浙江理工大学学报，2020，43(2)：272-276
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673－3851(n).2020.02.019

一个双曲函数核 Hilbert 型不等式及应用

有名辉
（浙江机电职业技术学院数学教研室，杭州 310053）

摘　要：通过引进参数，构建一个全平面上的混合双曲函数核，建立了一个新的具有最佳常数因子的 Hilbert 型积分不等式。另外，利用余割函数的有理分式展开，建立了所得结果的特殊形式，并赋予参数特殊的数值，并给出了若干推论。

关键词：Hilbert 型不等式；Hölder 不等式；双曲函数；有理分式展开
中图分类号：O178　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1673-3851 (2020) 03-0272-05

On a Hilbert－type inequality of the kernel with hyperbolic function and its applications

YOU Minghui
(Mathematics Teaching and Research Section, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou 310053, China)

Abstract: By introducing parameters, and constructing a kernel with mixed hyperbolic functions, we establish a new Hilbert-type integral inequality with the best constant factor. Moreover, by using the rational fraction expansion of cosecant function, a special case of the obtained result is presented. At last, by specifying the parameters with special values, we obtain some new conclusions.

Key words: Hilbert-type inequality; Hölder inequality; hyperbolic function; rational fraction expansion

0　引　言

不等式是分析学中的重要内容，以 Hilbert 不等式为代表的 Hilbert 型不等式一直是数学工作者关注的热门课题。经典的 Hilbert 不等式可叙述如下：设 $f(x), g(x) \geqslant 0$，满足 $0<\int_0^{\infty} f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^{\infty} g^2(x)\mathrm{d}x<\infty$，则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y< \pi\sqrt{\int_0^{\infty} f^2(x)\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^{\infty} g^2(x)\mathrm{d}x} \tag{1}$$

其中 π 是满足式(1)的最佳常数因子[1]。近些年来，研究者们通过引入新的核函数，借助分析学的相关技巧，构建了大量的类似于式(1)的 Hilbert 型不等式[2-7]。这些不等式在一定程度上又促进了分析学的发展和应用[8]。最近，关于核函数关联指数函数的 Hilbert 型不等式在一些文献零星出现[9-12]。值得指出的是，这些不等式很多是基于第一象限构建的，且最佳常数因子的表述一般较复杂，如文献[11]建立了定理 1。为行文方便，下文约定 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

定理 1　设 $a>0, \Gamma(z):=\int_0^{\infty} x^{z-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 为 $\Gamma-$函数，$\zeta(x):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$ 是黎曼 $\zeta-$函数[13]，$f(x)$，$g(x)\geqslant 0$，满足 $0<\int_0^{\infty} x^{-(pa+1)} f^p(x)\mathrm{d}x<\infty, 0<$

收稿日期：2019－08－19　　网络出版日期：2019－10－08
作者简介：有名辉（1982－　），男，浙江安吉人，硕士，主要从事解析不等式方面的研究。

$\int_0^{\infty} x^{-(qa+1)} g^q(x)\mathrm{d}x < \infty$，则

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \operatorname{csch}(axy) f(x) g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < C(a)$$
$$\left(\int_0^{\infty} x^{-(pa+1)} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} x^{-(qa+1)} g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

其中：$C(a)=\frac{2}{a^{a+1}}\left(1-\frac{1}{2^{a+1}}\right)\Gamma(a+1)\zeta(1+a)$ 是满足式(2)的最佳常数因子。

本文在此仍然考虑以相关双曲函数为核函数、并定义在全平面上的 Hilbert 型不等式，得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sinh(xy)|}{\cosh(2xy)} f(x) g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\sqrt{2}\pi^2}{8}$$
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-(p+1)} f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-(q+1)} g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

下文考虑更一般的情形，通过引入参数，借助余割函数的有理分式展开，建立式(3)的推广。

1　主要结果

引理 1　设 $\lambda_2 > \lambda_1 > 0, \beta \geqslant 0, k(x,y) := \frac{|\sinh(\lambda_1 xy)|}{\cosh(\lambda_2 xy)}$，且

$$C_\beta(\lambda_1,\lambda_2) := \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^k}{(2\lambda_2 k-\lambda_1+\lambda_2)^{\beta+1}} - \frac{(-1)^k}{(2\lambda_2 k+\lambda_1+\lambda_2)^{\beta+1}}\right\},$$

则：

$$\omega(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)|y|^{\beta}\mathrm{d}y = 2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)|x|^{-(\beta+1)} \tag{4}$$

且有：

$$\tilde{\omega}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)|x|^{\beta}\mathrm{d}x = 2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)|y|^{-(\beta+1)} \tag{5}$$

证明：作变量替换 $xy=t$，当 $x\in(0,\infty)$ 或 $x\in(-\infty,0)$，都有：

$$\omega(x) = |x|^{-(\beta+1)}\int_{-\infty}^{+\infty} k(1,t)|t|^{\beta}\mathrm{d}t \tag{6}$$

不难得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(1,t)|t|^{\beta}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sinh(\lambda_1 t)}{\cosh(\lambda_2 t)}t^{\beta}\mathrm{d}t =$$
$$2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\beta}\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{1+\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}}\mathrm{d}t - 2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\beta}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{1+\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}}\mathrm{d}t \tag{7}$$

把 $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}}$ 展开成无穷级数，并交换求和与积分顺序，可得：

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\beta}\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{1+\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \mathrm{e}^{-(2\lambda_2 k-\lambda_1+\lambda_2)t}\mathrm{d}t =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(2\lambda_2 k-\lambda_1+\lambda_2)t}t^{\beta}\mathrm{d}t =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2\lambda_2 k-\lambda_1+\lambda_2)^{\beta+1}}\int_0^{\infty}u^{\beta}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\beta+1)}{(2\lambda_2 k-\lambda_1+\lambda_2)^{\beta+1}} \tag{8}$$

类似可知：

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\beta}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{1+\mathrm{e}^{-2\lambda_2 t}}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma(\beta+1)}{(2\lambda_2 k+\lambda_1+\lambda_2)^{\beta+1}} \tag{9}$$

把式(8)—(9)代入到式(7)，结合 $C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)$ 的定义，得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(1,t)|t|^{\beta}\mathrm{d}t = 2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1) \tag{10}$$

把式(10)代入到式(6)，可得式(4)，同理可得式(5)。

引理 2　设 $n\in\mathbf{N}^+, a,b>0, a+b=1, \varphi(x)=\csc x$，则

$$\varphi^{2n-1}(a\pi) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2n}(2n-1)!$$
$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+b)^{2n}} - \frac{(-1)^k}{(k+a)^{2n}}\right].$$

证明　由 $\varphi(x)=\csc x$ 的部分分式展开[13]：

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{x-k\pi} + \frac{1}{x+k\pi}\right],$$

对其两边关于 x 求 $2n-1$ 阶导数，得：

$$\varphi^{2n-1}(x) = -(2n-1)!$$
$$\left\{\frac{1}{x^{2n}} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{(x-k\pi)^{2n}} + \frac{1}{(x+k\pi)^{2n}}\right]\right\}.$$

令 $x=a\pi$，注意到 $a+b=1$，则：

$$\varphi^{2n-1}(a\pi) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2n}(2n-1)!$$
$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k-a)^{2n}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+a)^{2n}}\right] =$$
$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2n}(2n-1)!\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+b)^{2n}} - \frac{(-1)^k}{(k+a)^{2n}}\right].$$

引理 2 得证。

引理 3　在引理 1 的条件下，函数 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$（其中 $\varepsilon>0$，充分小）定义如下：

$$f_1(x) = \begin{cases} |x|^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty) \\ 0, & x\in(-1,1) \end{cases},$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ |x|^{\beta+\frac{2\varepsilon}{q}}, & x\in[-1,1] \end{cases}$$

则 $\varepsilon \to 0$ 时,有:

$$\varepsilon I := \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x,y) f_1(x) g_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)+\mathrm{o}(1).$$

证明　通过简单的替换,不难得到:

$$\varepsilon I = 2\int_0^1 |y|^{\beta+\frac{2\varepsilon}{q}}\left(\int_1^{\infty} k(x,y)|x|^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + 2\int_{-1}^0 |y|^{\beta+\frac{2\varepsilon}{q}}\left(\int_1^{\infty} k(x,y)|x|^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y := I_1 + I_2 \tag{11}$$

令 $xy=t$,由 Fubini 定理,可知:

$$I_1 = \int_0^1 y^{2\varepsilon-1}\left(\int_y^{\infty} k(1,t)t^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 y^{2\varepsilon-1}\left(\int_1^{\infty} k(1,t)t^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y + \int_0^1 y^{2\varepsilon-1}\left(\int_y^1 k(1,t)t^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int_1^{\infty} k(1,t)t^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t + \int_0^1 k(1,t)t^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\int_0^t y^{2\varepsilon-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int_1^{\infty} k(1,t)t^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 k(1,t)t^{\beta+\frac{2\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t \tag{12}$$

类似地,作变量替换 $xy=-t$,可知:

$$I_2 = \frac{1}{2\varepsilon}\int_1^{\infty} k(1,-t)t^{\beta-\frac{2\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 k(1,-t)t^{\beta+\frac{2\varepsilon}{q}}\mathrm{d}t \tag{13}$$

结合式(11)—(13)并令 $\varepsilon\to 0$ 可得:

$$\varepsilon I = \int_0^{\infty} k(1,t)t^{\beta}\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} k(1,-t)t^{\beta}\mathrm{d}t + \mathrm{o}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(1,t)|t|^{\beta}\mathrm{d}t + \mathrm{o}(1) \tag{14}$$

把式(10)代入式(14),即得引理 3。

定理 2　设 $\lambda_2>\lambda_1>0$,$n\in\mathbf{N}^+$,$\varphi(x)=\csc x$,$k(x,y)$ 和 $C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)$ 由引理 1 定义,$f(x),g(x)\geqslant 0$,$0<\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(p\beta+1)}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$,且 $0<\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(q\beta+1)}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$,则:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(p\beta+1)}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(q\beta+1)}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{15}$$

特别地,若 $\beta=2n-1$,则式(15)转化为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < -\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{2n}\varphi^{2n-1}\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_2}\pi\right)\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(2pn-p+1)}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(2qn-q+1)}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{16}$$

其中:$2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)$ 及 $-\frac{1}{2^{2n-1}}\left(\frac{\pi}{\lambda_2}\right)^{2n}\varphi^{2n-1}\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_2}\pi\right)$ 分别是满足式(15)及式(16)的最佳常数因子。

证明　由 Hölder 不等式,并利用引理 1 的结果,可知:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{[k(x,y)]^{\frac{1}{p}}\frac{|y|^{\beta/p}}{|x|^{\beta/q}}f(x)\right\}\left\{[k(x,y)]^{\frac{1}{q}}\frac{|x|^{\beta/q}}{|y|^{\beta/p}}g(y)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant$$
$$\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\frac{|y|^{\beta}}{|x|^{p\beta/q}}f^p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} k(x,y)\frac{|x|^{\beta}}{|y|^{q\beta/p}}g^q(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$=\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)|x|^{-p\beta/q}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\omega}(y)|y|^{-q\beta/p}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}} = 2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(p\beta+1)}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(q\beta+1)}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \tag{17}$$

若式(17)取等号,则有不全为零的实数 A_1 与 A_2,使得:

$$A_1 k(x,y)\frac{|y|^{\beta}}{|x|^{p\beta/q}}f^p(x) = A_2 k(x,y)\frac{|x|^{\beta}}{|x|^{q\beta/p}}g^q(y)$$

$a.e.$于 $\mathbf{R}^2$(见[14]),即 $A_1|x|^{-p\beta}f^p(x)=A_2|y|^{-q\beta}g^q(y)$ $a.e.$于 $\mathbf{R}^2$。于是,必有常数 A,使得:

$$A_1|x|^{-p\beta}f^p(x)=A, a.e.\text{于 }\mathbf{R};$$
$$A_2|y|^{-q\beta}g^q(y)=A, a.e.\text{于 }\mathbf{R}。$$

不妨设 $A_1\neq 0$,则 $|x|^{-p\beta-1}f^p(x)=\frac{A}{A_1|x|}$ $a.e.$于 $\mathbf{R}$,与 $\int_0^{\infty}|x|^{-p\beta-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$ 矛盾。因此式(17)不取等号。

下证式(15)中的常数因子 $2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)$ 最佳。事实上,若此常数因子不为最佳,则存在更小实数 $k(0<k<2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1))$,使得式(15)中的常数因子换成 k 后式(15)仍成立。即:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < k\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(p\beta+1)}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(q\beta+1)}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

用引理 3 中的 f_1 和 g_1 分别取代上式中的 f 和 g，则：

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}k(x,y)f_1(x)g_1(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$

$$\varepsilon k\left(\int_{-\infty}^{-1}|x|^{-2\varepsilon-1}\mathrm{d}x+\int_{1}^{\infty}|x|^{-2\varepsilon-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_{-1}^{1}|x|^{2\varepsilon-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}=k.$$

把引理 3 的结论代入，并令 $\varepsilon\to 0$，可得：$2C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)\Gamma(\beta+1)\leqslant k$，矛盾。因此式(15)的常数因子最佳。结合 $C_\beta(\lambda_1,\lambda_2)$ 的定义、引理 2（令引理 2 中 $a=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2\lambda_2}$）以及式(15)，可得式(16)。定理 2 证毕。

通过定理 1 与定理 2 对比，不难发现，定理 2 中的最佳常数因子的表达更对称，结构更精美。特别是 $\beta=2n-1$ 时，常数因子的计算非常便捷，在定理 2 中，赋予参数一些特殊的 数值，则可得到一些有意义的推论。如在定理 2 中，若令 $\beta=2n-1,n\in\mathbf{N}^+,\lambda_2=2\lambda_1$，由式(16)便得：

推论 1　设 $\lambda_1>0,n\in N^+,f(x),g(x)\geqslant 0$，$0<\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2pn-p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty,0<\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2qn-q-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty,\varphi(x)=\csc x$ 则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\sinh(\lambda_1xy)|}{\cosh(2\lambda_1xy)}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{-1}{2^{4n-1}}\left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{2n}\varphi^{2n-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(2pn-p+1)}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2qn-q+1)}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\tag{18}$$

特别地，令 $n=\lambda_1=1$，则式(18)转化为式(3)。另外，注意到

$$\frac{|\sinh(\lambda_1xy)|}{\cosh(2\lambda_1xy)}=\frac{1}{2}\mathrm{sech}(\lambda_1xy)\,|\tanh(2\lambda_1xy)|,$$

则式（18）左边的积分核函数还可替换为 $\mathrm{sech}(\lambda_1xy)\,|\tanh(2\lambda_1xy)|$，因此式(3)还可以表述为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sech}(xy)\,|\tanh(2xy)|\,f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\sqrt{2}\pi^2}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-q-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

若在定理 2 中，令 $\beta=2n-1,n\in\mathbf{N}^+,\lambda_2=3\lambda_1$，由式(16)便得推论 2：

推论 2　设 $\lambda_1>0,n\in\mathbf{N}^+,f(x),g(x)\geqslant 0,0<\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2pn-p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty,0<\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2qn-q-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty,\varphi(x)=\csc x$ 则：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\sinh(\lambda_1xy)|\,\mathrm{sech}(3\lambda_1xy)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{-1}{2^{2n-1}3^{2n}}\left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^{2n}\varphi^{2n-1}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-(2pn-p+1)}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{-2qn-q+1)}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

其它的一些赋值如 $\beta=2n-1,\lambda_2=\frac{3\lambda_1}{2}$ 也可以得到一些最佳常数因子容易计算的 Hilbert 型不等式，不再一一赘述。

2　结　语

通过研究一类全平面上混合双曲函数核的二重积分，本文建立了一个新的 Hilbert 型积分不等式。在最佳常数因子的处理上，采用了余割函数的有理分式展开这一新的方法，解决了系数中级数求和的问题，这具有一定的价值，并对其他一些类似的 Hilbert 型积分不等式的探索有一定的借鉴意义。

参考文献：

[1] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952: 255.

[2] Kuang J C, Debnath L. On new generalizations of Hilbert's inequality and their applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 245(1): 248-265.

[3] 杨必成. 一个较为精密的 Hardy-Hilbert 型不等式及其应用[J].数学学报,2006, 49(2): 363-368.

[4] You M H. On a new discrete Hilbert - type inequality and its Application [J]. Mathematica Inequalities &Applications, 2015,18 (4): 1575 - 1587.

[5] 杨必成. 算子范数与 Hilbert 型不等式[M]. 北京：科学出版社, 2009:3-59.

[6] Krnic M, Pecaric J, Peric I, et al. Recent Advances in Hilbert-type Inequalities[M]. Zagreb: Element Press, 2012:34-53.

[7] 有名辉. 一个 Hilbert 型积分不等式的推广[J].浙江理工大学学报,2016, 35(1):150-153.

[8] Mintrinovic D S, Pecaric J E, Fink A M. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives [M]. Boston: Kluwer Academic, 1991: 79-135.

[9] 杨必成,陈强. 一个核为双曲正割函数的半离散 Hilbert

型不等式[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015, 40(2):26-32.

[10] Liu Q, Sun W. A Hilbert-type integral inequality with the mixed kernel of multi-parameters[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2013, 351(15/16): 605-611.

[11] 刘琼,龙顺潮. 一个核为双曲余割函数的 Hilbert 型积分不等式[J].数学学报:中文版,2013,56(1):97-104.

[12] 刘琼,龙顺潮. 一个核为双曲正割函数的 Hilbert 型积分不等式[J].浙江大学学报(理学版),2013,40(3):255-259.

[13] 菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程:第二卷[M]. 徐献瑜,冷生明,梁文骐,译. 2 版. 北京:高等教育出版社, 2006: 625-639.

[14] 匡继昌. 常用不等式[M]. 3 版. 济南:山东科学技术出版社,2003: 5.

(责任编辑:康 锋)