



诺伊曼边界条件下分数阶次扩散方程的紧差分格式

邱 敏, 程秀俊

(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘 要: 对于诺伊曼边界条件下时间分数阶次扩散方程, 提出了紧差分格式, 并用该格式数值求解方程。首先, 由于该方程在时间为 0 处解的不光滑性, 因此使用非一致网格上的 L1 格式对时间方向进行离散, 一致网格上的紧差分格式对空间方向进行离散, 建立紧差分格式; 其次, 通过离散的能量方法, 给出该格式在二范数意义下的收敛性分析; 最后, 通过 Matlab 进行数值模拟, 验证该格式的有效性。该结果进一步地丰富了分数阶方程的数值算法。

关键词: 诺伊曼边界条件; 分数阶次扩散方程; 紧差分格式; Caputo 分数阶导数

中图分类号: O242.2

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2021)03-0234-08

A compact difference scheme for fractional sub-diffusion equations with Neumann boundary conditions

QIU Min, CHENG XiuJun

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech university, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In this paper, a compact difference scheme is proposed for fractional sub-diffusion equations with Neumann boundary conditions, and used to solve the equation numerically. First of all, since the solution of this equation is not smooth when the time is 0, the L1 scheme on the non-uniform mesh is used to discretize the temporal direction, and the compact difference scheme on the uniform mesh is used to discretize the spatial direction, and a compact difference scheme is established. Secondly, a convergence analysis of this scheme in the sense of two-norm is given, with discrete energy method. Finally, numerical simulation is carried out by MATLAB to verify the effectiveness of this scheme. The results further enrich the numerical algorithm of fractional equation.

Key words: Neumann boundary conditions; fractional sub-diffusion equation; compact difference scheme; Caputo fractional derivative

0 引 言

对于半导体材料中杂质扩散、气体扩散等高斯正常扩散现象, 一般采用整数阶微分方程建立的数学模型来模拟; 而对于具有遗传性、记忆性的非高斯反常扩散现象, 如古气候在冰河时期和间冰期的快速切换^[1]、信天翁的觅食轨迹^[2]等, 则采用分数阶微分方程建立的数学模型更加精确。关于分数阶微分方程, 通常只能对特殊类型的方程理论求解, 且求解方法具有一定的限制要求。因此, 数值算法成为求解分数阶微分方程的重要工具之一。

收稿日期: 2020-10-22 网络出版日期: 2021-02-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(11901527); 浙江理工大学科研启动基金(19062116-Y)

作者简介: 邱 敏(1998-), 女, 重庆开州人, 本科生, 主要从事微分方程数值解方面的研究。

通信作者: 程秀俊, E-mail: xiujuncheng@zstu.edu.cn

对于 Caputo 分数阶导数, 应用最广泛的格式之一为经典的 L1 离散格式, 关于该格式的收敛性结果可参考文献[3]。Gao 等^[4]通过线性和二次插值组合, 提出了 L1-2 离散格式。Alikhanov^[5]借助能量不等式方法, 构造了 L2-1_σ 近似公式, 其中 $\sigma = 1 - \alpha/2$ 。Ren 等^[6]对时间分数阶次扩散方程采用经典 L1 离散格式和紧差分格式进行离散, 并证明该格式在 L2 范数下的收敛性。Cao 等^[7]对时间分数阶反应-次扩散方程构造了紧差分格式, 其中在时间方向上采用一致网格上的 L1 格式进行离散, 在空间方向上采用紧差分格式, 并给出在 L2 范数下的收敛性证明。Vong 等^[8]对诺伊曼边界条件下的次扩散空间变系数方程提出了紧差分格式, 并利用该格式的矩阵形式证明了收敛性。

上述关于分数阶次扩散方程的时间方向离散格式都假设, 在初始时间 $t=0$ 时, 解是光滑的, 但由于 Caputo 分数阶次扩散方程存在这样的基本特征^[9], 即: 在时间趋于 0 时, 解缺乏光滑性, 而时间远大于 0 时, 解是光滑的。因此, 初始层的误差将导致数值方法的精度降低。克服该问题的有效方法是在非均匀网格上对分数阶导数进行近似^[10-11], 或者在初始层处进行修正^[12-13]。目前关于时间分数阶次扩散方程大多数数值格式都假设解光滑条件, 而对于假设解不光滑的条件下的数值算法研究较少。

本文对诺伊曼边界条件下的分数阶次扩散方程进行数值求解。首先假设在非光滑解情况下, 采用非均匀网格上的 L1 格式离散时间分数阶导数, 采用均匀网格上的紧差分格式近似空间导数, 建立该问题的紧差分格式; 然后借助该格式系数矩阵的性质和离散分数阶 Gronwall 不等式^[14], 给出该格式的收敛性证明; 最后通过数值算例验证该格式的准确性和有效性。

1 数值格式的建立

考虑如下诺伊曼边界条件下的分数阶次扩散方程:

$${}_0 D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} + f(x, t), x \in (a, b), t \in (0, T] \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), x \in (a, b) \quad (2)$$

$$u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, t \in (0, T] \quad (3)$$

其中: α 阶 Caputo 分数阶导数进一步定义为:

$${}_0 D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{1}{(t-s)^\alpha} ds, 0 < \alpha < 1;$$

其中: $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数; $f(x, t)$ 和 $\varphi(x)$ 是已知光滑函数。

对于差分格式的建立, 先将区间 (a, b) 分为 M 等份, 空间步长 $h = (b-a)/M$, 其中 M 为正整数, 网格点 $x_i = a + ih$ 。再将区间 $(0, T]$ 分为 N 份, 时间步长 $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $1 \leq n \leq N$, 其中 N 为正整数。定义 $\Omega_\tau = \{t_n \mid t_n = T(n/N)^\delta; 0 \leq n \leq N, \delta \geq 1\}$, $\Omega_h = \{x_i \mid x_i = a + ih, 0 \leq i \leq M\}$, 网格函数空间 $V_h = \{v \mid v = \{v_i\}$ 是定义在 $\Omega_h \times \Omega_\tau$ 上的网格函数。对网格函数 $v = \{v_i^n \mid 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N\}$, 引入如下记号:

$$\delta_x v_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{h}(v_i^n - v_{i-1}^n), v_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_i^{n+1} + v_i^n), D_N^a v_i^n = a_{n,0} v_i^n - \sum_{l=1}^{n-1} (a_{n,n-l-1} - a_{n,n-l}) v_i^l - a_{n,n-1} v_i^0,$$

$$\delta_x^2 v_i^n = \begin{cases} \frac{2}{h} \delta_x v_{\frac{1}{2}}^n, & i=0, \\ \frac{1}{h} (\delta_x v_{i+\frac{1}{2}}^n - \delta_x v_{i-\frac{1}{2}}^n), & 1 \leq i \leq M-1, \\ -\frac{2}{h} \delta_x v_{M-\frac{1}{2}}^n, & i=M, \end{cases} A v_i^n = \begin{cases} \frac{1}{6} (5v_0^n + v_1^n), & i=0, \\ \frac{1}{12} (v_{i-1}^n + 10v_i^n + v_{i+1}^n), & 1 \leq i \leq M-1, \\ \frac{1}{6} (v_{M-1}^n + 5v_M^n), & i=M, \end{cases}$$

其中 $a_{n,n-k} = (\omega_{2-\alpha}(t_n - t_{k-1}) - \omega_{2-\alpha}(t_n - t_k))/\tau_k$ 且 $\omega_\beta(t) = t^{\beta-1}/\Gamma(\beta)$ 。特别地, $a_{n,0} = 1/\mu$, 其中 $\mu = \tau_n^\alpha \Gamma(2-\alpha)$ 。

对 $\forall u, v \in V_h$, 定义如下离散内积:

$$(u, v) = h \sum_{i=0}^M [J^2]_{i+1} u_i v_i = h u^T J^2 v, \|u\| = \sqrt{(u, u)}, \langle u, v \rangle = h \sum_{i=0}^M u_i v_i, |u|_* = \sqrt{\langle u, u \rangle},$$

其中: J 是对角线为 $(1/\sqrt{2}, 1, \dots, 1, 1/\sqrt{2})$, 其余元素为 0 的对角矩阵。

对于 Caputo 分数阶导数,采用如下非一致网格的 L1 格式进行离散:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha u(x, t_n) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_n} \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{1}{(t_n - s)^\alpha} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=1}^n \frac{u(x, t_j) - u(x, t_{j-1})}{\tau_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{(t_n - s)^\alpha} ds + \gamma^n \\ &= \sum_{j=1}^n a_{n,n-j} (u(x, t_j) - u(x, t_{j-1})) + \gamma^n \end{aligned} \quad (4)$$

其中: γ^n 为截断误差。

在给出格式之前,先引入引理 1。

引理 1^[6] 定义 $\theta(s) = (1-s)^3[5-3(1-s)^2]$ 。

a) 如果 $g(x) \in C^6[x_0, x_1]$, 则:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{5}{6} g''(x_0) + \frac{1}{6} g''(x_1) \right] - \frac{2}{h} \left[\frac{g(x_1) - g(x_0)}{h} - g'(x_0) \right] = \\ &\quad - \frac{h}{6} g'''(x_0) + \frac{h^3}{90} g^{(5)}(x_0) + \frac{h^4}{180} \int_0^1 g^{(6)}(x_0 + sh) \theta(s) ds. \end{aligned}$$

b) 如果 $g(x) \in C^6[x_{M-1}, x_M]$, 则:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{6} g''(x_{M-1}) + \frac{5}{6} g''(x_M) \right] - \frac{2}{h} \left[g'(x_M) - \frac{g(x_M) - g(x_{M-1})}{h} \right] = \\ &\quad \frac{h}{6} g'''(x_M) + \frac{h^3}{90} g^{(5)}(x_M) + \frac{h^4}{180} \int_0^1 g^{(6)}(x_M + sh) \theta(s) ds. \end{aligned}$$

c) 如果 $g(x) \in C^6[x_{i-1}, x_{i+1}]$, $1 \leq i \leq M-1$, 则:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} [g''(x_{i-1}) + 10g''(x_i) + g''(x_{i+1})] &= \frac{g(x_{i-1}) - 2g(x_i) + g(x_{i+1}))}{h^2} + \\ &\quad \frac{h^4}{360} \int_0^1 [g^{(6)}(x_i - sh) + g^{(6)}(x_i + sh)] \theta(s) ds. \end{aligned}$$

接下来,构造求解式(1)–(3)的紧差分格式。记 $u(x_i, t_n) = U_i^n$,考虑式(1)在点 (x_i, t_n) , 有:

$${}_0D_t^\alpha u(x_i, t_n) = u_{xx}(x_i, t_n) + f(x_i, t_n), 0 \leq i \leq M, 1 \leq n \leq N.$$

时间方向上采用非一致网格 L1 格式(1)进行离散,有:

$$D_N^\alpha u(x_i, t_n) = u_{xx}(x_i, t_n) + f(x_i, t_n) - \gamma^n, 0 \leq i \leq M, 1 \leq n \leq N.$$

将紧算子 A 作用于上述方程的两边,得:

$$AD_N^\alpha u(x_i, t_n) = Au_{xx}(x_i, t_n) + Af(x_i, t_n) - A\gamma^n, 0 \leq i \leq M, 1 \leq n \leq N \quad (5)$$

当 $i=0$, 根据引理 1, 有:

$$AD_N^\alpha U_0^n = \frac{2}{h} [\delta_x U_{\frac{1}{2}}^n - U_x(x_0, t_n)] - \frac{h}{6} U_{xxx}(x_0, t_n) + \frac{h^3}{90} U_{xxxx}(x_0, t_n) + (R_x)_0^n + Af(x_0, t_n) - A\gamma^n \quad (6)$$

其中:

$$(R_x)_0^n = \frac{h^4}{180} \int_0^1 u^{(6)}(x_0 + sh) \theta(s) ds.$$

对方程(1)关于 x 方向求一阶导,有:

$${}_0^C D_t^\alpha u_x(x, t) = u_{xxx}(x, t) + f_x(x, t),$$

令 $x \rightarrow x_0^+$, 并结合边界条件(3), 得:

$$u_{xxx}(x_0, t) = -f_x(x_0, t) \quad (7)$$

对方程(1)关于 x 方向求三阶导,得:

$${}_0^C D_t^\alpha u_{xxx}(x, t) = u_{xxxx}(x, t) + f_{xxx}(x, t).$$

令 $x \rightarrow x_0^+$, 注意到边界条件(3)和式(7), 因此,

$$u_{xxxx}(x_0, t) = -{}_0^C D_t^\alpha f_x(x_0, t) - f_{xxx}(x_0, t) \quad (8)$$

将式(7)–(8)代入(6), 并注意边界条件(3), 得:

$$AD_N^a U_0^n = \frac{2}{h} \delta_x U_{\frac{1}{2}}^n + \frac{h}{6} f_x(x_0, t_n) - \frac{h^3}{90} [{}_0^C D_t^\alpha f_x(x_0, t_n) + f_{xxx}(x_0, t_n)] + (R_x)_0^n + Af(x_0, t_n) - A\gamma^n \quad (9)$$

同样的, 对于 $i=M$, 有:

$$AD_N^a U_M^n = -\frac{2}{h} \delta_x U_{M-\frac{1}{2}}^n - \frac{h}{6} f_x(x_M, t_n) + \frac{h^3}{90} [{}_0^C D_t^\alpha f_x(x_M, t_n) + f_{xxx}(x_M, t_n)] + (R_x)_M^n + Af(x_M, t_n) - A\gamma^n \quad (10)$$

其中: $(R_x)_M^n = -h^4/360 \int_0^1 u^{(6)}(x_M - sh, t_n) \theta(s) ds$.

对 $1 \leq i \leq M$, 使用引理1和式(4), 则有:

$$AD_N^a U_i^n = \delta_x^2 U_i^n + (R_x)_i^n + Af(x_i, t_n) - A\gamma^n, 1 \leq i \leq M-1, 1 \leq n \leq N \quad (11)$$

其中: $(R_x)_i^n = \frac{h^4}{360} \int_0^1 [u^{(6)}(x_i - sh, t_n) + u^{(6)}(x_i + sh, t_n)] \theta(s) ds$

忽略式(9)–(11)中无穷小量 $(R_x)_i^n - A\gamma^n$, 用数值解 u_i^n 替代真解 U_i^n , 建立如下紧差分格式:

$$AD_N^a u_i^n = \delta_x^2 u_i^n + Af_i^n + z_i^n, 0 \leq i \leq M, 1 \leq n \leq N \quad (12)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), 0 \leq i \leq M \quad (13)$$

其中:

$$z_0^n = -\frac{h}{6} f_x(x_0, t_n) - \frac{h^3}{90} [{}_0^C D_t^\alpha f_x(x_0, t_n) + f_{xxx}(x_0, t_n)],$$

$$z_M^n = \frac{h}{6} f_x(x_M, t_n) + \frac{h^3}{90} [{}_0^C D_t^\alpha f_x(x_M, t_n) + f_{xxx}(x_M, t_n)],$$

$$z_i^n = 0, 1 \leq i \leq M-1.$$

2 收敛性分析

这一部分对构造的数值格式(12)–(13)进行收敛性分析。在给出收敛性结果前, 先引入下述记号和引理。记

$$P = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 10 & 2 & & & \\ 1 & 10 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & 2 & 10 \end{bmatrix}_{M+1}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 2 & -2 \end{bmatrix}_{M+1},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & \sqrt{2} & & & \\ \sqrt{2} & 10 & 1 & & \\ & 1 & 10 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & 1 & 10 & \sqrt{2} \\ & & & & & & \sqrt{2} & 10 \end{bmatrix}_{M+1}, \quad T = \begin{bmatrix} -2 & \sqrt{2} & & & \\ \sqrt{2} & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 & \sqrt{2} \\ & & & & & & \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}_{M+1},$$

通过计算检验可知 $P = J^{-1}QJ$ 和 $B = J^{-1}TJ$ 。

记:

$$P_{n,n-k} = \Gamma(2-\alpha) \begin{cases} \tau_n^\alpha, 1 \leq k = n, \\ \tau_k^\alpha \sum_{j=k+1}^n (\alpha_{n,k+1} + \alpha_{n,j}) P_{n,n-j}, 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

引理2 对任意的网格函数 $u^n \in V_h$, 有:

$$(Au^n, u^n) = |Du^n|_*^2, \quad \frac{1}{2} \|u^n\|^2 \leq |Du^n|_*^2 \leq 2 \|u^n\|^2.$$

证明 由

$$JQJ = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ 1 & 10 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & 1 & 5 \end{bmatrix}_{M+1},$$

通过 Gersgorin 圆盘定理, 得 JQJ 的特征值是在 $1/2$ 和 1 之间, 则 JQJ 为对称正定矩阵。

$$(Au^n, u^n) = h (Pu^n)^T J^2 u^n = h (u^n)^T JQ^T J^{-1} J^2 u^n = h (u^n)^T JQ^T Ju^n = |Du^n|_*^2,$$

其中矩阵 D 由 $JQ^T J$ 的 Cholesky 分解得到, 即 $JQJ = D^T D$ 。

由 $\|u^n\|^2 \leq |u^n|_*^2 \leq 2 \|u^n\|^2$ 可得:

$$\frac{1}{2} \|u^n\|^2 \leq \frac{1}{2} |u^n|_*^2 \leq |Du^n|_*^2 \leq |u^n|_*^2 \leq 2 \|u^n\|^2,$$

则引理得证。

引理3 对任意的网格函数 $u^n \in V_h$, 有:

$$-(\delta_x^2 u^n, u^n) = \frac{1}{h^2} |Gu^n|_*^2.$$

证明 由内积的定义, 有:

$$-(\delta_x^2 u^n, u^n) = -\frac{1}{h^2} (Bu^n)^T J^2 u^n = -\frac{1}{h^2} (u^n)^T JT^T Ju^n = \frac{1}{h^2} |Gu^n|_*^2,$$

其中矩阵 G 由对称正定矩阵 $-JT^T J$ 的 Cholesky 分解得到, 即 $-JT^T J = G^T G$ 。

引理4^[14] 假设 $u \in C^2(0, T] \cap C[0, T]$, 且存在正常数 $C_u > 0$, 满足下列估计式:

$$|u_{tt}(x, t)| \leq C_u (1 + t^{\alpha-2}), \quad 0 \leq t \leq T,$$

则有:

$$\sum_{j=1}^n P_{n,n-j} \leq \frac{t_n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

和

$$\sum_{j=1}^n P_{n,n-j} |\gamma^j| \leq C_u T^\alpha N^{-\delta\alpha} + 4^{\delta-1} C_u T^\alpha \delta^2 N^{-\min\{\delta\alpha, 2-\alpha\}}, \quad n \geq 1,$$

其中 γ^j 的定义参见式(4)。

引理5^[14] 假设非负序列 $\{\omega^n, \xi^n, y^n\}_{n=0}^N$ 满足:

$$D_N^{\alpha} (\omega^n)^2 \leq \lambda_1 (\omega^n)^2 + (\xi^n + y^n) \omega^n, \quad 1 \leq n \leq N,$$

其中 λ_1 为与时间步长 τ_n 无关的非负常数, 则有:

$$\omega^n \leq 2E_\alpha(2\lambda t_n^\alpha)(\omega^0 + \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{l=1}^j p_{j,j-l} \xi^l + \frac{t_n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \max_{1 \leq l \leq n} y^l), \quad 1 \leq n \leq N,$$

其中时间步长 $\tau_n \leq (2\lambda(2-\alpha))^{-\frac{\alpha}{2}}$, $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(1+k\alpha)}$ 是 Mittag-Leffler 函数且 $\lambda \leq \lambda_1$ 。

定理1 假设系统(1)–(3)存在唯一的解, 并且满足下列估计式:

$$\|u_{tt}\|_{L^\infty(a,b)} \leq C(1 + t^{\alpha-2}),$$

则式(12)–(13)有唯一的数值解 u^n 存在且满足:

$$|e^n|_* \leq C(N^{-\min\{\delta\alpha, 2-\alpha, 2\alpha\}} + h^4), \quad \|e^n\| \leq C(N^{-\min\{\delta\alpha, 2-\alpha, 2\alpha\}} + h^4),$$

其中: $e^n = U^n - u^n$, 常数 C 为与步长 h 和 N 无关的正常数。

证明 将系统(1)与式(12)相减, 得到下列误差方程:

$$AD_N^\alpha e_i^n = \delta_x^2 e_i^n + R_i^n + A\gamma_i^n \quad (14)$$

将式(14)两边与 e^n 作内积, 可得:

$$(AD_N^\alpha e^n, e^n) = (\delta_x^2 e^n, e^n) + (R^n, e^n) + (A\gamma^n, e^n) \quad (15)$$

现对方程(15)中的每一项进行分析, 通过柯西不等式, 有:

$$\begin{aligned} (AD_N^\alpha e^n, e^n) &= (a_{n,0} A e^n - \sum_{l=1}^{n-1} (a_{n,n-l-1} - a_{n,n-l}) A e^l - a_{n,n-1} A e^0, e^n) \geq a_{n,0} \|De^n\|_*^2 - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} (a_{n,n-l-1} - a_{n,n-l}) (\|De^l\|_*^2 + \|De^n\|_*^2) - \frac{a_{n,n-1}}{2} (\|De^0\|_*^2 + \|De^n\|_*^2) = \\ &\quad \frac{a_{n,0}}{2} \|De^n\|_*^2 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} (a_{n,n-l-1} - a_{n,n-l}) \|De^l\|_*^2 - \frac{a_{n,n-1}}{2} \|De^0\|_*^2 = \frac{1}{2} D_N^\alpha \|De^n\|_*^2 \end{aligned} \quad (16)$$

通过引理3, 有:

$$-(\delta_x^2 e^n, e^n) = 1/h^2 \|Ge^n\|_*^2 \quad (17)$$

借助柯西不等式和引理2, 下列估计式成立:

$$(R^n, e^n) \leq \|R^n\|_* \|e^n\|_* \leq \sqrt{2} \|R^n\|_* \|De^n\|_* \quad (18)$$

$$(A\gamma^n, e^n) \leq \|D\gamma^n\|_* \|De^n\|_* \quad (19)$$

将式(16)–(19)代入(15)中, 可得:

$$\frac{1}{2} D_N^\alpha \|De^n\|_*^2 + \frac{1}{h^2} \|Ge^n\|_*^2 \leq \sqrt{2} \|R^n\|_* \|De^n\|_* + \|D\gamma^n\|_* \|De^n\|_*,$$

即:

$$D_N^\alpha \|De^n\|_*^2 \leq 2\sqrt{2} \|R^n\|_* \|De^n\|_* + 2 \|D\gamma^n\|_* \|De^n\|_*,$$

通过引理5, 则有 $\|De^n\|_* \leq 2E_\alpha(2t_n^\alpha) (\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{l=1}^j P_{j,j-l} \|D\gamma^l\|_* + \frac{\sqrt{2}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} C_R h^4)$.

借助引理4, 进一步得 $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{l=1}^j P_{j,j-l} \|D\gamma^l\|_* \leq \sum_{l=1}^N P_{N,N-l} \|D\gamma^n\|_* \leq C_u N^{-\min\{\delta\alpha, 2\alpha, 2-\alpha\}}$, 其中 C_u 是与 u 和 f 有关的常数, 则有 $\|e^n\|_* \leq C(N^{-\min\{\delta\alpha, 2\alpha, 2-\alpha\}} + h^4)$ 。定理得证。

3 数值实验

在这一部分中, 将通过数值算例验证数值算法(12)–(13)的有效性, 其中非一致网格的参数 $\delta = (2-\alpha)/\alpha$ 。

例1 考虑如下诺依曼边界条件分数阶次扩散方程:

$${}_0 D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} + \Gamma(1+\alpha) \cos(\pi x) + \pi^2 \cos(\pi x) t^\alpha, x \in (0, 1), t \in (0, 0.5],$$

$$u(x, 0) = 0, x \in (0, 1),$$

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, t \in (0, 0.5],$$

该定解问题的真解为 $u(x, t) = \cos(\pi x) t^\alpha$ 。

表1中给出不同时间步长 $N=50, 100, 200, 300, M=100$ 时的数值误差, 从表中可以看出, 格式(12)–(13)的时间收敛阶是 $N^{-\min\{2-\alpha, 2\alpha\}}$ 。表2给出步长 $h=M^{-4/\min\{2-\alpha, 2\alpha\}}$ 时的数值误差, 从表中可以看出, 对于不同的 $\alpha=2/5, 2/3, 4/5$ 处格式(12)–(13)的空间收敛阶为4阶。图1给出当网格数 $M=400, N=100$ 时 $\alpha=2/3$ 的数值解与真解的误差曲面图。图2给出当网格数 $M=400, N=100, t=0.5$ 时不同参数 $\alpha=2/5, 2/3, 4/5$ 的数值解图像。上述的图表都表明, 所构造数值格式是有效的。

例2 考虑如下方程:

$${}_0 D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} + \Gamma(1+\alpha) x^4 (x-4)^4 - (12x^2 (x-4)^4 + 32x^3 (x-4)^3 + 12x^4 (x-4)^2)(1+t^\alpha),$$

$$x \in (0, 4), t \in (0, 0.5], u(x, 0) = x^4 (x-4)^4, x \in (0, 4), u_x(0, t) = u_x(4, t) = 0,$$

该定解问题的真解为 $u(x, t) = x^4 (x-4)^4 (1+t^\alpha)$ 。

表1 例1在时间方向上的数值误差和收敛阶

α	N	$\ e^n\ $	收敛阶
$\alpha = 2/5$	50	5.1757×10^{-5}	—
	100	1.7450×10^{-5}	1.5685
	200	5.8541×10^{-6}	1.5757
	300	3.0840×10^{-6}	1.5807
$\alpha = 2/3$	50	7.5170×10^{-5}	—
	100	2.9804×10^{-5}	1.3346
	200	1.1826×10^{-5}	1.3336
	300	6.8872×10^{-6}	1.3334
$\alpha = 4/5$	50	8.1503×10^{-5}	—
	100	3.5523×10^{-5}	1.1981
	200	1.5509×10^{-5}	1.1957
	300	9.5524×10^{-6}	1.1952

表2 例1在空间方向上的数值误差和收敛阶

α	M	$\ e^n\ $	收敛阶
$\alpha = 2/5$	4	7.7583×10^{-4}	—
	6	1.5125×10^{-4}	4.0324
	8	4.7635×10^{-5}	4.0161
	10	1.9476×10^{-5}	4.0082
$\alpha = 2/3$	4	5.7189×10^{-4}	—
	6	1.1133×10^{-4}	4.0360
	8	3.5043×10^{-5}	4.0181
	10	1.4319×10^{-5}	4.0108
$\alpha = 4/5$	4	5.2227×10^{-4}	—
	6	1.0161×10^{-4}	4.0374
	8	3.1983×10^{-5}	4.0182
	10	1.3067×10^{-5}	4.0115

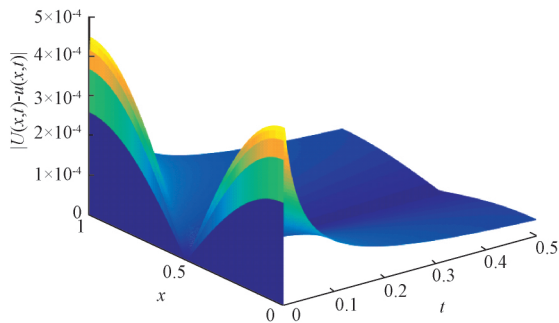
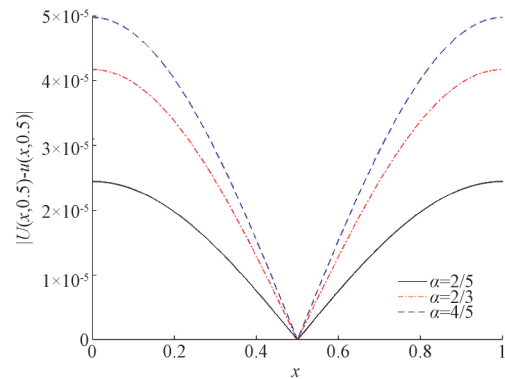
图1 当步长 $M=400$, $N=100$, $\alpha=2/3$ 时
例1的数值解与真解的误差曲面图2 当步长 $M=400$, $N=100$, $t=0.5$ 时不同
参数 $\alpha=2/5, 2/3, 4/5$ 处例1的误差曲线

表3中给出不同时间步长 $N=50, 100, 200, 300$, $M=100$ 时的数值误差, 表明时间收敛阶是 $N^{-\min\{2-\alpha, 2\alpha\}}$ 。表4选取步长 $h=M^{-4/\min\{2-\alpha, 2\alpha\}}$ 验证对于不同的 $\alpha=2/5, 2/3, 4/5$ 处格式(12)–(13)在空间方向上是四阶收敛。图3给出当网格数 $M=400$, $N=100$ 时 $\alpha=2/3$ 数值解与真解的误差曲面。图4给出当网格数 $M=400$, $N=100$, $t=0.5$ 时不同参数 $\alpha=2/5, 2/3, 4/5$ 的数值解与真解的误差图像。上述的图表都表明所构造数值格式的有效性。

表3 例2在时间方向上的数值误差和收敛阶

α	N	$\ e^n\ $	收敛阶
$\alpha = 2/5$	50	1.8066×10^{-1}	—
	100	6.0941×10^{-2}	1.5678
	200	2.0388×10^{-2}	1.5797
	300	1.0687×10^{-2}	1.5931
$\alpha = 2/3$	50	3.2944×10^{-1}	—
	100	1.3267×10^{-1}	1.3122
	200	5.3069×10^{-2}	1.3219
	300	3.0976×10^{-2}	1.3278
$\alpha = 4/5$	50	4.1137×10^{-1}	—
	100	1.8754×10^{-1}	1.1332
	200	8.4566×10^{-2}	1.1491
	300	5.2857×10^{-2}	1.1590

表4 例2在空间方向上的数值误差和收敛阶

α	M	$\ e^n\ $	收敛阶
$\alpha = 2/5$	12	9.6237×10^{-1}	—
	16	3.0047×10^{-1}	4.0463
	20	1.2203×10^{-1}	4.0383
	24	5.8540×10^{-2}	4.0288
$\alpha = 2/3$	12	7.1524×10^{-1}	—
	16	2.2010×10^{-1}	4.0966
	20	8.8815×10^{-2}	4.0670
	24	4.2458×10^{-2}	4.0481
$\alpha = 4/5$	12	6.4894×10^{-1}	—
	16	1.9981×10^{-1}	4.0947
	20	8.1049×10^{-2}	4.0437
	24	3.8960×10^{-2}	4.0178

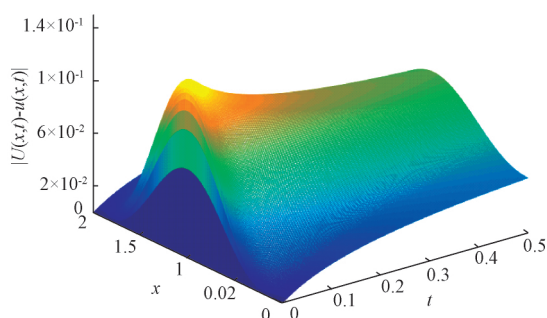


图3 当步长 $M=400, N=100$ 时 $\alpha=2/3$ 例2的数值解与真解的误差曲面

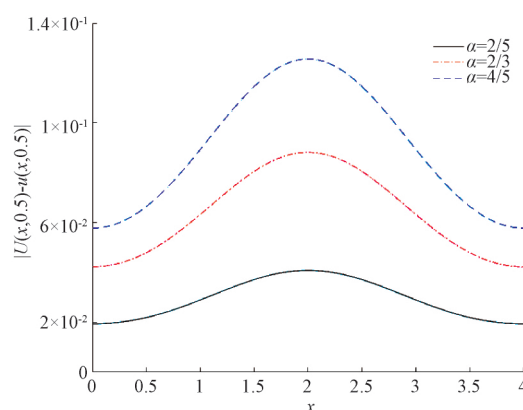


图4 当步长 $M=400, N=100, t=0.5$ 时不同参数 $\alpha=2/5, 2/3, 4/5$ 处例2的误差曲线

4 结论

本文对分数阶次扩散方程提出了高精度的数值差分格式,并给出了该格式的收敛性分析。在收敛性分析时,利用了该格式的系数矩阵性质和离散的能量方法,该证明方法丰富和发展了高精度数值算法的分析理论。由于方程在时间趋于0时,解缺乏光滑性,文中假设解非光滑条件下,在时间方向上采用非一致网格网格的L1格式近似,该格式的收敛精度为 $2-\alpha$ 阶。在后续研究中将讨论在解非光滑情形下,提高时间方向上的收敛精度,以及证明在二维情形下无穷范数下的收敛性。

参考文献:

- [1] Ditlevsen P D. Observation of α -stable noise induced millennial climate changes from an ice-core record[J]. Geophysical Research Letters, 1999, 26(10):1441-1444.
- [2] Humphries N E, Weimerskirch H, Queiroz N, et al. Foraging success of biological Lévy flights recorded in situ[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2012, 109(19): 7169-7174.
- [3] Sun Z Z, Wu X N. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system[J]. Applied Numerical Mathematics, 2006, 56(2):193-209.
- [4] Gao G H, Sun Z Z, Zhang H W. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications[J]. Journal of Computational Physics, 2014, 259:33-50.
- [5] Alikhanov A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 280:424-438.
- [6] Ren J C, Sun Z Z. Numerical algorithm with high spatial accuracy for the fractional diffusion-wave equation with Neumann boundary conditions[J]. Journal of Scientific Computing, 2013, 56(2):381-408.
- [7] Cao J X, Li C P, Chen Y Q. Compact difference method for solving the fractional reaction-subdiffusion equation with Neumann boundary value condition[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2015, 92(1):167-180.
- [8] Vong S, Lyu P, Wang Z B. A compact difference scheme for fractional sub-diffusion equations with the spatially variable coefficient under Neumann boundary conditions[J]. Journal of Scientific Computing, 2016, 66(2):725-739.
- [9] Stynes M, O'Riordan E, Gracia J L. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2017, 55(2):1057-1079.
- [10] Kopteva N. Error analysis of the L1 method on graded and uniform meshes for a fractional-derivative problem in two and three dimensions[J]. Mathematics of Computation, 2019, 88(319):2135-2155.
- [11] Kopteva N, Stynes M. Analysis and numerical solution of a Riemann-Liouville fractional derivative two-point boundary value problem[J]. Advances in Computational Mathematics, 2017, 43(1):77-99.
- [12] Hou D M, Hasan M T, Xu C J. Müntz spectral methods for the time-fractional diffusion equation[J]. Computational Methods in Applied Mathematics, 2018, 18(1): 43-62.
- [13] Jin B T, Li B Y, Zhou Z. Correction of high-order BDF convolution quadrature for fractional evolution equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2017, 39(6):A3129-A3152.
- [14] Liao H L, Li D F, Zhang J W. Sharp error estimate of the nonuniform L1 formula for linear reaction-subdiffusion equations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2018, 56(2):1112-1133.