\gamma_{\mathrm{cx}}^1\times\gamma_{\mathrm{cx}}^2)$阶随机占优于 X_1 的，则对于任意的扭曲函数 $H\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^2}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^2}$，$X_2^H$ 是$(1+\gamma_{\mathrm{cv}}^1,1+\gamma_{\mathrm{cx}}^1)$阶随机占优于 X_1^H 的。

证明　由定理 2，X_2^H 依$(1+\gamma_{\mathrm{cv}}^1,1+\gamma_{\mathrm{cx}}^1)$阶随机占优于 X_1^H 当且仅当对于任意的 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^1}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^1}$，$E_h(X_1^H)\leqslant E_h(X_2^H)$，即

$$\int_0^1 F_1^{-1}(H^{-1}(u))\mathrm{d}h(u)\leqslant\int_0^1 F_2^{-1}(H^{-1}(u))\mathrm{d}h(u)$$

成立。令 $H^{-1}(u)=v$，则上式变为：

$$\int_0^1 F_1^{-1}(v)\mathrm{d}h\circ H(v)\leqslant\int_0^1 F_2^{-1}(v)\mathrm{d}h\circ H(v)\tag{6}$$

因此，为了证明式(6)对于任意的 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^1}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^1}$ 成立，只需验证 $h\circ H\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^1\times\gamma_{\mathrm{cv}}^2}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^1\times\gamma_{\mathrm{cx}}^2}$ 即可。

由于 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^1}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^1}$，$H\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^2}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^2}$，故对于任意的 $x\leqslant y$，有

$$\gamma_{\mathrm{cv}}^1 h'(H(y))\cdot\gamma_{\mathrm{cv}}^2 H'(y)\leqslant(h\circ H(x))'=h'(H(x))\cdot H'(x)\leqslant\frac{1}{\gamma_{\mathrm{cx}}^1}h'(H(y))\cdot\frac{1}{\gamma_{\mathrm{cx}}^2}H'(y),$$

即

$$\gamma_{\mathrm{cv}}^1\times\gamma_{\mathrm{cv}}^2(h\circ H(y))'\leqslant(h\circ H(x))'\leqslant\frac{1}{\gamma_{\mathrm{cx}}^1\times\gamma_{\mathrm{cx}}^2}(h\circ H(y))'。$$

因此，$h\circ H\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^1\times\gamma_{\mathrm{cv}}^2}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^1\times\gamma_{\mathrm{cx}}^2}$。

证毕。

注：对于任意的 $0<\gamma_{\mathrm{cv}}^i,\gamma_{\mathrm{cx}}^i<1,i=1,2,3,\gamma_{\mathrm{cv}}^3=\gamma_{\mathrm{cv}}^1/\gamma_{\mathrm{cv}}^2,\gamma_{\mathrm{cx}}^3=\gamma_{\mathrm{cx}}^1/\gamma_{\mathrm{cx}}^2$。若扭曲函数 H_1 和 H_2 满足 $H_2\circ H_1^{-1}\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}^3}^{\gamma_{\mathrm{cx}}^3}$，则由 $X_2^{H_1}$ 依$(1+\gamma_{\mathrm{cv}}^1,1+\gamma_{\mathrm{cx}}^1)$阶随机占优于 $X_1^{H_1}$ 可以推出 $X_2^{H_2}$ 是$(1+\gamma_{\mathrm{cv}}^2,1+\gamma_{\mathrm{cx}}^2)$阶随机占优于 $X_1^{H_2}$ 的。

性质 2　对于任意的 $0\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}\leqslant1$，扭曲函数 H_1 和 H_2 满足 $H_1\leqslant_1 H_2$，则由 $X_2^{H_1}$ 是$(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})$阶随机占优于 $X_1^{H_1}$ 的可以推出 $X_2^{H_2}$ 是$(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})$阶随机占优于 $X_1^{H_1}$ 的。

证明　$X_2^{H_1}$ 依$(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})$组合分数阶随机占优于 $X_1^{H_1}$，由定理 2 知，对于任意的 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}}^{\gamma_{\mathrm{cx}}}$，

$$\int_0^1 F_1^{-1}(H_1^{-1}(u))\mathrm{d}h(u)\leqslant\int_0^1 F_2^{-1}(H_1^{-1}(u))\mathrm{d}h(u)\tag{7}$$

由于 $H_1\leqslant_1 H_2$，故对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，$H_1\circ F_2(x)\geqslant H_2\circ F_2(x)$，从而对于 $u\in[0,1]$，有 $F_2^{-1}\circ H_1^{-1}(u)\leqslant F_2^{-1}\circ H_2^{-1}(u)$。因此对于任意的 $h\in\mathcal{H}_{\gamma_{\mathrm{cv}}}^{\gamma_{\mathrm{cx}}}$，有

$$\int_0^1 F_2^{-1}(H_1^{-1}(u))\mathrm{d}h(u)\leqslant\int_0^1 F_2^{-1}(H_2^{-1}(u))\mathrm{d}h(u)\tag{8}$$

结合式(7)—(8)，可以得到：

$$\int_0^1 F_1^{-1}(H_1^{-1}(u))\mathrm{d}h(u)\leqslant\int_0^1 F_2^{-1}(H_2^{-1}(u))\mathrm{d}h(u),$$

即 $X_2^{H_2}(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})$阶随机占优于 $X_1^{H_1}$。

证毕。

定义 2[15]　如果存在点 x_0 使得当 $x<x_0$ 时，$F_1(x)\geqslant F_2(x)$；当 $x>x_0$ 时，$F_1(x)\leqslant F_2(x)$，则称分布函数 F_1 单穿 F_2。

性质 3　设分布函数 F_1 单穿 F_2，如果扭曲函数 H 是凹的，那么对于任意的 $0\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}\leqslant1$，$F_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_2$ 隐含着 $H\circ F_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}H\circ F_2$。

证明　这里仅考虑 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$的情况，$\gamma_{\mathrm{cv}}\geqslant\gamma_{\mathrm{cx}}$的情况类似可以得到。由引理 1，$F_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_2$ 当且仅当对于任意的 $p\in[0,1]$，式(3)成立。由于 F_1 单穿 F_2，故 F_2^{-1} 也单穿 F_1^{-1}。设 F_1^{-1} 和 F_2^{-1} 的穿点为 p_0，此时式(3)变为：当 $0\leqslant p<p_0<1$ 时，

$$\int_{p_0}^1[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]\mathrm{d}u-\gamma_{\mathrm{cv}}\int_0^{p_0}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]\mathrm{d}u-(\gamma_{\mathrm{cx}}-\gamma_{\mathrm{cv}})\int_p^{p_0}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]\mathrm{d}u\leqslant0\tag{9}$$

当 $0<p_0<p\leqslant 1$ 时,

$$\int_{p_0}^{1}[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]\mathrm{d}u-\gamma_{\mathrm{cv}}\int_0^{p_0}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]\mathrm{d}u-\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\right)\int_{p_0}^{p}[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]\mathrm{d}u\leqslant 0 \tag{10}$$

当 $0<p_0=p<1$ 时,

$$\int_{p_0}^{1}[F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u)]\mathrm{d}u-\gamma_{\mathrm{cv}}\int_0^{p_0}[F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u)]\mathrm{d}u\leqslant 0,$$

也就是

$$\int_0^1[(F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}(F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u))_+]\mathrm{d}u\leqslant 0 \tag{11}$$

显然,对于 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$,式(11)成立隐含着式(9)和式(10)成立。

对 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$,要证 $H\circ F_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}H\circ F_2$,即证对于任意的 $p\in[0,1]$,

$$\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\int_0^p[F_1^{-1}H^{-1}(u)-F_2^{-1}H^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u+\int_p^1[F_1^{-1}H^{-1}(u)-F_2^{-1}H^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u-$$
$$\gamma_{\mathrm{cv}}\int_0^p[F_2^{-1}H^{-1}(u)-F_1^{-1}H^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u-\gamma_{\mathrm{cx}}\int_p^1[F_2^{-1}H^{-1}(u)-F_1^{-1}H^{-1}(u)]_+\,\mathrm{d}u\leqslant 0。$$

令 $H^{-1}(u)=v$,也就是证明

$$\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\int_0^{H^{-1}(p)}[F_1^{-1}(v)-F_2^{-1}(v)]_+\,\mathrm{d}H(v)+\int_{H^{-1}(p)}^1[F_1^{-1}(v)-F_2^{-1}(v)]_+\,\mathrm{d}H(v)-$$
$$\gamma_{\mathrm{cv}}\int_0^{H^{-1}(p)}[F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v)]_+\,\mathrm{d}H(v)-\gamma_{\mathrm{cx}}\int_{H^{-1}(p)}^1[F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v)]_+\,\mathrm{d}H(v)\leqslant 0 \tag{12}$$

又因为 H 单调增且 F_2^{-1} 单穿 F_1^{-1},类似上面的分析,可以得到:对于 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$,要证式(12)成立,只要证不等式

$$\int_0^1[(F_1^{-1}(v)-F_2^{-1}(v))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}(F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v))_+]\mathrm{d}H(v)\leqslant 0$$

成立。令

$$\varphi_1(v):=\int_0^v[(F_1^{-1}(u)-F_2^{-1}(u))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}(F_2^{-1}(u)-F_1^{-1}(u))_+]\mathrm{d}u,v\in[0,1],$$

则对于任意的 $v\in[0,1]$,因为 H 单调增且 F_2^{-1} 单穿 F_1^{-1},所以 $\varphi_1(v)\leqslant\varphi_1(1)\leqslant 0$。又因为 H 是凹的,所以

$$\int_0^1[(F_1^{-1}(v)-F_2^{-1}(v))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}(F_2^{-1}(v)-F_1^{-1}(v))_+]\mathrm{d}H(v)=\int_0^1 H'(v)\mathrm{d}\varphi_1(v)$$
$$=H'(1)\varphi_1(1)-\int_0^1\varphi_1(v)H''(v)\mathrm{d}v\leqslant 0。$$

证毕。

性质 4 设分布函数 F_1 和 F_2 的共同支撑集为 (a,b),$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$。如果 F_1 单穿 F_2,$F_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_2$,且扭曲函数 H 是凸的,那么对于任意的 $0\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}\leqslant 1$,$F_1\circ H\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_2\circ H$。

证明 这里仅考虑 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$ 的情况,$\gamma_{\mathrm{cv}}\geqslant\gamma_{\mathrm{cx}}$ 的情况类似可以得到。由定理 1,$F_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_2$ 当且仅当对于任意的 $t\in(a,b)$,

$$\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\int_a^t[F_2(x)-F_1(x)]_+\,\mathrm{d}x+\int_t^b[F_2(x)-F_1(x)]_+\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}}\int_a^t[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}x+\gamma_{\mathrm{cx}}\int_t^b[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

成立。由于 F_1 单穿 F_2,设 F_1 和 F_2 的穿点为 t_0,此时式(13)变为:当 $x<x_0$ 时,

$$\int_{t_0}^b[F_2(x)-F_1(x)]\mathrm{d}x-\gamma_{\mathrm{cv}}\int_a^{t_0}[F_1(x)-F_2(x)]\mathrm{d}x-(\gamma_{\mathrm{cx}}-\gamma_{\mathrm{cv}})\int_t^{t_0}[F_1(x)-F_2(x)]\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{14}$$

当 $x>x_0$ 时,

$$\int_{t_0}^{b}[F_2(x)-F_1(x)]\mathrm{d}x-\left(1-\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\right)\int_{t_0}^{t}[F_2(x)-F_1(x)]\mathrm{d}x-\gamma_{\mathrm{cv}}\int_{a}^{t_0}[F_1(x)-F_2(x)]\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{15}$$

当 $x=x_0$ 时，

$$\int_{t_0}^{b}[F_2(x)-F_1(x)]\mathrm{d}x-\gamma_{\mathrm{cv}}\int_{a}^{t_0}[F_1(x)-F_2(x)]\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

也就是

$$\int_{a}^{b}[(F_2(x)-F_1(x))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}(F_1(x)-F_2(x))_+]\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{16}$$

显然，对于 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$，式(16)成立隐含着式(14)和式(15)成立。

对于 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$，要证 $F_1\circ H\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_2\circ H$，即证

$$\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\int_{-\infty}^{t}[F_2\circ H(x)-F_1\circ H(x)]_+\,\mathrm{d}x+\int_{t}^{\infty}[F_2\circ H(x)-F_1\circ H(x)]_+\,\mathrm{d}x-$$
$$\gamma_{\mathrm{cv}}\int_{-\infty}^{t}[F_1\circ H(x)-F_2\circ H(x)]_+\,\mathrm{d}x-\gamma_{\mathrm{cx}}\int_{t}^{\infty}[F_1\circ H(x)-F_2\circ H(x)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant 0。$$

或者，等价地证

$$\frac{\gamma_{\mathrm{cv}}}{\gamma_{\mathrm{cx}}}\int_{a}^{t}[F_2(x)-F_1(x)]_+\,\mathrm{d}H^{-1}(x)+\int_{t}^{b}[F_2(x)-F_1(x)]_+\,\mathrm{d}H^{-1}(x)-$$
$$\gamma_{\mathrm{cv}}\int_{a}^{t}[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}H^{-1}(x)-\gamma_{\mathrm{cx}}\int_{t}^{b}[F_1(x)-F_2(x)]_+\,\mathrm{d}H^{-1}(x)\leqslant 0 \tag{17}$$

又因为 F_1 单穿 F_2，类似上面的分析，可以得到：对于 $\gamma_{\mathrm{cv}}<\gamma_{\mathrm{cx}}$，要证式(17)成立，只要证不等式

$$\int_{a}^{b}[(F_2(x)-F_1(x))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}(F_1(x)-F_2(x))_+]\mathrm{d}H^{-1}(x)\leqslant 0$$

成立。令

$$\varphi_2(u):=\int_{a}^{u}[(F_2(x)-F_1(x))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}(F_1(x)-F_2(x))_+]\mathrm{d}u,u\in(a,b),$$

则对于任意的 $u\in(a,b)$，因为 F_1 单穿 F_2，所以 $\varphi_2(u)\leqslant\varphi_2(b)\leqslant 0$。定义 $\eta(t)=H^{-1}(t),t\in(a,b)$，由于 H 是凸的，则 H^{-1}是凹的，从而

$$\int_{a}^{b}[(F_2(x)-F_1(x))_+-\gamma_{\mathrm{cv}}[F_1(x)-F_2(x)]_+]\mathrm{d}H^{-1}(x)=\int_{a}^{b}\eta'(u)\mathrm{d}\varphi_2(u)$$
$$=\eta'(b)\varphi_2(b)-\int_{a}^{b}\eta''(u)\varphi_2(u)\mathrm{d}u\leqslant 0。$$

证毕。

3　在可靠性理论中的应用

次序统计量广泛应用于可靠性、数据分析、风险管理等应用概率领域。近二十年来，已有大量关于次序统计量随机比较的文献[12]。设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体分布为 F 的 n 个简单随机样本，用 $X_{1:n}\leqslant X_{2:n}\leqslant\cdots\leqslant X_{n:n}$表示其次序统计量。众所周知，$X_{k:n}$的分布函数为 $F_{\mathrm{B}}\circ\mathrm{F}$，这里的 F_{B} 是表示参数为$(k,n-k-1)$的 *beta* 分布函数。

在可靠性理论中，k-n 系统是指一个由 n 个元件组成的系统，当且仅当 n 个元件中至少有 $k(0<k\leqslant n)$个元件工作时，系统才能正常运行。次序统计量与 k-n 系统的寿命有着密切的联系。考虑一个 k-n 系统，假设组成的各元件工作相互独立且具有相同的寿命分布，用 $T_{k:n}$表示 k-n 系统的寿命，则 $T_{k:n}$与 $X_{(n-k+1):n}$同分布。在实际应用中，为了研究 k-n 系统的老化问题，经常会遇到比较两个不同 k-n 系统的寿命问题。Lando 等[12]使用 SSD 法则比较了两个不同 k-n 系统的寿命，并且得到了一个基于元件寿命分布的充分条件。下面利用组合分数阶随机占优法则在扭曲变换下的性质来研究两个 k-n 系统的寿命比较问题。首先，简要的回顾一下常见的寿命分布的定义。

定义 3[12]　设 X 是具有分布函数 F 的随机变量，

a)如果 F 在其支撑上为凸的,则称 X 或 F 为凸的,简记为 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{C}}$;

b)如果 $\log(F/\bar{F})$在 F 的支撑上为凸的,则称 X 或 F 为 logist-凸的,简记为 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{CL}}$;

c)如果 $F/\bar{F}$ 在 F 的支撑上为凸的,则称 X 或 F 为 odds-凸的,简记为 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{CO}}$;

d)如果 $\bar{F}(x)$是对数凸的,则称 X 或 F 为递增的故障率,简记为 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{IFR}}$。

为了比较两个不同 k-n 系统的寿命,本文探索了次序统计量满足组合分数阶随机占优序的一些充分条件,并且需要下面的引理。

引理 2[19] 设 X_1、X_2 是两个随机变量,$\mathrm{E}(X_1)=\mu_1$,$\mathrm{E}(X_2)=\mu_2$,$\mathrm{V}(X_1)=\sigma_1^2$,$\mathrm{V}(X_2)=\sigma_2^2$,且 $\mu_2>\mu_1$。定义

$$t:=\frac{\mu_2-\mu_1}{\sigma_2+\sigma_1},$$

$$\gamma^*(t)=\frac{1}{2+2t(t+\sqrt{t^2+1})},$$

则对于任意的 $\gamma^*(t)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1$,$X_1\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_2$。

设 $\mathrm{B}_{i,n}\sim beta(i,n-i+1)$,显然

$$\mu_{\mathrm{B}}(i,n):=\mathrm{E}(\mathrm{B}_{i,n})=\frac{i}{n+1},\sigma_{\mathrm{B}}^2(i,n):=\mathrm{V}(\mathrm{B}_{i,n})=\frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}。$$

为了方便起见,令

$$t_1=\frac{\mu_{\mathrm{B}}(j,m)-\mu_{\mathrm{B}}(i,n)}{\sigma_{\mathrm{B}}(j,m)+\sigma_{\mathrm{B}}(i,n)}。$$

引理 3[12] 设 $\mathrm{B}_{i,n}\sim beta(i,n-i+1)$,$1\leqslant i\leqslant n$。

a)如果 $h_2(p)=p/(1-p)$,则

$$\mu_{h_2}(i,n):=\mathrm{E}[h_2(\mathrm{B}_{i,n})]=\frac{i}{n-i},\sigma_{h_2}^2:=\mathrm{V}[h_2(\mathrm{B}_{i,n})]=\frac{-4i^2+3ni+2n-2i}{(n-i+1)(n-i)^2}。$$

b)如果 $h_3(p)=\log[p/(1-p)]$,则

$$\mu_{h_3}(i,n):=\mathrm{E}[h_3(\mathrm{B}_{i,n})]=\psi(i)-\psi(n-i+1),$$

$$\sigma_{h_3}^2(i,n):=\mathrm{V}[h_3(\mathrm{B}_{i,n})]=\psi'(i)+\psi'(n-i+1),$$

其中 $\psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$,$x>0$。

c)如果 $h_4(p)=-\log(1-p)$,则

$$\mu_{h_4}(i,n):=\mathrm{E}[h_4(\mathrm{B}_{i,n})]=\psi(n+1)-\psi(n-i+1),$$

$$\sigma_{h_4}^2(i,n):=\mathrm{V}[h_4(\mathrm{B}_{i,n})]=\psi'(n-i+1)-\psi'(n+1)。$$

性质 5 对于任意的 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{C}}$,如果 $n-m<i-j<0$ 且 $i/(n+1)<j/(m+1)$,那么对于任意的 $\gamma^*(t)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1$,$X_{i:n}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_{j:m}$。

证明 设 $\mathrm{B}_{i,n}\sim beta(i,n-i+1)$,$\mathrm{B}_{j,m}\sim beta(j,m-j+1)$。由于 $n-m<i-j<0$,故 $F_{\mathrm{B}_{i,n}}$ 单穿 $F_{\mathrm{B}_{j,m}}$。又因为 $i/(n+1)<j/(m+1)$,即 $\mu_{\mathrm{B}}(i,n)=\mathrm{E}(\mathrm{B}_{i,n})<\mathrm{E}(\mathrm{B}_{j,m})=\mu_{\mathrm{B}}(j,m)$。因此,由引理 2 可以得到对于任意的 $\gamma^*(t_1)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1$,$\mathrm{B}_{i,n}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}\mathrm{B}_{j,m}$。

另一方面,$X_{i:n}$的分布函数可以表示为 $F_{\mathrm{B}_{i,n}}\circ F$。由于 F 是凸的,由性质 4 有 $F_{\mathrm{B}_{i,n}}\circ F\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_{\mathrm{B}_{j,m}}\circ F$,这就等价于 $X_{i:n}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_{j:m}$。

证毕。

定义

$$t_\ell=\frac{\mu_{h_\ell}(j,m)-\mu_{h_\ell}(i,n)}{\sigma_{h_\ell}(j,m)+\sigma_{h_\ell}(i,n)},\ell=2,3,4,$$

其中 $\mu_{h_\ell}(\cdot,\cdot)$和 $\sigma_{h_\ell}(\cdot,\cdot)$由引理 3 定义。

性质 6 假设 $n-m<i-j<0$,定义 $\psi(x)=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$,$x>0$。

a)对任意的 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{CO}}$，如果 $i/(n-i)<j/(m-j)$，那么

$$X_{i:n}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_{j:m},\gamma^*(t_2)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1;$$

b)对任意的 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{CL}}$，如果 $\psi(i)-\psi(n-i+1)<\psi(j)-\psi(m-j+1)$，那么

$$X_{i:n}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_{j:m},\gamma^*(t_3)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1;$$

c)对任意的 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{IFR}}$，如果 $\psi(n+1)-\psi(n-i+1)<\psi(m+1)-\psi(m-j+1)$，那么

$$X_{i:n}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_{j:m},\gamma^*(t_4)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1。$$

证明　a)由于 $h_2(p)=p/(1-p)$，$p\in(0,1)$，它的反函数 $h_2^{-1}(x)=x/(1+x)$ 在 $x\in\mathbf{R}_+$ 上是递增的。注意到 $F_{\mathrm{B}_{i,n}}\circ h_2^{-1}$ 是随机变量 $h_2(\mathrm{B}_{i,n})$ 的分布函数，$i/(n-i)<j/(m-j)$，由引理 2 和引理 3 有，

$$F_{\mathrm{B}_{i,n}}\circ h_2^{-1}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_{\mathrm{B}_{j,m}}\circ h_2^{-1},\gamma^*(t_2)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1。$$

$n-m<i-j<0$ 意味着 $F_{\mathrm{B}_{i,n}}$ 单穿 $F_{\mathrm{B}_{j,m}}$。因此，$F_{\mathrm{B}_{i,n}}\circ h_2^{-1}$ 单穿 $F_{\mathrm{B}_{j,m}}\circ h_2^{-1}$。又 $F\in\mathcal{F}_{\mathrm{CO}}$，则 $h_2\circ F$ 是凸的，由性质 4 得，$\gamma^*(t_2)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1$，

$$F_{\mathrm{B}_{i,n}}\circ h_2^{-1}\circ h_2\circ F\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}F_{\mathrm{B}_{j,m}}\circ h_2^{-1}\circ h_2\circ F,$$

即 $X_{i:n}\leqslant_{(1+\gamma_{\mathrm{cv}},1+\gamma_{\mathrm{cx}})-\mathrm{SD}}X_{j:m},\gamma^*(t_2)\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}<1$。

b)和 c)证明同 a)类似，略。

证毕。

4　结　语

随机占优理论不需要对风险的分布作任何假设，且对决策者的效用也只需很少的信息，从理论角度看，它是一种具有良好定义的比较风险的工具。此外，随机占优理论与期望效用理论一样，有明显的经济学含义，其中：FSD 是偏好财富决策者的决策准则；SSD 是风险厌恶决策者的有效准则。因此发展随机占优理论与应用意义非凡。本文在 Müller 等[11]研究的基础上，为了给几乎厌恶风险但在某些财富水平又喜爱风险的决策者提供合理、有效地比较复杂风险的标准，提出了扭曲组合分数阶随机占优法则。本文通过引入扭曲期望，不仅研究了组合分数阶随机占优法则在扭曲变化下的封闭性质，而且得到了扭曲组合分数阶随机占优法则的一个简单易于处理的等价刻画，为该随机占优法则能有效地比较更为复杂的风险提供了必要的理论依据。另外，本文将该研究的一些主要的结果应用于两个 k-n 系统的可靠性比较，从应用的角度说明了扭曲组合随机占优法则在比较复杂风险时的有效性。

本文研究的是 $0\leqslant\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}\leqslant1$ 时的扭曲组合分数阶随机占优性质，对于 $\gamma_{\mathrm{cv}},\gamma_{\mathrm{cx}}>1$ 的高分数阶扭曲组合随机占优性质有待后续研究。

参考文献：

[1] Hanoch G, Levy H. The efficiency analysis of choices involving risk[J]. The Review of Economic Studies, 1969, 36(3): 335-346.

[2] Müller A, Stoyan D. Comparison Methods for Stochastic Models and Risks[M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2002: 103-178.

[3] Levy H. Almost stochastic dominance: ASD[M]//Levy H. Stochastic Dominance. Cham: Springer, 2016: 201-225.

[4] Hadar J, Russell W R. Rules for ordering uncertain prospects[J]. American Economic Review, 1969, 59(1): 25-34.

[5] Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing risk: I. A definition[J]. Journal of Economic Theory, 1970, 2(3): 225-243.

[6] 胡云鹤，范堃. 几乎随机占优刻画再讨论[J]. 应用概率统计，2019，35(4)：433-440.

[7] 杨柳，申飞飞. 考虑交易费用的二阶随机占优投资组合风险控制模型[J]. 应用概率统计，2017，33(2)：111-124.

[8] 付志能，徐维军，张卫国，等. 基于随机占优的股指期货市场有效性分析[J]. 运筹与管理，2020，29(3)：169-176.

[9] Lehmann E L, Rojo J. Invariant directional orderings[J]. The Annals of Statistics, 1992, 20(4): 2100-2110.

[10] Leshno M, Levy H. Preferred by "all" and preferred by "most" decision makers: almost stochastic dominance[J]. Management Science, 2002, 48(8): 1074-1085.

[11] Müller A, Scarsini M, Tsetlin I, et al. Between first and second-order stochastic dominance[J]. Management Science, 2017, 63(9): 2933-2947.

[12] Lando T, Arab I, Oliveira P E. Second-order stochastic comparisons of order statistics[J]. Statistics, 2021: 1960527.
[13] Yaari M E. The dual theory of choice under risk[J]. Econometrica, 1987, 55(1): 95-115.
[14] Levy H, Wiener Z. Stochastic dominance and prospect dominance with subjective weighting functions[J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1998, 16(2): 147-163.
[15] Lando T, Bertoli-Barsotti L. Distorted stochastic dominance: A generalized family of stochastic orders[J]. Journal of Mathematical Economics, 2020, 90: 132-139.
[16] Wang S. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1995, 17(1): 43-54.
[17] Denuit M, Dhaene J, Goovaerts M, et al. Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models[M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2005: 3-57.
[18] Donaldson D, Weymark J A. Ethically flexible gini indices for income distributions in the continuum[J]. Journal of Economic Theory, 1983, 29 (2), 353 - 358.
[19] Müller A, Scarsini M, Tsetlin I, et al. Ranking distributions when only means and variances are known[J/OL]. SSRN Electronic Journal. (2019-08-21)[2021-06-29]. https://doi.org/10.2139/ssrn.3440103.

(责任编辑:康 锋)