浙江理工大学学报，2020，43(3)：373-379
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673－3851(n).2020.03.013

随机修正的 Camassa-Holm 方程的大偏差原理

冉丽霞，陈　涌
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：为了得到随机修正的 Camassa-Holm 方程中罕见事件发生概率的指数型估计，研究该方程的大偏差原理。利用弱收敛的方法证明正则化随机修正的 Camassa-Holm 方程的解满足大偏差原理；然后通过建立正则化方程的解的分布与随机修正的 Camassa-Holm 方程的解的分布之间的指数等价性，得到随机修正的 Camassa-Holm 方程的解的大偏差原理。结果表明：当随机修正的 Camassa-Holm 方程中随机干扰的强度充分小时，罕见事件发生大的偏差的概率是指数量级的小。

关键词：随机修正的 Camassa-Holm 方程；正则性；大偏差原理
中图分类号：O211.63　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851（2020）03-0373-07

Large deviation principle of stochastically modified Camassa-Holm equation

RAN Lixia，*CHEN Yong*
（School of Science，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China）

Abstract：In order to obtain the exponential estimation of the probability of rare events in the stochastically modified Camassa-Holm equation，the large deviation principle of the equation is studied. The weak convergence method is used to prove that the solution to the regularized and stochastically modified Camassa-Holm equation satisfies the large deviation principle；and then the large deviation principle of the solution to the original equation is obtained by establishing the exponential equivalence between the distribution of the solution to the regularization equation and the solution to the original equation. The results show that when the intensity of the random interference in the stochastically modified Camassa-Holm equation is sufficiently small，the probability of large deviations in rare events is exponentially small.

Key words：stochastically modified Camassa-Holm equation；regularity；large deviation principle

0　引　言

本文主要考虑随机修正的 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题，该问题可以描述为：

$$\begin{cases}\mathrm{d}m+(um_x+2mu_x)\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}W(t)=0,t>0,x\in S\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}\tag{1}$$

其中：$m=\Lambda^{2k}u=(1-\partial_x^2)^k u$；$u(x,t)$表示在 t 时刻在空间方向 x 的流体速度；u_0 表示初始时刻的速度；$W(t)$

收稿日期：2019－12－03　　网络出版日期：2020－04－02
基金项目：国家自然科学基金项目（11401532）；浙江省自然科学基金项目（LY18A010027）
作者简介：冉丽霞（1993－　），女，甘肃陇南人，硕士研究生，主要从事随机偏微分方程方面的研究。
通信作者：陈　涌，E-mail：chenyong@zstu.edu.cn

是维纳过程;S 是 $\mathbb{R}$ 上的一个周期区域;$\varepsilon>0$。本文主要讨论参数 $k=2$ 的情况,即 $m=\Lambda^4 u=(1-\partial_x^2)^2 u$。

随机修正的 Camassa-Holm 方程是在修正的 Camassa-Holm 方程的基础上得到的。Constantin 等[1-2]导出的从同态群扩散到不变空间 H^k 的测地线方程即为修正的 Camassa-Holm 方程,修正的 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题可描述为:

$$\begin{cases} m_t+au_x m+bum_x=0, t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=u_0(x) \end{cases} \tag{2}$$

其中:a,b 为正常数,$m=\Lambda^{2k}u=(1-\partial_x^2)^k u, k\in\mathbb{N}$;$m_t, m_x$ 分别表示 m 关于 t 和 x 的偏导数。当 $a=2$,$b=1, k=0$ 或者 1 时,方程(2)分别为 KdV 方程和 Camassa-Holm 方程。

关于修正的 Camassa-Holm 方程(2)的研究,Malachlan 等[3]讨论了弱解的存在性和解的适定性,并且证明了周期 Cauchy 问题的解在空间 $H^s(s>7/2)$ 上是局部适定的;Mu 等[4]讨论了在非周期情况下,解在 $H^s(\mathbb{R})(s>7/2)$ 空间的局部适定性;Fu 等[5]讨论方程(2)的 Cauchy 问题,证明解在 $H^s(\mathbb{R})(s>7/2)$ 空间是不一致连续的;冉丽霞等[6]证明,对于给定的初值 $u_0\in L^2(\mathbb{R})$,耗散修正的 Camassa-Holm 方程在低正则性空间中解的存在唯一性。

由于地球物理和气候动力学中存在一些不确定性,在数学模型中考虑随机效应已被广泛认可。根据随机变分法[7-8],Crisan 等[9]引入了如下随机 Hamiltonian 函数:

$$\widetilde{H}_1(m)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u^2+u_x^2)\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}} m\sum_{i=1}^{N}\xi^i(x)\circ \mathrm{d}W_t^i\,\mathrm{d}x,$$

得到如下的随机扰动的 Camassa-Holm 方程:

$$\mathrm{d}m+(m_x u+2mu_x)\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^{N}(m_x\xi^i+2m\xi_x^i)\circ \mathrm{d}W_t^i=0,$$

其中:$m=(1-\partial_x^2)u$。利用李群上测地线流的一些结果和具有 2 循环的新 Clebsch 动量图方法,得到了如下的随机修正的 Camassa-Holm 方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}m+(um_x+2mu_x)\mathrm{d}t+\sigma(k)\partial_x^k m\circ \mathrm{d}W(t)=0, t>0, x\in S \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

大偏差理论广泛应用于概率和统计中。Varadhan[10]建立了有限维随机微分方程的大偏差理论。Budhiraja 等[11]建立了弱收敛方法,得到了一类无穷维随机偏微分方程的大偏差原理。近年来,文献[12-14]通过弱收敛方法得到了许多随机偏微分方程的大偏差原理。由于方程(1)特殊的非线性结构,无法直接利用弱收敛方法得到方程(1)解的大偏差原理,可以先得到方程(1)的正则化方程解的大偏差原理,进而等到方程(1)解的大偏差原理。

本文研究随机修正的 Camassa-Holm 方程的大偏差原理。首先建立随机正则化方程的大偏差原理,其次证明正则化方程解的分布与随机修正的 Camassa-Holm 方程的解的分布之间的指数等价性,从而得到了随机修正的 Camassa-Holm 方程的解的大偏差原理。

1 正则化方程的大偏差

方程(1)可以写作:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u+uu_x\mathrm{d}t+f(u)\mathrm{d}t+(1-\partial_x^2)^{-2}\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}W(t)=0, t>0, x\in S \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{4}$$

其中:$f(u)=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}(u^2+2u_x^2-\frac{5}{2}u_{xx}^2-5u_x u_{xxx})$。令 u_ε 为方程(4)的解,讨论 u_ε 在 $C([0,T];H^s(S))$ 上的大偏差。

为了讨论方程(4)解的大偏差,首先考虑以下的正则化方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u+uu_x\mathrm{d}t+f(u)\mathrm{d}t+(1-\partial_x^2)^{-2}\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}W_\eta(t)=0, t>0, x\in S \\ u(0,x)=u_{0\eta}(x) \end{cases} \tag{5}$$

这里 $0<\eta<1/4, u_{0\eta}=u_0*\lambda_\eta, W_\eta=Q*\lambda_\eta$($Q$ 为 W 的协方差算子),λ_η 为 Friedrichs 光滑函数,$*$ 表示卷积。

设 $\mathcal{G}^{\varepsilon}:C([0,T];L^2)\to C([0,T];H^s)$ 为一个可测函数，则 $u_\eta=\mathcal{G}^{\varepsilon}(W_\eta)$[14]。这里令 $u_v(\cdot)=\mathcal{G}^{\varepsilon}(W_\eta(\cdot)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\cdot}v_\eta(s)\mathrm{d}s)$，通过 Girsanov 定理可知，$u_v(\cdot)$ 是方程在 $[0,T]$ 上的温和解，方程可以表示为：

$$\begin{cases}\mathrm{d}u_v+u_vu_{vx}\mathrm{d}t+f(u_v)\mathrm{d}t+(1-\partial_x^2)^{-2}(v\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}W_\eta(t))=0,t>0,x\in S\\ u_v(0,x)=u_{0\eta}(x)\end{cases}\tag{6}$$

令 $\mathcal{A}$ 为 H^s -值 F_t -可料过程，满足 $\|v\|_{L^2([0,T];H^s)}<\infty$，P-a.s.，并且有如下定义：

$$S_M=:\{v\in L^2([0,T];H^s):\int_0^T\|v\|_{H^s}^2\mathrm{d}t\leqslant M\},$$

$$\mathcal{A}_M=:\{v\in\mathcal{A}:v(\omega)\in S_M,\text{P-a.s.}\}$$

其中：$M>0$。为了说明当 $\varepsilon\to 0$ 时 u_η 满足拉普拉斯原理，需要验证如下假设：

假设 1　存在一个可测函数 $\mathcal{G}^0:C([0,T];L^2(\mathbb{R}))\to C([0,T];H^s)$，有：

a) 如果当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\{u_\varepsilon\in\mathcal{A}_M:\varepsilon>0\}$ 对于 $0<M<\infty$ 在分布意义下收敛到 $v\in S_M$，则 $\mathcal{G}^{\varepsilon}(W_0(\cdot)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{\cdot}v_\eta(s)\mathrm{d}s)$ 在分布意义下收敛到 $\mathcal{G}^0(\int_0^{\cdot}v_\eta(s)\mathrm{d}s)$。令 $\overline{u}_v=\mathcal{G}^0(\int_0^{\cdot}v_\eta(s)\mathrm{d}s)$，则 $\overline{u}_v$ 为如下方程的解：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\overline{u}_v+\overline{u}_v\overline{u}_{vx}\mathrm{d}t+f(\overline{u}_v)\mathrm{d}t+(1-\partial_x^2)^{-2}v\mathrm{d}t=0,t>0,x\in S\\ \overline{u}_v(0,x)=u_{0\eta}(x)\end{cases}\tag{7}$$

b) 集合 $K_M=\{\mathcal{G}^0(\int_0^{\cdot}v_\eta(s)\mathrm{d}s):v\in S_M\}$ 在空间 $C([0,T];H^s)$ 对任意的 $M>0$ 是紧的。

为了建立随机正则化方程(6)的大偏差原理，首先建立方程(6)解的估计。

引理 1　令 $s>7/2$，则 $f(u)$ 在空间 $C([0,T];H^s)$ 上满足：

$$\sup_{t\in[0,T]}\|f(u)\|_{H^s}^2\leqslant C\|u\|_{H^s}^4\tag{8}$$

其中：C 为常数。

证明　因为 $f(u)=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}[u^2+2u_x^2-\frac{5}{2}u_{xx}^2-5u_xu_{xxx})$，则有：

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{H^s}^2&=\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}[u^2+2u_x^2-\frac{5}{2}u_{xx}^2-5u_xu_{xxx})\|_{H^s}^2\\&\leqslant C(\|u^2\|_{H^s}^2+\|u_x^2\|_{H^{s-3}}^2+\|u_{xx}^2\|_{H^{s-3}}^2+\|u_xu_{xxx}\|_{H^{s-3}}^2)\\&\leqslant C(\|u\|_{H^s}^2\|u\|_{H^s}^2+\|u\|_{H^s}^2\|u\|_{H^s}^2+\|u\|_{H^s}^2\|u\|_{H^s}^2+\\&\quad\|u\|_{H^s}^4)\leqslant C\|u\|_{H^s}^4.\end{aligned}$$

引理 2　令 $s>7/2$，则 $\overline{u}_v$、u_v 以及 u_η 在空间 $C([0,T];H^s)$ 上满足：

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\overline{u}_v\|_{H^s}^2\leqslant C\tag{9}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{0<\varepsilon<1}\varepsilon\ln P(\sup_{t\in[0,T]}\|u_v\|_{H^s}^2>R)=-\infty\tag{10}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{0<\varepsilon<1}\varepsilon\ln P(\sup_{t\in[0,T]}\|u_\eta\|_{H^{s+k}}^2>R\eta^{-\frac{k}{2}})=-\infty\tag{11}$$

证明　方程(6)两边同乘 $\Lambda^s\overline{u}_v\Lambda^{s-2}$，然后对 x 和 t 进行积分，通过引理 1，Hölder 不等式和 Young 不等式，可以得到：

$$\|\overline{u}_v\|_{H^s}^2\leqslant C(1+\int_0^t\|\overline{u}_v\|_s^4\mathrm{d}r)\coloneqq y(t).$$

因为 $y'(t)\leqslant y^2(t)$，所以 $y(t)<\frac{C}{t-1}$，则有：

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\overline{u}_v\|_{H^s}^2\leqslant C.$$

由此可得到式(9)成立。

令 $\Phi_\eta(t)=\int_0^t(1-\partial_x^2)^{-2}\mathrm{d}W_\eta$，$\varphi(t)=u_v(t)-\sqrt{\varepsilon}\Phi_\eta(t)$，则 $\varphi(t)$ 也是具有随机系数的确定性方程的一个温和解，可以表示为：

$$\varphi'=-f(\varphi+\sqrt{\varepsilon}\Phi_\eta,(\varphi+\sqrt{\varepsilon}\Phi_\eta)_x)-(1-\partial_x^2)^{-1}(\varphi v)\tag{12}$$

这里的 $f(\varphi+\varepsilon\Phi_\eta,(\varphi+\varepsilon\Phi_\eta)_x)$ 与方程(4)中的 $f(u)$ 表达式相同。

对于 $R>0$,定义如下的停时:

$$\tau_R=\inf\{t\in[0,T];\sqrt{\varepsilon}\ \|\Phi_\eta(t)\|_s^2>R,\sqrt{\varepsilon}\ \|\Phi_\eta(t)\|_{s+1}^2>R)\}.$$

其中:$T<\dfrac{1}{C(R)\ \|\varphi_0\|_{H^s}^{2P}}$。类似于式(9)的证明,则有:

$$\|\varphi\|_{H^s}^2\leqslant\|\varphi_0\|_{H^s}^2+C(R)\int_0^T\|\varphi\|_{H^s}^4\mathrm{d}r,$$

因为 $p\geqslant 2$,则有:

$$\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\|\varphi\|_{H^s}^{2p}\lesssim\|\varphi_0\|_{H^s}^{2p}+C^p(R)\int_0^T\sup_{r\in[0,T\wedge\tau_R]}\|\varphi(r)\|_{H^s}^{4p}\mathrm{d}t \tag{13}$$

因此有:

$$\Big(\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\|\varphi\|_{H^s}^{2p}\Big)^{1/p}\leqslant\Big(\frac{\|\varphi_0\|_{H^s}^{2p}}{1-C(R)\ \|\varphi_0\|_{H^s}^{2p}T}\Big)^{1/p}\leqslant\frac{\|\varphi_0\|_{H^s}^2}{1-C(R)\ \|\varphi_0\|_{H^s}^2T} \tag{14}$$

$$\Big(\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\Big)1/p\leqslant\Big(\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\Big)1/p+\Big(\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\Big)1/p\leqslant\frac{\|\varphi_0\|_{H^s}^2}{1-C(R)\ \|\varphi_0\|_{H^s}^2T}+R \tag{15}$$

通过指数鞅不等式[15],可以得到:

$$P(\tau_R\leqslant T)\leqslant \mathrm{e}^{-R/\varepsilon} \tag{16}$$

对于以上的 R,令 $q=1/\varepsilon$,通过式(15)有:

$$\varepsilon\ln P\Big(\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\|u_v\|_{H^s}^2>R\Big)\leqslant\varepsilon\ln\frac{\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\|u_v\|_{H^s}^{2q}}{R^q}\leqslant\ln\Big(\frac{\|\varphi_0\|_{H^s}^2}{1-C(R)\ \|\varphi_0\|_{H^s}^2T}+R\Big)-\ln(R) \tag{17}$$

其中:E 表示期望。这里 $R\to+\infty$。

联立式(16)—(17)可以得到:

$$\lim_{R\to+\infty}\sup_{0<\varepsilon<1}\varepsilon\ln P\Big(\sup_{t\in[0,T]}\|u_v\|_{H^s}^2>R\Big)=-\infty.$$

即证明了式(9)成立方程,式(10)的证明类似。

以上对正则化方程的解做了非线性估计,下面证明正则化方程解的大偏差原理。

定理 1 如果 $\{\mathcal{G}^\varepsilon(W(\cdot))\}$ 满足假设 1,则在空间 $L^2(\Omega;C([0,T];H^s))$ 中解集 $\{u_\eta:\varepsilon>0\}$ 满足拉普拉斯原理,其中速度函数定义为:

$$I(h)=\frac{1}{2}\inf\{\ \|\bar{u}_v\|_{L^2([0,T];H^s)}^2:h=\bar{u}_v,v\in L^2([0,T];H^s)\} \tag{18}$$

其中 $\inf\varnothing=\infty$。

证明 根据文献[11]中的弱收敛方法,只需证明假设 1 成立,即可证得定理 1 成立。

先证明假设 1 b)成立。通过 S_M 的弱紧致性,取集合 $v_\varepsilon\in S_M$ 的子序列,该子序列弱收敛到极限 $v\in S_M$,最终的目的是证明 $\bar{u}_{v_\varepsilon}$ 在 $C([0,T];H^s)$)中收敛于 $\bar{u}_v$。令 $w=\bar{u}_v-\bar{u}_{v_\varepsilon}$,$g=\bar{u}_v+\bar{u}_{v_\varepsilon}$,则有:

$$\mathrm{d}w=\frac{1}{2}\partial_x(wg)\mathrm{d}t+[f(\bar{u}_{v_\varepsilon})-f(\bar{u}_v)]\mathrm{d}t+(1-\partial_x^2)^{-2}(v_\varepsilon-v)\mathrm{d}t,$$

上式两边同乘 $\Lambda^s w\Lambda^s$ 可得:

$$\|w\|_{H^s}^2=\frac{1}{2}\int_0^t(\Lambda^s w,\Lambda^{s+1}(wg))\mathrm{d}\tau+\int_0^t(\Lambda^s w,\Lambda^s[f(\bar{u}_v)-f(\bar{u}_{v_\varepsilon})])\mathrm{d}\tau+\int_0^t(\Lambda^s w,\Lambda^{s-2}(v_\varepsilon-v))\mathrm{d}\tau.$$

通过嵌入定理、Hölder 不等式可以得到:

$$\frac{1}{2}\int_0^t(\Lambda^s w,\Lambda^{s+1}(wg))\mathrm{d}\tau+\int_0^t(\Lambda^s w,\Lambda^s[f(\bar{u}_v)-f(\bar{u}_{v_\varepsilon})])\mathrm{d}\tau+\int_0^t(\Lambda^s w,\Lambda^{s-2}(v_\varepsilon-v))\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$C\int_0^t\|w\|_{H^s}[\ \|\bar{u}_v\|_{H^{s+1}}\ \|\bar{u}_{v_\varepsilon}\|_{H^{s+1}}+(\ \|\bar{u}_v\|_{H^s}+\|\bar{u}_{v_\varepsilon}\|_{H^s})\ \|\bar{u}_{v_\varepsilon}-\bar{u}_v\|_{H^s}+$$

$$\|v_\varepsilon - v\|_{H^{s-2}}^2]\mathrm{d}\tau \leqslant C\int_0^t \|w\|_{H^s}^2 \mathrm{d}\tau + \int_0^t \|v_\varepsilon - v\|_{H^{s-2}}^2 \mathrm{d}\tau \tag{19}$$

由式(19)可以得到：

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w\|_{H^s}^2 \leqslant C\int_0^T \sup_{t\in[0,T]} \|w\|_{H^s}^2 \mathrm{d}\tau + \int_0^t \|v_\varepsilon - v\|_{H^{s-2}}^2 \mathrm{d}\tau,$$

通过 Gronwall's 不等式，有：

$$\sup_{t\in[0,T]} \|w\|_{H^s}^2 \leqslant \mathrm{e}^{CT}\int_0^t \|v_\varepsilon - v\|_{H^{s-2}}^2 \mathrm{d}\tau \tag{20}$$

由上可得到在空间 $C([0,T];H^s)$ 上当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\overline{u}_{v_\varepsilon} \to \overline{u}_v$。

接下来证明假设 1 a)成立。为了验证假设 1 a)，假设 $\{v_\varepsilon\} \subset \mathcal{A}_M$ 和 v_ε 在分布意义下收敛于 $v \in S_M$。证明当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\mathcal{G}^\varepsilon(W_0(\cdot) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\cdot v_\eta(s)\mathrm{d}s)$ 在分布意义下收敛到 $\mathcal{G}^0(\int_0^\cdot v_\eta(s)\mathrm{d}s)$。由于 S_M 是 Polish 空间，根据 Skorohod 表示定理，可以在概率空间上找到随机变量 $(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{v}, \widetilde{W}_\varepsilon, \widetilde{W})$，使得 $(\tilde{v}_\varepsilon, \widetilde{W}_\varepsilon)$ 和 $(\tilde{v}, \widetilde{W})$ 具有与 $(v_\varepsilon, W_\varepsilon)$ 和 (v, W) 相同的分布，相应地，在 S_M 中 $\tilde{v}_\varepsilon \to \tilde{v}$。用 $\widetilde{W}_{\varepsilon\eta}$、$\tilde{v}_{\varepsilon\eta}$ 替换 W_η、v_η，则 $u_{\tilde{v}_\varepsilon}$ 为方程(6)的解，同样地对应 $\tilde{v}_\eta$，$\overline{u}_{\tilde{v}}$ 为形如方程(7)的方程的解。唯一温和解的存在意味着 $(\tilde{v}_{\varepsilon\eta}, u_{\tilde{v}_\varepsilon})$ 和 $(\tilde{v}_\eta, \overline{u}_{\tilde{v}})$ 分别具有与 $(v_{\varepsilon\eta}, u_{v_\varepsilon})$ 和 $(v_\eta, \overline{u}_v)$ 相同的联合分布。由上可知，若在 S_M 中当 $\varepsilon \to 0$ 时 $v_\varepsilon \to v$，则在分布意义下 $u_{v_\varepsilon} \to \overline{u}_v$。

令 $w = \overline{u}_v - u_{v_\varepsilon}$，$g = \overline{u}_v + u_{v_\varepsilon}$，则 w 满足：

$$\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\partial_x(wg)\mathrm{d}t + [f(\overline{u}_v) - f(u_{v_\varepsilon})]\mathrm{d}t + (1-\partial_x^2)^{-2}((v_\varepsilon - v)\mathrm{d}t + \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{d}W_\eta).$$

定义停时：

$$\tau_R = \inf\{t \in [0,T];\ \|u_{v_\varepsilon}\|_s^2 > R\},\ R > 0.$$

对 $\|w(t\wedge\tau_R)\|_s^2$ 运用 Itô 公式，可以得到：

$$\begin{aligned}\|w(t\wedge\tau_R)\|_{H^s}^2 \leqslant{}& \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^{s+1}(wg))\mathrm{d}\tau + \int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^s[f(\overline{u}_v) - f(u_{v_\varepsilon})])\mathrm{d}\tau + \\ &\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^{s-2}(v_\varepsilon - v))\mathrm{d}\tau + \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^{s-2}\mathrm{d}W_\eta)\end{aligned} \tag{21}$$

类似式(19)，可以得到：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^{s+1}(wg))\mathrm{d}\tau + \int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^s[f(\overline{u}_v) - f(u_{v_\varepsilon})])\mathrm{d}\tau + \int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^{s-2}(v_\varepsilon - v))\mathrm{d}\tau \leqslant \\ &C\int_0^{t\wedge\tau_R}\|w\|_{H^s}^2\mathrm{d}\tau + \int_0^{t\wedge\tau_R}\|v_\varepsilon - v\|_{H^{s-2}}^2\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{22}$$

通过 BDG 不等式可以得到：

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w, \Lambda^{s-2}\mathrm{d}W_\eta) \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\int_0^T \mathrm{E}\sup_{r\in[0,t\wedge\tau_R]}\|w(r)\|_{H^s}^2\mathrm{d}t \tag{23}$$

联立式(21)—(23)可以得到：

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\|w\|_s^2 \leqslant C(1+\sqrt{\varepsilon})\int_0^T \mathrm{E}\sup_{r\in[0,t\wedge\tau_R]}\|w(r)\|_{H^s}^2\mathrm{d}t + \int_0^{t\wedge\tau_R}\|v_\varepsilon - v\|_{H^{s-2}}^2\mathrm{d}\tau,$$

通过 Gronwall's 不等式，有：

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T\wedge\tau_R]}\|w\|_s^2 \leqslant \mathrm{e}^{C(1+\sqrt{\varepsilon})}\int_0^{t\wedge\tau_R}\|v_\varepsilon - v\|_{H^{s-2}}^2\mathrm{d}\tau \tag{24}$$

由上可得在空间 $C([0,T];H^s)$ 上当 $\varepsilon \to 0$ 时 $u_{v_\varepsilon} \to \overline{u}_v$。

取 $\forall\delta > 0$，由引理 1 可知存在一个常识 $M > 0$，从而对于 $R > M$ 有：

$$P(\tau_R \leqslant T) \leqslant P(\sup_{t\in[0,T]}\|u_{v_\varepsilon}\|_{H^s}^2 > R) \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

因此有：

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]}\|w(t\wedge\tau_R)\|_{H^s}>\lambda\right)\leqslant\frac{\delta}{2}.$$

以上证明了 w 在空间 $C([0,T];H^s)$ 上的概率收敛到 0,则定理 1 的证明完毕。

2 指数等价性

本节建立方程(4)的解的分布和方程(5)的解的分布之间的指数等价性。

引理 3 令 $s>7/2$,对于 $\forall\lambda>0$ 有:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln P\left(\sup_{0\in[0,T]}\|u_\eta-u_\varepsilon\|_{H^s}^2>\lambda\right)=-\infty \tag{25}$$

证明 对于 $R>0$,定义停时:

$$\tau_R=\inf\{t\in[0,T];\|u_\varepsilon\|_{H^s}^2>R,\|u_\eta\|_{H^{s+k}}^2>R(k=0,1)\}.$$

令 $w=u_\eta-u_\varepsilon$,$g=u_\eta+u_\varepsilon$,则 w 满足:

$$\mathrm{d}w=\frac{1}{2}\partial_x(wg)\mathrm{d}t+[f(u_\eta)-f(u_\varepsilon)]\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\,(1-\partial_x^2)^{-2}(w\mathrm{d}W_\eta+\mathrm{d}(W_\eta-W)),$$

利用 Itô 公式,可以得到:

$$\|w(t\wedge\tau_R)\|_{H^s}^2\leqslant\|w_0\|_{H^s}^2+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^{s+1}(wg))\mathrm{d}\tau+\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^s[f(\overline{u}_v)-f(\overline{u}_{v_\varepsilon})])\mathrm{d}\tau+$$
$$\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^{s-1}\mathrm{d}W_\eta)+\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^{s-1}(\mathrm{d}W_\eta-\mathrm{d}W))=\|w_0\|_{H^s}^2+A+B \tag{26}$$

其中:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^{s+1}(wg))\mathrm{d}\tau+\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^s[f(\overline{u}_v)-f(\overline{u}_{v_\varepsilon})])\mathrm{d}\tau+\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^{s-1}\mathrm{d}W_\eta),$$

$$B=\int_0^{t\wedge\tau_R}(\Lambda^s w,\Lambda^{s-1}(\mathrm{d}W_\eta-\mathrm{d}W)).$$

类似于式(19),可以得到:

$$\mathrm{E}\sup_{t\in[0,T]}A\leqslant C\mathrm{E}\int_0^{T\wedge\tau_R}\|w\|_{H^s}^2\mathrm{d}\tau. \tag{27}$$

为了估计随机项 B,需要以下结论[16-17]:存在一个普遍的常数 c,使得对于任意的 $q\geqslant 2$ 和连续鞅 M_t,其中 $M_0=0$,有:

$$\|M_t^*\|_{L^q(\Omega)}\leqslant cq^{1/2}\ \|\langle M_s\rangle^{1/2}\|_{L^q} \tag{28}$$

其中:$M_t^*=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}|M_s|$。

由式(28),以及 Hölder 不等式和 Young 不等式,可以得到:

$$(\mathrm{E}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}B]q)\,2/q\leqslant C\sqrt{\varepsilon}\left[\mathrm{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_R}\|w\|_{H^s}^2\ \|q\|_{L_2^{0,s-1}}^2\mathrm{d}r\right)^{q/2}\right]^{2/q}\leqslant$$
$$C\sqrt{\varepsilon}\left[\mathrm{E}\left(\int_0^{T\wedge\tau_R}\|w\|_{H^s}^4\mathrm{d}r\right)^{q/2}\right]^{2/q}\leqslant C\int_0^{T\wedge\tau_R}(\mathrm{E}\ \|w\|_{H^s}^{2q})^{2/q}\mathrm{d}r \tag{29}$$

根据以上估计可以得到:

$$\left(\mathrm{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(t\wedge\tau_R)\|_{H^s}^2\right]^q\right)^{2/q}\leqslant\|w_0\|_{H^s}^2+C(R)\int_0^{T\wedge\tau_R}(\mathrm{E}\ \|w(r)\|_{H^s}^{2q})^{2/q}\mathrm{d}t.$$

对上式运用 Gronwall's 不等式,可以得到:

$$\left(\mathrm{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(t\wedge\tau_R)\|_{H^s}^2\right]^q\right)^{2/q}\leqslant\mathrm{e}^{C(R)T}.$$

由引理 1 可知,存在一个常数 R,对于任意的 $\varepsilon\in(0,1]$,以下不等式成立:

$$P(\tau_R\leqslant T)\leqslant\mathrm{e}^{-M/\varepsilon} \tag{30}$$

取 $q=2$,可以得到

$$\varepsilon\ln P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(t\wedge\tau_R)\|_{H^s}^2>\lambda\right)\leqslant\varepsilon\ln\frac{\mathrm{E}\left(\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(r)\|_{H^s}^2\right)^{2q}}{\lambda^q}\leqslant\varepsilon C(R)T-2\ln\lambda \tag{31}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，可知式(31)趋于 $-\infty$，即：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln P(\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \| w(t \wedge \tau_R) \|_{H^s}^2 > \lambda) = -\infty.$$

因 $w = u_\eta - u_\varepsilon$，可以得到：

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \ln P(\sup_{0 \in [0,T]} \| u_\eta - u_\varepsilon \|_{H^s}^2 > \lambda) = -\infty.$$

即证明了引理 3 成立。

定理 2　方程(4)的解 $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 在空间 $C([0,T];H^s)(s > 7/2)$ 满足大偏差原理，其中速度函数由式(18)给出。

证明　由定理 1 知随机正则化方程(5)的解满足大偏差原理；由引理 3 得到方程(4)的解的分布和方程(5)的解的分布之间的指数等价性。因此，由文献[18]中定理 4.2.13 得到 $\{u_\varepsilon\}$ 满足大偏差原理，即定理 2 成立。

3　结　论

本文通过验证两个假设，利用弱收敛的方法，首先得到了正则化随机修正的 Camassa-Holm 方程解的大偏差原理，进而通过指数等价性得到了随机修正的 Camassa-Holm 方程解的大偏差原理，由此可以得到维纳噪声对随机修正的 Camassa-Holm 方程解的影响。本文考虑的是 $k=2$ 的特殊情况，之后的研究中可讨论其他一般情况。

参考文献：

[1] Constantin A, Kolev B. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle[J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 2003, 78(4): 787-804.

[2] Constantin A, Kolev B. Integrability of invariant metrics on the diffeomorphism group of the circle[J]. Journal of Nonlinear Science, 2006, 16(2): 109-122.

[3] Mclachlan R, Zhang X Y. Well-posedness of modified Camassa-Holm equation[J]. Journal of Differential Equations, 2009, 246(8): 3241-3259.

[4] Mu C L, Zhou S M, Zeng R. Well-posedness and blow-up phenomena for a higher order shallow water equation[J]. Journal of Differential Equations, 2011, 251(12): 3488-3499.

[5] Fu Y G, Liu Z R, Tang H. Non-uniform dependence on initial data for the modified Camassa-Holm equation on the line[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34B(6): 1781-1794.

[6] 冉丽霞，陈涌. 耗散修正的 Camassa-Holm 方程解的存在唯一性[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版), 2018, 39(6): 759-764.

[7] Miyatake Y, Matsuo T, Furihata D. Conservative finite difference schemes for the modified Camassa-Holm equation[J]. JSIAM Letters, 2011, 3: 37-40.

[8] Miyatake Y, Matsuo T, Furihata D. Invariants-preserving integration of the modified Camassa-Holm equation[J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2011, 28: 351-381.

[9] Crisan D, Holm D D. Wave breaking for the stochastic Camassa-Holm equation[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2018, 376/377: 138-143.

[10] Varadhan S R S. Large Deviations and Applications[M]. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1984: 3-6.

[11] Budhiraja A, Dupuis P. A variational representation for positive functional of infinite dimensional Brownian motion[J]. Probability and Mathematical Statistics, 2000, 20: 39-61.

[12] Chen Y, Gao H J, Luo H. On the stochastic two-component b-family system[J]. Stochastic Analysis and Applications, 2016, 34(6): 1025-1044.

[13] Brzeźniak Z, Manna U, Panda A A. Large deviations for stochastic Nematic liquid crystals driven by multiplicative Gaussian noise[J]. Potential Analysis, 2019: 1-40.

[14] Matoussi A, Sabbagh W, Zhang T S. Large deviation principles of obstacle problems for quasilinear stochastic PDEs[J]. Applied Mathematics & Optimization, 2019: 1-31.

[15] Stroock D W. An Introduction to the Theory of Large Deviations[M]. New York: Springer, 1984: 7-8.

[16] Barlow M T, Yor M. Semi-martingale inequalities via the Garsia-Rudemich-Rumsey lemma, and applications to local time[J]. Journal of Functional Analysis, 1982, 49: 198-229.

[17] Davis B. On the L^p -norm of stochastic integrals and other martingales[J]. Duke Mathematical Journal, 1976, 43(4): 697-704.

[18] Dembo A, Zeitouni O. Large Deviations Techniques and Applications[M]. New York: Springer, 1998: 175-250.

(责任编辑：康　锋)