浙江理工大学学报，2020，43(2)：267-271
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673－3851(n).2020.02.018

热防护服中反常热扩散方程 Robin 问题的条件适定性

彭　鹏，徐定华
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：根据连续时间随机游走理论，建立热防护服中具有反常热扩散规律和分数阶 Robin 边界条件的空间分数阶模型，用以描述高温环境下各向同性材料内部及边界上的热传递规律。针对该模型，首先提出了该模型的变分形式，并通过乘以一个简单函数因子，消除了此模型齐次问题的奇异性，给出了变分问题弱解的定义；然后根据分数阶导数算子和分数阶积分算子的性质证明了该模型的条件适定性，即弱解的能量估计和弱解的唯一性。反常扩散方程 Robin 问题的条件适定性结果有利于分析数值算法的收敛性，并为热防护服性能评估提供理论指导。

关键词：反常热扩散；分数阶 Robin 边界条件；空间分数阶模型；变分形式；弱解

中图分类号：O242.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1673-3851 (2020) 03-0267-05

Conditional well-posedness of Robin problem for anomalous thermal diffusion equations of thermal protective clothing

PENG Peng，*XU Dinghua*
(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：According to the theory of continuous time random walk，a spatial fractional order model with anomalous thermal diffusion law and fractional Robin boundary condition was established to describe the heat transfer law inside and on the boundary of isotropic materials under high temperature environment. Aiming at the model，the variational form of the model was first presented. The singularity of the homogeneous problem of this model was eliminated by multiplying a simple function factor，and the definition of the weak solution of the variational problem was further given. Then，based on the properties of the fractional derivative operator and the fractional integral operator，we proved the conditional well-posedness of the model，that is，the energy estimation of the weak solution and the uniqueness of the weak solution. The conditional well-posedness results of anomalous diffusion equations contribute to analyzing the convergence of numerical algorithm and provide theoretical guidance for performance evaluation of thermal protective clothing.

Key words：anomalous thermal diffusion；fractional Robin boundary condition；spatial fractional order model；variational form；weak solutions

0　引　言

热防护服的隔热性能由“人体-服装-环境”系统的热湿传递规律和服装的参数共同决定。系统的热湿传递规律是一个重要问题，一般用经典的热传导来刻画，但在高温高湿的环境中用经典的热传导往往不适用。因此，本文提出一类包含 Riemann-Liouville 分数阶方程和分数阶 Robin 边界条件的空

收稿日期：2019－10－12　　网络出版日期：2020－01－02
基金项目：国家自然科学基金项目(11871435，11471287)
作者简介：彭　鹏(1994－　)，女，安徽宿州人，硕士研究生，主要从事偏微分方程反问题方面的研究。
通信作者：徐定华，E-mail：dhuxu6708@zstu.edu.cn

间分数阶模型来描述高温高湿环境下的热传递规律。

针对“人体-服装-环境”系统的热湿传递规律国内外的学者进行了大量的研究。Henry[1]首次提出和分析了织物的热湿传递性，采用两个抛物型偏微分方程分别描述热、湿传递过程；Torvi 等[2]研究了长时间暴露在辐射下热防护服织物的单层传热模型；Mell 等[3]在单层织物模型的基础上研究了多层织物层的传热模型，其中考虑了系统的热传导、热辐射过程；Mercer 等[4]研究了相变材料的多层织物的热传递模型，并分析了相变材料对热传递的影响。此后，Fan 等[5-6]、Wu 等[7]、Ye 等[8]都对系统的热湿传递规律进行了深入研究，提出了有价值的数学模型。但是，以上这些模型的适定性往往没有经过数学理论的验证，对模型解的能量估计、唯一性也少有数学分析。

本文在 Yu 等[9]的基础上进一步研究了系统的热湿传递规律。首先在服装的左、右边界上采用分数阶 Robin 边界条件，以便更好地描述边界上的热交换过程。然后对所提出的空间分数阶模型进行条件适定性分析，由于分数阶导数算子导致的奇性，空间分数阶偏微分方程的经典解难以给出，故基于模型的变分形式给出了弱解的能量估计，并证明了弱解的唯一性，为热防护服的性能评价与参数优化设计提供理论指导。

1　热防护服中反常热扩散方程 Robin 问题的数学模型

针对热防护服的“人体-服装-环境”系统，该系统包含人体皮肤、服装织物和环境，并由热辐射、热传导和热对流实现系统中的热传递。

在高温条件下，本文对单层织物结构及其内部热传递过程作如下假设：

a)单层纺织材料都是各向同性的；

b)在外界环境变化不大的情况下，织物的有效热传导系数为常数；

c)织物结构几乎不变，有效曲折系数为常数；

d)系统热传递只考虑热传导的传热，热传导是 non-Fourier 热传导，且符合超扩散规律。

根据 CTRW(Continuous Time Random Walk)理论，反常热扩散方程可以表示为：

$$\frac{\partial W}{\partial t}=K^{\mu}-\infty D_x^{\mu}W(x,t),1<\mu<2。$$

其中：$W(x,t)$ 是粒子 t 时刻 x 位置的概率密度函数；K^{μ} 是物质的扩散系数；${}_{-\infty}D_x^{\mu}$ 是 Weyl 算子，在一维情形下等价于 Riesz 算子 ∇^{μ}[10]。而本文只考虑有限的区间，Weyl 算子 ${}_{-\infty}D_x^{\mu}$ 可由 Riemann-Liouville 分数阶导数算子 $D_{0+}^{2-\gamma}$，$1<2-\gamma<2$ 代替。

记 $\Omega=(0,1)\times(0,t_f)$，$I=(0,1)$，$\Lambda=(0,t_f)$。本文基于物理和数学上的考虑，提出了空间分数阶模型，以描述高温环境下各向同性材料内部及边界上的热传递规律。温度 $T(x,t)$ 满足如下的初边值问题：

$$\begin{cases}C_v T_t(x,t)=k_\gamma D_{0+}^{2-\gamma}T(x,t),(x,t)\in\Omega\\ T(x,0)=T_1(x),x\in\bar{I}\\ k_{air}D_{0+}^{1-\gamma}T(x,t)\mid_{x=0}=\\ \quad h_{air}(T\mid_{x=0}-T_{air}),t\in\bar{\Lambda}\\ k_e D_{1-}^{1-\gamma}T(x,t)\mid_{x=1}=\\ \quad h_e(T_e-T\mid_{x=1}),t\in\bar{\Lambda}\end{cases}\tag{1}$$

其中：$D_{0+}^{2-\gamma}T$、$D_{1-}^{2-\gamma}T$ 是左、右 Riemann-Liouville 分数阶导数；分数阶 $\gamma\in(0,1)$；$T_t(x,t)$ 指 $T(x,t)$ 对 t 求一阶导数；C_v 为织物体积热容；$T_1(x)$ 为初始值；T_{air} 表示人体的温度；T_e 表示环境的温度；k_γ 为织物热传导系数；k_{air} 为微气候区的热传导系数；k_e 为环境的热传导系数；h_{air} 为微气候区中的对流热交换系数；h_e 为环境与织物外表面之间的对流热交换系数，均近似地视为常数。

令 $c^2=\dfrac{k_\gamma}{C_v}$，$\alpha=\dfrac{h_{air}}{k_{air}}$，$\beta=\dfrac{h_e}{k_e}$，式(1)可以简化为：

$$\begin{cases}T_t(x,t)=c^2D_{0+}^{2-\gamma}T(x,t),(x,t)\in\Omega\\ T(x,0)=T_1(x),x\in\bar{I}\\ D_{0+}^{1-\gamma}T\mid_{x=0}-\alpha T\mid_{x=0}=-\alpha T_{air},t\in\bar{\Lambda}\\ D_{1-}^{1-\gamma}T\mid_{x=1}+\beta T\mid_{x=1}=\beta T_e,t\in\bar{\Lambda}\end{cases}\tag{2}$$

2　变分形式及弱解的唯一性

2.1　预备知识

定义 1(R-L 左、右分数阶积分)[11-12]　R-L 左、右分数阶积分定义为：

$$I_{0+}^{\alpha}f(x)\triangleq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds,$$

$$I_{1-}^{\alpha}f(x)\triangleq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1\frac{f(s)}{(s-x)^{1-\alpha}}ds,$$

其中：$\Gamma(\cdot)$ 指的是 Gamma 函数。

定义 2(R-L 左、右分数阶导数)[11-12]　R-L 左、右分数阶导数定义为：

$$D_{0+}^{\alpha}f(x)\triangleq D^nI_{0+}^{n-\alpha}f(x),$$

$$D_{1-}^{\alpha}f(x) \triangleq (-D)^{n} I_{1-}^{n-\alpha} f(x),$$

其中：$n=[\alpha]+1$。

定义 3　(R-L 左、右分数阶导数空间)[13] 引入函数：

$$\kappa(\beta) \triangleq \begin{cases} 2, & 0<\beta<1/2 \\ (1-\varepsilon(\beta))/\beta, & 1/2 \leqslant \beta < 1 \end{cases},$$

其中：$\varepsilon(\beta)$ 为一极小的数。

令 $0<\mu<1$，左、右 Riemann-Liouville 分数阶导数空间的定义为：

$$H_{l}^{\mu}(0,1) \triangleq \{v \in L^{\kappa}(0,1): \mathrm{D}_{0+}^{\mu} v \in \mathrm{L}^{2}(0,1)\},$$

$$H_{r}^{\mu}(0,1) \triangleq \{v \in L^{\kappa}(0,1): \mathrm{D}_{1-}^{\mu} v \in \mathrm{L}^{2}(0,1)\},$$

则对应的分数阶导数空间的(半)范数定义为：

$$|v|_{H_{l}^{\mu}(0,1)} \triangleq \| D_{0+}^{\mu} v \|_{L^{2}(0,1)},$$

$$\| v \|_{H_{l}^{\mu}(0,1)} \triangleq \{ \| v \|_{L^{\kappa}(0,1)}^{2} + |v|_{H_{l}^{\mu}(0,1)}^{2} \}^{\frac{1}{2}},$$

$$|v|_{H_{r}^{\mu}(0,1)} \triangleq \| D_{1-}^{\mu} v \|_{L^{2}(0,1)},$$

$$\| v \|_{H_{r}^{\mu}(0,1)} \triangleq \{ \| v \|_{L^{\kappa}(0,1)}^{2} + |v|_{H_{r}^{\mu}(0,1)}^{2} \}^{\frac{1}{2}}。$$

同时给出了空间 $H_{l}^{\mu,0}(0,1) \subset H_{l}^{\mu}(0,1)$，$H_{r}^{\mu,0}(0,1) \subset H_{r}^{\mu}(0,1)$ 的定义：

$$H_{l}^{\mu,0}(0,1) \triangleq \{v \in H_{l}^{\mu}(0,1): \int_{0}^{1} I_{0+}^{1-\mu} v(x)\mathrm{d}x = 0\},$$

$$H_{r}^{\mu,0}(0,1) \triangleq \{v \in H_{r}^{\mu}(0,1): \int_{0}^{1} I_{1-}^{1-\mu} v(x)\mathrm{d}x = 0\},$$

或

$$H_{l}^{\mu,0}(0,1) \triangleq \left\{ v - \frac{\int_{0}^{1} I_{0+}^{1-\mu} v(x)\mathrm{d}x}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} \,\middle|\, \forall v \in H_{l}^{\mu}(0,1) \right\}。$$

对应的范数定义为：

$$\| v \|_{H_{l}^{\mu,0}(0,1)} \triangleq |v|_{H_{l}^{\mu}(0,1)},$$

$$\| v \|_{H_{r}^{\mu,0}(0,1)} \triangleq |v|_{H_{r}^{\mu}(0,1)}。$$

注 1：子空间 $H_{l}^{\mu,0}(0,1)$，$H_{r}^{\mu,0}(0,1)$ 意味着空间 $H_{l}^{\mu}(0,1)$，$H_{r}^{\mu}(0,1)$ 的边界齐次化。举例：$x^{\mu-1} \in H_{l}^{\mu}(0,1)$，$v(x)=x^{\mu-1}-\Gamma(3-\mu)\Gamma(\mu) \in H_{l}^{\mu,0}(0,1)$。

注 2(分数阶分部积分公式)：R-L 分数阶积分算子在 L^2 空间下是伴随算子，即

$$(I_{0+}^{\alpha} w, v)_{\mathrm{L}^{2}(0,1)} = (w, I_{1-}^{\alpha} v)_{\mathrm{L}^{2}(0,1)},$$

$$\forall w, v \in \mathrm{L}^{2}(0,1)。$$

2.2　变分形式与弱解定义

基于上述函数空间定义和分部积分公式，先对边界条件齐次化，再推导弱解满足的变分形式。

对式(2)边界齐次化后，得：

$$\begin{cases} u_{t} = c^{2} D_{0+}^{2-\gamma} u + \Theta(x,t), (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = u_{0}(x), x \in \overline{I} \\ D_{0+}^{1-\gamma} u \mid_{x=0} - \alpha u \mid_{x=0} = 0, t \in \overline{\Lambda} \\ D_{1-}^{1-\gamma} u \mid_{x=1} + \beta u \mid_{x=1} = 0, t \in \overline{\Lambda} \end{cases} \tag{3}$$

其中：$u(x,t) = T(x,t) - h(x,t)$；$\Theta(x,t) = \frac{c^{2}A(t)}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} + \frac{c^{2}B(t)}{\Gamma(\gamma-1)} x^{\gamma-2} - A'(t)x - B'(t)$；$u_{0}(x) = T_{1}(x) - h(x,0)$；$h(x,t) = A(t)x + B(t)$；$A(t) = \dfrac{-\left(\beta+\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right) T_{\mathrm{air}} + \beta T_{\mathrm{e}}}{\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} + \beta}$；$B(t) = T_{\mathrm{air}}$。

对式(3)两边同时乘以 $I_{0+}^{\gamma} v \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; \widetilde{H}^{1}(I))$，并在 Ω 上积分可以得到：

$$(u_{t}, I_{0+}^{\gamma} v) = c^{2}(D_{0+}^{2-\gamma} u, I_{0+}^{\gamma} v) + (\Theta(x,t), I_{0+}^{\gamma} v),$$

$$\forall v \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; H^{1-\gamma,0}(I)),$$

利用分部积分公式有：

$$(D_{0+}^{2-\gamma} u, I_{0+}^{\gamma} v) = -(D_{0+}^{1-\gamma} u, D_{0+}^{1-\gamma} v) + \int_{0}^{t_{f}} u \mid_{x=0} I_{0+}^{\gamma} v \mid_{x=0} \mathrm{d}t + \int_{0}^{t_{f}} u \mid_{x=1} I_{0+}^{\gamma} v \mid_{x=1} \mathrm{d}t = -(D_{0+}^{1-\gamma} u, D_{0+}^{1-\gamma} v),$$

故式(3)的变分形式为：求 $u \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; H^{1-\gamma,0}(I))$ 满足

$$(u_{t}, I_{0+}^{\gamma} v) = -c^{2}(D_{0+}^{1-\gamma} u, D_{0+}^{1-\gamma} v) + (\Theta(x,t), I_{0+}^{\gamma} v), \forall v \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; H_{l}^{1-\gamma,0}(I)) \tag{4}$$

由于 $\Theta(x,t) = \frac{c^{2}}{\Gamma(\gamma)} A(t) x^{\gamma-1} + \frac{c^{2}}{\Gamma(\gamma-1)} B(t) x^{\gamma-2} - A'(t)x - B'(t)$ 带有奇性，所 $(\Theta(x,t), I_{0+}^{\gamma} v)$ 可能不收敛。为了消除分数阶算子带来的奇性，对式(4)两边同乘以 $x^{2-\gamma}$，显然当 $u \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; H_{l}^{1-\gamma,0}(I))$ 时，$x^{2-\gamma} u \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; H_{l}^{1-\gamma,0}(I))$，这样由式(4)，本文可给出式(3)的弱解定义：

定义 4　(弱解)如果存在 $\bar{u} = x^{2-\gamma} u \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; H_{l}^{1-\gamma,0}(I))$ 使得：

$$\begin{cases} (\bar{u}_{t}, I_{0+}^{\gamma} v) = -c^{2}(D_{0+}^{1-\gamma} \bar{u}, D_{0+}^{1-\gamma} v) + \\ \qquad (x^{2-\gamma}\Theta(x,t), I_{0+}^{\gamma} v), \forall v \in \mathrm{L}^{2}(\Lambda; H_{l}^{1-\gamma,0}(I)) \\ \bar{u}(x,0) = \bar{u}_{0}(x) \end{cases} \tag{5}$$

成立，其中 $\bar{u}_{0}(x) = x^{2-\gamma} u_{0}(x)$，那么本文称 u 是式(3)的弱解。

2.3　弱解的能量估计

基于弱解的定义，利用空间范数表达式和不等式技巧，下面推导弱解的能量估计表达式。根据积分中值定理，存在 $\xi \in (0,x)$，使得：

$$I_{0+}^{\gamma}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^x(x-s)^{\gamma-1}f(s)\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}f(\xi)\int_0^x(x-s)^{\gamma-1}\mathrm{d}s=\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}f(\xi)x^{\gamma},$$

由于

$$\frac{\partial(I_{0+}^{\gamma}\tilde{u})^2}{\partial t}=2I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\,\frac{\partial I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}}{\partial t}=2I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\,\frac{x^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}\tilde{u}_t(\xi,t),$$

所以

$$\int_0^1\tilde{u}_t(\xi,t)I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\partial(I_{0+}^{\gamma}\tilde{u})^2}{\partial t}\mathrm{d}x/$$

$$\int_0^1\frac{2x^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{2(\gamma+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2,$$

故当 $\xi\to x$ 时，

$$\int_0^1\tilde{u}_t(x,t)I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{2(\gamma+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2。$$

又根据变分形式，式(4)有：

$$(\tilde{u}_t,I_{0+}^{\gamma}v)+c^2(D_{0+}^{1-\gamma}\tilde{u},D_{0+}^{1-\gamma}v)=(x^{2-\gamma}\Theta(x,t),I_{0+}^{\gamma}v),$$
$$\forall v\in L^2(\Lambda;H_l^{1-\gamma,0}(I)),$$

令 $v=\tilde{u}$，有：

$$(\tilde{u}_t,I_{0+}^{\gamma}\tilde{u})_{L^2(0,1)}=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{2(\gamma+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2,$$

$$c^2(D_{0+}^{1-\gamma}\tilde{u},D_{0+}^{1-\gamma}\tilde{u})_{L^2(0,1)}=c^2\|D_{0+}^{1-\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2=$$
$$c^2\|\tilde{u}\|_{H_l^{1-\gamma,0}(0,1)}^2,$$

$$|(x^{2-\gamma}\Theta(x,t),I_{0+}^{\gamma}\tilde{u})|_{L^2(0,1)}\leqslant$$
$$\|x^{2-\gamma}\Theta(x,t)\|_{L^2(0,1)}\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\|x^{2-\gamma}\Theta(x,t)\|_{L^2(0,1)}^2+\frac{1}{2}\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2,$$

整理后得：

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2+2c^2\|\tilde{u}\|_{H_l^{1-\gamma,0}(0,1)}^2$$
$$\leqslant\|x^{2-\gamma}\Theta(x,t)\|_{L^2(0,1)}^2+\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2,$$

在 $[0,t_f]$ 上积分得：

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}(\cdot,t_f)\|_{L^2(0,1)}^2+$$
$$2c^2\int_0^{t_f}\|\tilde{u}\|_{H_l^{1-\gamma,0}(0,1)}^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot$$
$$\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}_0\|_{L^2(0,1)}^2+\int_0^{t_f}\|x^{2-\gamma}\Theta(x,t)\|_{L^2(0,1)}^2\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^{t_f}\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}\|_{L^2(0,1)}^2\mathrm{d}t,\tag{6}$$

又因对 $\forall u\in H_l^{1-\gamma}(0,1)$，存在一正常数 C_1，使得 $\|I_{0+}^{\gamma}u\|_{L^2(0,1)}\leqslant C_1\|u\|_{H_l^{1-\gamma}(0,1)}$ 成立[13]。因此式(6)可简化为：

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}(\cdot,t_f)\|_{L^2(0,1)}^2+$$
$$C\int_0^{t_f}\|\tilde{u}\|_{H_l^{1-\gamma,0}(0,1)}^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot$$
$$\|\tilde{u}_0\|_{L^2(0,1)}^2+\int_0^{t_f}\|x^{2-\gamma}\Theta(x,t)\|_{L^2(0,1)}^2\mathrm{d}t。$$

其中：$C=2c^2-C_1^2$。故可以得到定理 1：

定理 1(弱解的能量估计) 对任意的 $\gamma\in(0,1)$，若 u 是式(3)的弱解，则本文可以得到如下的能量估计：

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot\|I_{0+}^{\gamma}\tilde{u}(\cdot,t_f)\|_{L^2(0,1)}^2+$$
$$C\int_0^{t_f}\|\tilde{u}\|_{H_l^{1-\gamma,0}(0,1)}^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot$$
$$\|\tilde{u}_0\|_{L^2(0,1)}^2+\int_0^{t_f}\|x^{2-\gamma}\Theta(x,t)\|_{L^2(0,1)}^2\mathrm{d}t,$$

或

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot\|I_{0+}^{\gamma}x^{2-\gamma}u(\cdot,t_f)\|_{L^2(0,1)}^2+$$
$$C\int_0^{t_f}\|x^{2-\gamma}u\|_{H_l^{1-\gamma,0}(0,1)}^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)}\cdot$$
$$\|x^{2-\gamma}u_0\|_{L^2(0,1)}^2+\int_0^{t_f}\|x^{2-\gamma}\Theta(x,t)\|_{L^2(0,1)}^2\mathrm{d}t。$$

2.4 弱解的唯一性

根据定理 1 中弱解的能量估计，可推导出式(3)弱解的唯一性，该结果说明了空间分数阶模型的合理性。

引理 1 (弱解的唯一性)对任意的 $\gamma\in(0,1)$，若 $u_1,u_2\in L^2(\Lambda;H^{1-\gamma,0}(I))$ 都是式(3)的弱解，则 u_1,u_2 在其定义域上几乎处处相等。

证明 若 u_1,u_2 都是式(3)的弱解，则存在 $\tilde{u}_1=x^{2-\gamma}u_1,\tilde{u}_2=x^{2-\gamma}u_2$ 分别满足：

$$\begin{cases}((\tilde{u}_1)_t,I_{0+}^{\gamma}v)=-c^2(D_{0+}^{1-\gamma}\tilde{u}_1,D_{0+}^{1-\gamma}v)+\\ \quad(x^{2-\gamma}\Theta(x,t),I_{0+}^{\gamma}v),\\ \quad\forall v\in L^2(\Lambda;H_l^{1-\gamma,0}(I))\\ \tilde{u}_1(x,0)=\tilde{u}_0(x)\end{cases},$$

$$\begin{cases}((\tilde{u}_2)_t,I_{0+}^{\gamma}v)=-c^2(D_{0+}^{1-\gamma}\tilde{u}_2,D_{0+}^{1-\gamma}v)+\\ \quad(x^{2-\gamma}\Theta(x,t),I_{0+}^{\gamma}v),\\ \quad\forall v\in L^2(\Lambda;H_l^{1-\gamma,0}(I))\\ \tilde{u}_2(x,0)=\tilde{u}_0(x)\end{cases},$$

令 $u=u_1-u_2,\tilde{u}=\tilde{u}_1-\tilde{u}_2$，则 $\tilde{u}$ 满足：

$$\begin{cases}(\tilde{u}_t,I_{0+}^{\gamma}v)=-c^2(D_{0+}^{1-\gamma}\tilde{u},D_{0+}^{1-\gamma}v),\\ \quad\forall v\in L^2(\Lambda;H_l^{1-\gamma,0}(I))\\ \tilde{u}(x,0)=0\end{cases}\tag{7}$$

根据变分形式的推导及弱解的定义可知，式(7)满足 $\tilde{u}=x^{2-\gamma}u$ 的 u 是

$$\begin{cases}u_t=c^2D_{0+}^{2-\gamma}u,\quad(x,t)\in\Omega\\ u(x,0)=0,\quad x\in\bar{I}\\ D_{0+}^{1-\gamma}u\mid_{x=0}-\alpha u\mid_{x=0}=0,\quad t\in\bar{\Lambda}\\ D_{1-}^{1-\gamma}u\mid_{x=1}+\beta u\mid_{x=1}=0,\quad t\in\bar{\Lambda}\end{cases}$$

的弱解，故由弱解的能量估计知：

$$\frac{\Gamma(\gamma+1)}{(\gamma+1)} \cdot \| I_{0+}^{\gamma} \bar{u}(\cdot, t_f) \|_{L^2(0,1)}^2 + C\int_0^{t_f} \| \bar{u} \|_{H_l^{1-\gamma,0}(0,1)}^2 \mathrm{d}t \leqslant 0,$$

故 $\bar{u} \equiv 0$，即在 $L^2(\Lambda; H_l^{1-\gamma,0}(I \backslash E_0))$ 中有 $u_1 = u_2$，这里 E_0 指的是零测度集。

□

定理 2　对任意的 $\gamma \in (0,1)$，若 $u \in L^2(\Lambda; H_l^{1-\gamma,0}(I))$ 是式(3)的弱解，则式(2)的弱解 $T = u + h \in L^2(\Lambda; H_l^{1-\gamma,0}(I \backslash (0,\varepsilon)))$ 是唯一的。

3　结　语

本文基于反常热扩散规律，建立了一个包含分数阶方程和分数阶 Robin 边界条件的空间分数阶模型，用以描述高温环境下更快的热传递过程，以便更好地应用于热力学与热工程应用研究，如热防护服的参数优化等问题。本文对所提出的模型进行了条件适定性分析，为了消除分数阶导数算子导致的奇性，给出了弱解的新定义，由此推证了弱解的能量估计式，并证明了弱解的唯一性。

本文提出的空间分数阶模型只考虑了热传导对温度的影响，没有考虑辐射、湿传递等因素对温度的影响。然而，这些因素在消防救火等高温环境下往往不能忽略。因此，后续研究可考虑在模型中加入辐射项和凝结率等因素。另外，本文提出的模型只考虑了单层织物的"人体-服装-环境"系统，后续研究可考虑双层织物或多层织物模型。

参考文献：

[1] Henry P S H. Diffusion in absorbing media [J]. Proceedings of the Royal Society A, 1939, 171(2): 215-241.

[2] Torvi D A, Dale J D. Heat transfer in thin fibrous materials under high heat flux[J]. Fire Technology, 1999, 35(3): 210-231.

[3] Mell W E, Lawson J R. A heat transfer model for fire fighter's protective clothing[J]. Fire Technology, 2000, 36(1): 39-68.

[4] Mercer G N, Sidhu H S. Mathematical modelling of the effect of fire exposure on a new type of protective clothing[J]. Australian & New Zealand Industrial & Applied Mathematics Journal, 2008, 48: 289-305.

[5] Fan J T, Cheng X Y, Wen X H, et al. An improved model of heat and moisture transfer with phase change and mobile condensates in fibrous insulation and comparison with experimental results[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2004, 47(10/11): 2343-2352.

[6] Fan J T, Luo Z X, Li Y. Heat and moisture with sorption and condensation in porous clothing assemblies and numerical simulation[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2000, 43(16):2989-3000.

[7] Wu H J, Fan J T. Study of heat and moisture transfer within multi-layer clothing assemblies consisting of different types of battings[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2008, 47(5): 641-647.

[8] Ye C, Huang H, Fan J T, et al. Numerical study of heat and moisture transfer in textile materials by a finite volume method[J]. Communications in Computational Physics, 2008, 4(4):929-948.

[9] Yu Y, Xu D H, Xu Y S, et al. Variational formulation for a fractional heat transfer model in firefighter protective clothing [J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(23/24): 9675-9691.

[10] 郭柏灵，蒲学科，黄凤辉. 分数阶偏微分方程及其数值解[M]. 北京：科学出版社，2011:1-26.

[11] Podlubny I. Fractional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1999: 67-123.

[12] Samko S, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications [M]. London: Gordon and Breach, 1993:23-58.

[13] Wang H, Yang D P. Wellposedness of Neumann boundary-value problems of space-fractional differential equations[J/OL]. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2017, 20(6). https://doi.org/10.1515/fca-2017-0072.

（责任编辑：康　锋）