



脉冲水射流产生过程的流体力学特性数值模拟

王天雨, 施红辉, 董若凌, 张一博, 师 顺

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘 要: 为了研究脉冲水射流的流体力学特性, 通过流体仿真软件 Fluent15.0 对两种实验工况下高压气体驱动水柱的流体力学过程进行了二维数值模拟, 这两种实验工况分别是常温常压下直喷嘴圆管内 0.25 MPa 的高压氦气驱动和水枪中火药燃烧产生高压火药气体驱动。分别采用了 SST $k-\omega$ 、Standard $k-\epsilon$ 湍流模型与 VOF 模型, 研究了在高压气体的驱动下水射流的流体力学特征, 并对数值模拟结果与实验结果进行了比较。模拟结果表明: 在采用 SST $k-\omega$ 湍流模型的氦气驱动水柱的数值模拟中, 气泡与射流前端速度呈单调递增变化, 管内两观测点的压力先增大后减小, 与实验结果有很好的-致性; 在使用 Standard $k-\epsilon$ 湍流模型的火药水枪数值模拟中, 模拟中水柱的速度变化与实验结果也有很好-致性, 射流在 1.50 ms 左右达到最大然后逐渐减小。两组结果表明, 所采用的数值方法在模拟高压气体驱动大体积液柱射流方面有一定的准确性。

关键词: 脉冲水射流; 数值模拟; 气/液界面; 射流速度

中图分类号: O359+1

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2020)01-0063-08

Numerical simulation of hydrodynamic characteristics in the process of pulsed water jet

WANG Tianyu, SHI Honghui, DONG Ruoling, ZHANG Yibo, SHI Shun

(Faculty of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech
University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to study the hydrodynamic characteristics of pulsed water jet, the two-dimensional numerical simulation of the hydrodynamic process of water column driven by high-pressure gas under two experimental conditions was carried out by using the fluid simulation software Fluent 15.0. The two experimental conditions were high-pressure helium-driven water jet tube at room temperature and pressure and high-pressure gunpowder combustion in water gun at 0.25 MPa. SST $k-\omega$, Standard $k-\epsilon$ turbulence model and VOF model were used to investigate the hydrodynamic characteristics of water jet driven by high pressure gas, and the numerical simulation results were compared with the experimental results. The simulation results show that in the numerical simulation of helium-driven water column by SST $k-\omega$ turbulence model, the velocity of bubbles and jet front end increases monotonously, and the pressure of two observation points in the tube increases first and then decreases, which is in good agreement with the experimental results. In the numerical simulation of gunpowder water gun by Standard $k-\epsilon$ turbulence model, the velocity variation of the water column in the simulation is also in good line with the experimental results. The jet flow reaches its maximum at about 1.50 ms and then decreases gradually. The results of the two groups show that the numerical method adopted in the simulation has certain accuracy in simulating large volume liquid column jet flow driven by high pressure gas.

Key words: pulsed water jet; numerical simulation; gas/liquid interface; jet velocity

收稿日期: 2019-04-13 网络出版日期: 2019-10-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(11772309); 浙江省基础公益研究项目(LGG19A02002); 浙江省自然科学基金项目(LY17E060006)

作者简介: 王天雨(1995-), 男, 安徽宿州人, 硕士研究生, 主要从事新型脉冲式消防器方面的研究。

通信作者: 施红辉, E-mail: hhshi@zstu.edu.cn

0 引言

高速脉冲射流是研究流体动力学的基础课题之一,广泛存在于水力发电、消防减灾、农田喷灌等领域。但是提高大体积(如1 L)液体的速度在技术上非常困难,且被瞬态加速的液体的力学行为非常复杂。施红辉等^[1-4]基于激波管的工作原理,利用压缩气体直接加速水柱产生脉冲水射流,本文基于此进行圆管内高压氮气驱动水射流的研究工作;Semko等^[5]对火药驱动的高速脉冲水枪进行了实验研究,利用激光非接触式速度测量仪测量了气体火焰附近射流的速度,对流场进行了摄影,根据初步实验结果,计算了火药脉冲水枪在不同速度下液体流动时的水动力参数,本文基于此进行了火药水枪产生脉冲水射流的研究工作。

计算流体力学的发展,使得高速脉冲射流的可视化研究成为可能。邓军等^[6]对高压空气驱动的脉冲水枪进行数值模拟,对比了不同喷嘴结构的计算结果,研究了不同喷嘴结构对气液分布、能量转化、速度分布的影响,研究表明:维多辛斯基曲线结构喷嘴的出口速度更稳定、集束性更好、能量转化率更高,且产生的射流水柱呈锥式逐渐扩散,动能集中分布在轴线附近,能有效增大喷射距离,提高脉冲水枪的灭火效率;Guha等^[7]利用欧拉多相湍流模型和 $k-\epsilon$ 湍流模型,准确预测了高速水射流在空气中的流动物理特性;Srinivasan等^[8]在液体射流入口处施加有限频率和振幅的正弦速度波动,并且使用流体积法(Volume of Fluids)捕获液体射流表面变形,利用任意网格的压缩界面捕获方案(CICSAM)

模拟参数的变化,在给定一组无量纲参数的情况下预测了液体的崩解模式;杨国来等^[9]针对两种不同结构型式的圆锥形喷嘴,利用CFD方法对高压脉冲水射流速度、压力、介质等物理量进行两相流的数值模拟分析,结果表明:对于锥形喷嘴,长径比在2~4最为合适。

由于高压气体驱动的水射流技术涉及流体的可压缩性、射流的空气动力学特性以及驱动介质自身的性质差异,因此流动机理十分复杂,并未被完全了解。本文针对高压气体驱动的水射流技术进行了数值模拟,分析了在高压气体驱动下,管内外的气液分布与水射流的流体力学特性;对比了数值模拟与实验结果,阐述了两之间的一致性与差异性,并讨论了产生差异的原因。本文提出的数值方法可为进一步研究其它工况下高速脉冲水射流流体力学特性提供参考。

1 研究对象与数值方法

1.1 研究对象

本文的研究对象是基于文献^[1]所采用的实验装置,其结构如图1(a)所示。实验装置为垂直布置的圆管,长500 mm,内径34 mm,主要由两部分组成:一是位于底部的长250 mm、充满氮气的高压气体室;二是位于上部的长250 mm、充满水(体积约为0.23 L)的低压水室。高压气体室与低压水室之间用16 mm厚的聚脂薄膜隔开(数值模型中忽略其影响)。实验数据获取自图1(b)所示高速摄影可视化系统^[1]。图1中的CH1、CH2为压力采样点,本文的计算结果将与高速摄影图像及CH1、CH2位置的

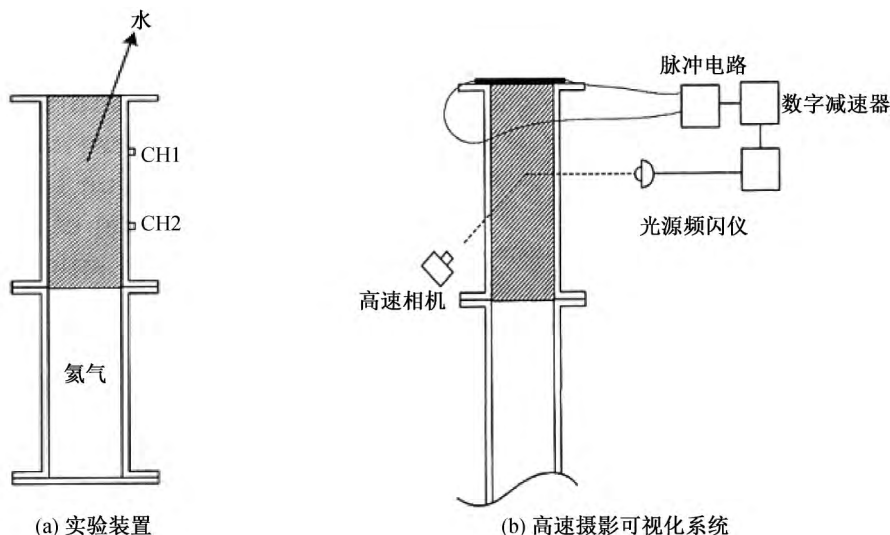
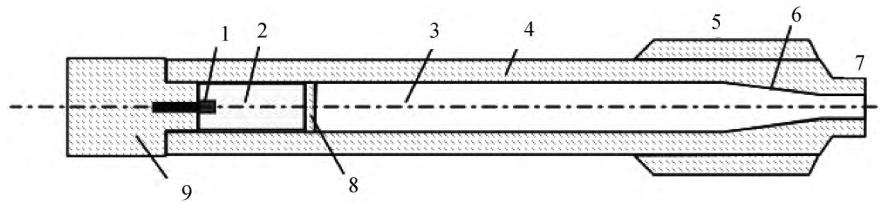


图1 高压气体驱动水射流实验装置示意图

本文将模型应用于图 2 所示火药脉冲水枪的工作过程^[2], 该水枪出口喷嘴为直径 15 mm 的渐缩喷嘴; 枪管中装载有质量为 450 g 的水; 火药

当量为 30 g。实验以火药点火时间作为初始零时刻, 火药剧烈燃烧产生高压火药气体驱动水从喷嘴射出。



1—点火器; 2—燃烧室; 3—水; 4—枪管; 5—夹板; 6—喷嘴; 7—准直器; 8—隔板; 9—炮尾柱

图 2 火药脉冲水枪实验装置示意图

1.2 数值方法

1.2.1 控制方程及湍流模型

高压气体驱动水射流的驱动源为高压氦气, 而火药脉冲水枪是由火药燃烧产生的火药气体驱动的, 喷射过程都是毫秒级的高速气液多相非定常流动过程。因此, 本文选择的数值模型是一种可压缩湍流模型。对火药脉冲水枪的数学模型进行阐述时, 应接受以下假设: 假定水是理想可压缩液体, 它的黏度、热传导和横向流动被忽略(准一维近似); 忽略隔板的影响。因为火药脉冲水枪产生的水射流速度更快, 雷诺数更大, 所以采用的湍流模型为 Standard $k-\epsilon$ 模型, 其余计算方法与高压气体驱动水射流类似。

在高压气体驱动水射流的数值模拟过程中, 采用了 SST $k-\omega$ 模型^[10] 模拟湍流, 利用 VOF 方法^[11] 追踪管道内部及外部的气液界面。为了便于求解, 本文作出如下假设: a) 忽略重力的影响; b) 氦气设为非黏性可压缩理想流体。根据守恒关系, 结合 VOF 模型和 SST $k-\omega$ 湍流模型, 控制方程为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \rho \mathbf{f} + \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot [\mathbf{v} (\rho E + p)] = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3)$$

其中: t 表示时间, ms; \mathbf{v} 表示流体速度, m/s; ρ 表示压力, MPa; \mathbf{f} 表示体积力, N/m³; ρ 表示流体密度, kg/m³; μ 表示动力黏度, N·s/m²; \mathbf{F} 表示表面张力, N/m³; E 表示总能量。

考虑到高压气体氦气的可压缩性, 理想气体的状态方程为:

$$p = \rho RT \quad (4)$$

其中: R 表示气体常数, T 表示温度。

SST $k-\omega$ 湍流模型由 Menter 提出, 该模型综合了 $k-\omega$ 模型在近壁区计算的优点和 $k-\epsilon$ 模型在远场计算的优点, 增加了交叉扩散项, 并在湍流黏性系数的定义中考虑了湍流切应力的输送过程, 从而使 SST $k-\omega$ 湍流模型应用范围更广^[12]。其输运方程为:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + S_i, (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Omega_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \omega u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Omega_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega \quad (7)$$

式中 Ω 、 Ω_k 、 Ω_ω 表示速度 u (v 或 w)、湍动能 k 及比耗散率 ω 的有效扩散系数, 其各自定义为:

$$\begin{cases} \Omega = \mu + \mu_t \\ \Omega_k = \mu + \mu_t / \sigma_k \\ \Omega_\omega = \mu + \mu_t / \sigma_\omega \end{cases} \quad (8)$$

G_k 、 G_ω 表示 k 、 ω 的产生项; Y_k 、 Y_ω 表示 k 、 ω 的耗散项; D_ω 表示交叉扩散项, 起协调 $k-\epsilon$ 湍流模型与 $k-\omega$ 湍流模型交界区域的作用; S_i 、 S_k 、 S_ω 为各输运方程的自定义源项; μ_t 表示湍流黏性系数, 其计算公式为:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max \left[\frac{1}{a^*}, \frac{SF_2}{a_1 \omega} \right]} \quad (9)$$

其中: S 为平均应变率的张量模量; F_1 、 F_2 为混合函数; σ_k 、 σ_ω 、 a^* 为湍流模型中的系数; a_1 为湍流模型常数。

对于火药水枪, 在 Standard $k-\epsilon$ 模型中, 湍动能 k 和耗散率 ϵ 方程如下:

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (10)$$

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \epsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + G_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon \quad (11)$$

其中: u_i ($i=1,2,3$) 表示速度张量; μ 表示动力黏度; G_k 、 G_b 分别表示由平均速度梯度和浮力引起的湍动能 k 的产生项; Y_M 为可压缩湍流脉动膨胀对总的耗散率的影响; $C_{1\epsilon}$ 、 $C_{2\epsilon}$ 、 $C_{3\epsilon}$ 为经验常数; S_k 和 S_ϵ 是用户定义的源项; 湍流黏性系数 $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ 。

1.2.2 数值模型及边界条件

图3为高压气体驱动水射流二维轴对称数值模

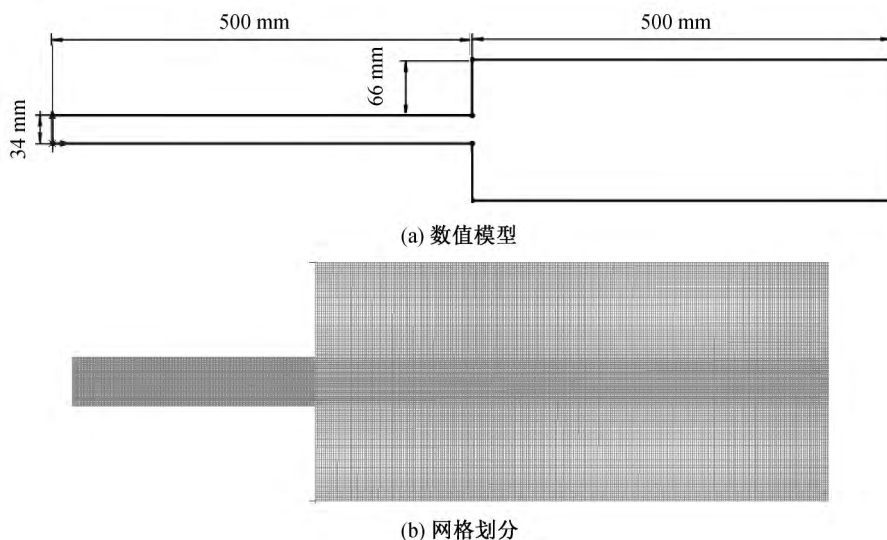


图3 数值模型及网格划分

表1 计算参数表

材料	压力/MPa	密度/(kg·m ⁻³)	速度/(m·s ⁻¹)
氦气	0.25	0.1625	0.0
空气	0.1	1.2250	0.0
水	0.1	0.9982	0.0

图4为火药脉冲水枪二维轴对称数值模拟的网格划分,由于计算域的面积较大,只截取了喷嘴

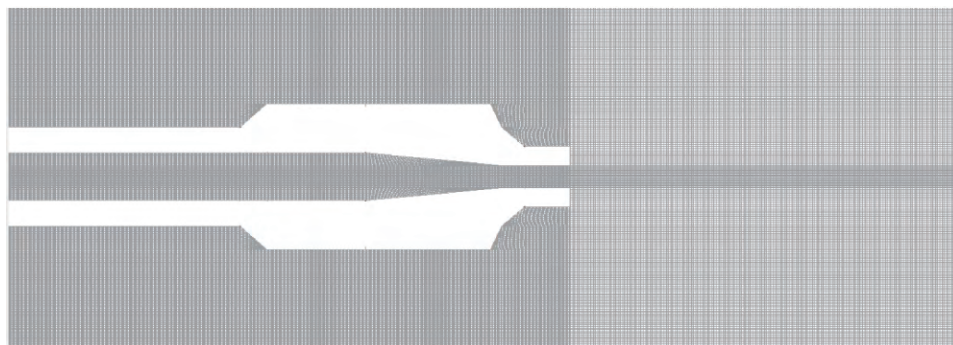


图4 火药脉冲水枪数值模拟的网格划分

本文在使用 SST $k-\omega$ 湍流模型模拟圆管内高压气体驱动水射流之前,采用了两种不同的壁面函

拟的计算模型与截取的圆管出口附近的一部分计算域,加密了管内计算域及管外中心轴线附近部分,模型使用结构化四边形网格。如图3所示,圆管的计算域为 34 mm×500 mm,空气相的计算域为 166 mm×500 mm,网格数量约为 10 万。使用 Fluent 软件中的 patch 指令将气液相的参数(压力、速度、温度)设置成与破膜瞬间相同的参数。边界条件为:圆管左侧设置为压力进口,管两侧设置为无滑移壁面,其余边界条件设置为压力出口。实验参数见表1。

与出口的一部分,网格数量约为 20 万,网格为结构化网格,对枪管及中心轴线附近网格加密。枪管左侧为压力进口,其余枪管部分包括准直器和夹板等设置为壁面,剩下部分设置为压力出口。由于压力进口的压力是随着时间不断变化的(具体变化规律可参考文献[5]),所以采用编译的 UDF 处理。

数,分别是标准壁面函数和非平衡壁面函数,图5为两种壁面函数下模拟的圆管内高压氦气撞击水柱的

气/液界面对比图,从图中可以看出,由于非平衡壁面函数考虑了压力梯度的影响,所以能更准确地模拟所研究的气液两相流动。

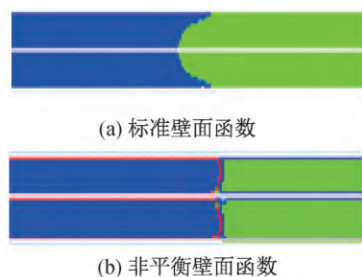


图 5 高压气体驱动水射流在两种壁面函数下模拟结果对比

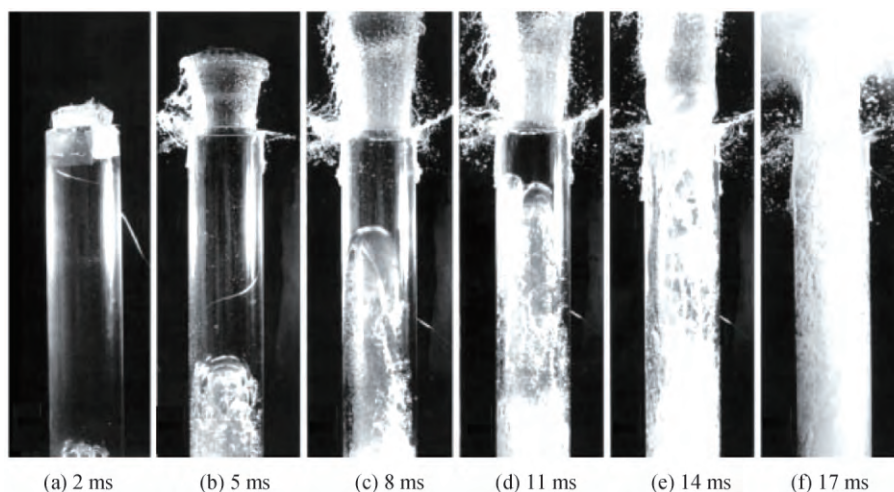


图 6 高压气体驱动水射流实验拍摄图片

图 7 为高压气体驱动水射流数值模拟的水相图。从图 7(a)——(g)中可以看出,在射流的初始阶段,由于受到高压氮气的冲击,导致气液界面出现 Richtmyer-Meshkov 不稳定性现象,并在水中产生了中间凸起向上运动的气泡;同时水柱开始流出圆管,由于水柱受到加速的影响导致射流的速度逐渐升高,水柱头部开始变形并向横向扩展,从而形成蘑菇状的射流前端。水射流完全运动到圆管外时拥有更高速度(如图 7(h)——(j)所示),当水射流追上了速度较低的初始产生的水射流,导致了射流的横向扩张。当水中的气泡离开圆管后,它们就开始向下游运动,并且在垂直于加速度的方向上扩张。由于气泡与周围空气之间的压力差,使得气泡与周围的水之间会产生很大的加速度,就会导致 Rayleigh-Taylor 不稳定性的产生。因为在横向方向上,水层的厚度更薄,所以在轴向方向产生的加速度要比横向方向的加速度更大,因此射流在横向方向上扩张的更快,与实验结果相比,射流总体的发展趋势是大致相同的。

2 结果与分析

2.1 高压气体驱动水射流的数值模拟

图 6 为高压气体驱动水射流的实验拍摄图片^[1]。在图 6(a)中,由高压氮气驱动的水射流开始流出圆管出口;在图 6(b)中,受到空气阻力的影响,射流直径逐渐增大。这种现象可以理解为:停滞在射流前端的液体颗粒受到滞止压力引起的压力差,导致液柱在横向方向上快速扩张;图 6(c)和(d)中,射流左侧有液体剥落,似由 Kelvin-Helmholtz 不稳定性所致,但是推测是由圆管出口处的贴纸引起的;图 6(e)和(f)分别为氮气流出圆管之前和之后的图片,从图中可以看出,高压气体的流出造成了射流快速的雾化和喷雾的横向扩张。

图 8 为数值模拟与实验中水射流横向扩散的最大宽度随时间变化的对比图,由于实验结果数据比较少,所以只得到三组数据,但是从图中可以看出,射流的横向宽度都是随着时间 t 单调递增的。

图 9 为高压气体驱动水射流数值模拟的速度云图。从图 9(a)——(e)中可以看出,在射流的初始阶段,射流前端下游会产生一个低速区域。并且由于受到气泡与周围大气之间的压差影响,在上游,射流两侧产生了对称分布的高速区域。随后,从图 9(f)——(i)中可以看出,低速区逐渐从射流前端向下游两侧运动,最终如图 9(j)所示,随着水柱完全运动到圆管外,低速区域扩展至整个下游。对于高压气体驱动水射流数值模拟和实验结果,其中射流前端与管内气泡运动速度随着它们运动距离变化的对比情况如图 10 与图 11 所示,两图中的理论解与实验结果数据来源于文献^[1]。从图 9 中可以看出,数值模拟与实验结果速度的变化趋势是一致的,都呈现出单调递增的变化。

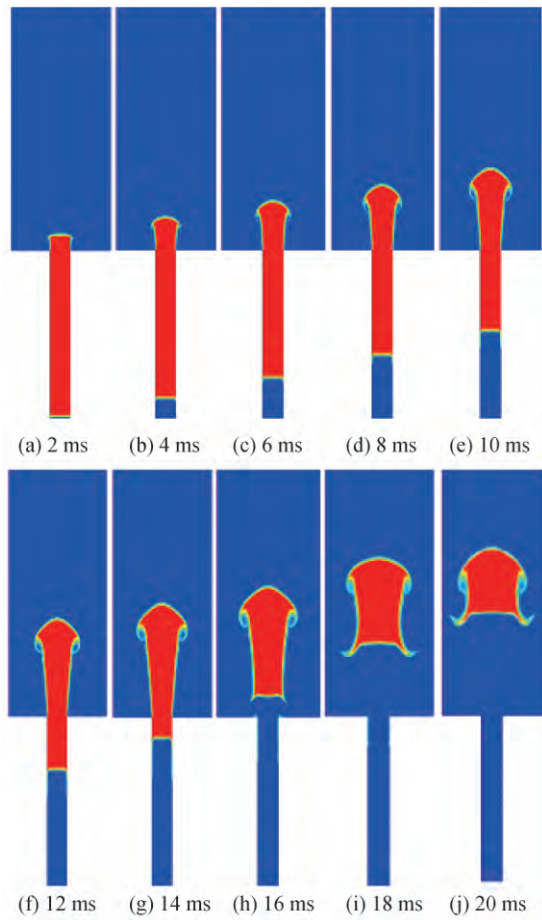


图7 高压气体驱动水射流数值模拟水相图

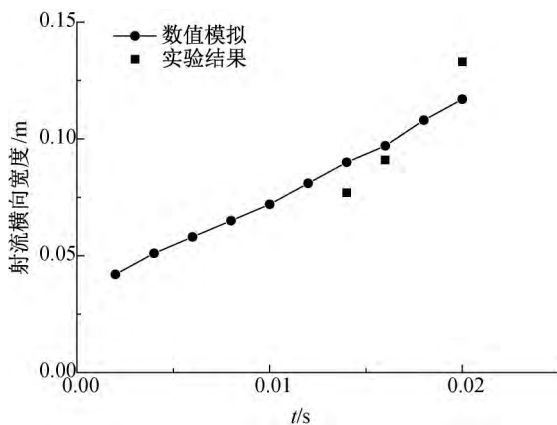


图8 高压气体驱动水射流射流横向宽度变化曲线

图12为高压气体驱动水射流数值模拟的压力云图。从图12(a)~(e)中可以看出,受到高压氦气段的影响,在此阶段压,圆管内高压逐渐从上游往下游传递,直到图12(i),整个圆管完全成为高压区;从图12(f)~(j)可以看出,在液柱射流蘑菇状头部上游开始生成对称分布的高压区,随着射流的运动,高压区逐渐扩大;并且由于水柱完全运动到圆管外,高压氦气也进入空气中,使得周围空气的压力也随之增大。图13为数值模拟中管上CH1与

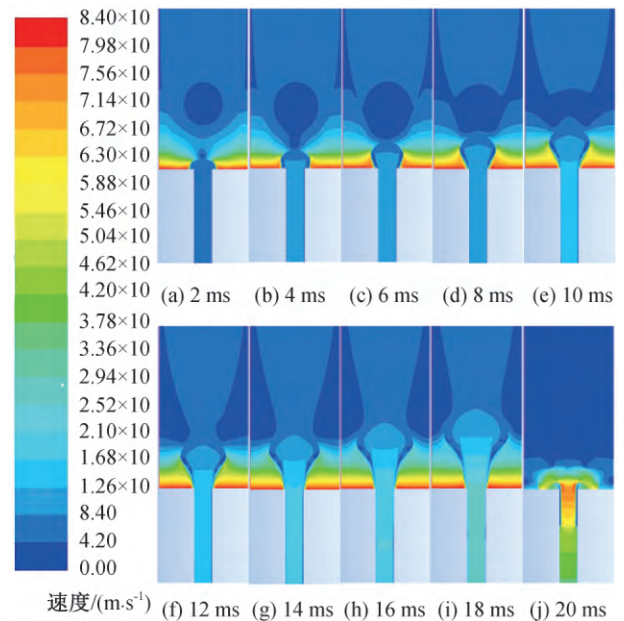


图9 高压气体驱动水射流数值模拟速度云图

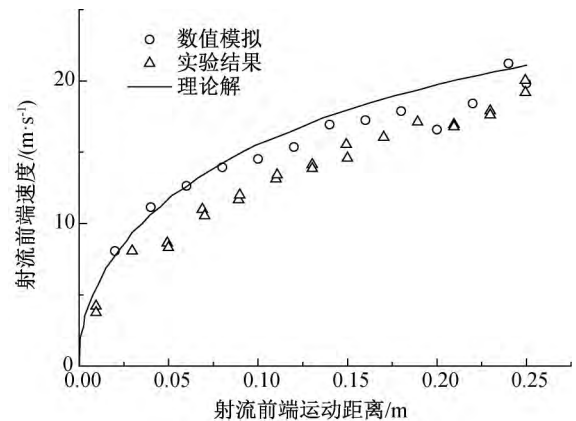


图10 高压气体驱动水射流时射流前端速度变化曲线

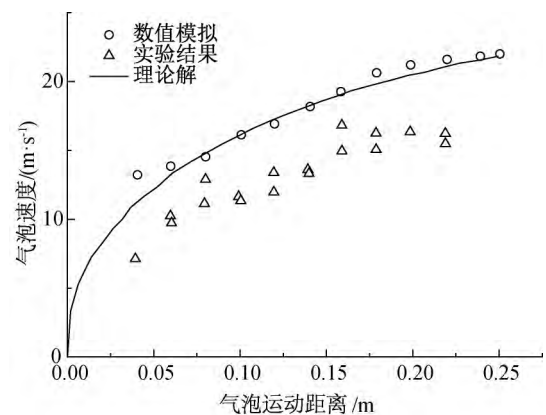


图11 高压气体驱动水射流时气泡速度变化曲线

CH2观测点上压力变化,并且由于一些实验因素(没有完全破掉的膜等),结果存在一些偏差,但是从图中可以看出其与文献[1]中的实验结果基本趋势是相同的,两者的压力变化都呈现出先增长后减小的趋势。

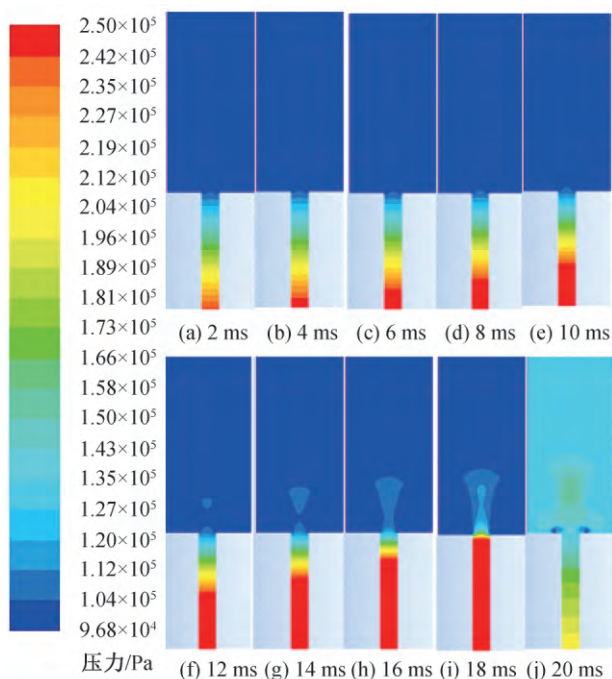


图 12 高压气体驱动水射流数值模拟压力云图

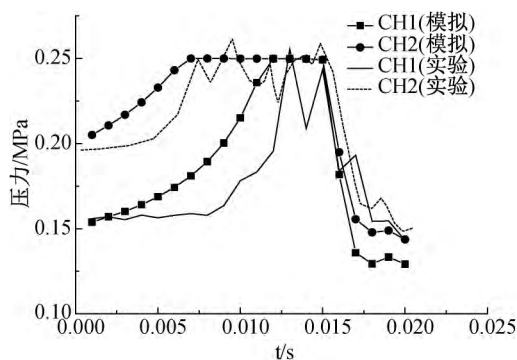
图 13 高压气体驱动水射流数值模拟
CH1 与 CH2 位置压力变化曲线

图 14 为高压气体驱动的水射流数值模拟的涡量云图。从图 14(a)~(c)可以看出,射流受到高压气体驱动流出管外,由于液柱与周围空气的密度与压力差的影响,水柱表面产生涡量;从 16 ms 即图 14(d)开始,氢气开始从管口流出,涡量发生断裂,仅剩射流底部部分,并在液柱两侧形成涡旋。

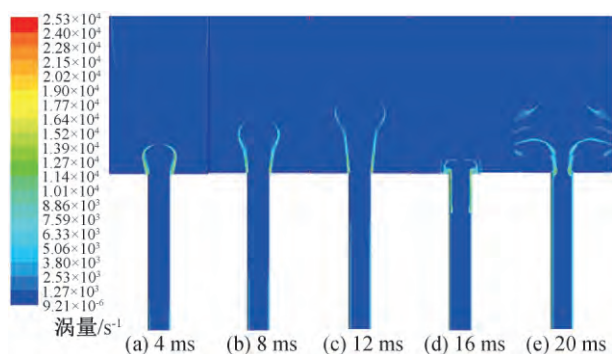


图 14 高压气体驱动水射流数值模拟涡量云图

2.2 火药脉冲水枪的数值模拟

图 15 为火药脉冲水枪的数值模拟的示意图。从图 15 中可以看出,燃烧室内火药燃烧产生的火药气体加速了水柱,当水柱经过渐缩喷嘴时,水柱被持续加速并且开始快速增长。水柱一开始流速较慢,随着射流速度的增加,液体发生了明显的雾化破碎行为,随后射流速度随着火药气体压力的增长而增长。图 16 为火药脉冲水枪的数值模拟与实验结果速度变化的对比图,从图中可以看出,脉冲水枪的射流开始是从零速流出,在火药燃烧过程中,流出速度迅速增加,从发射开始大约 1.50 ms 后速度达到最大值。文献[5]中指出火药在 1.57 ms 时完全燃烧。此时,射流速度略有下降。火药完全燃烧后,射流速度缓慢下降至 350 m/s 左右。考虑到模拟时编写 UDF 中的压力要略高于实验压力,数值模拟与实验结果之间的差异在误差范围内。

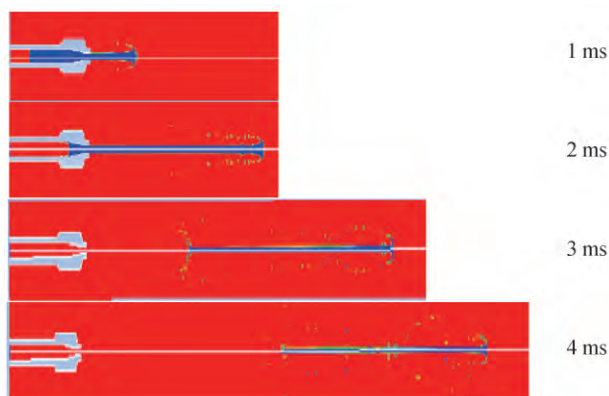


图 15 火药脉冲水枪的数值模拟水相图

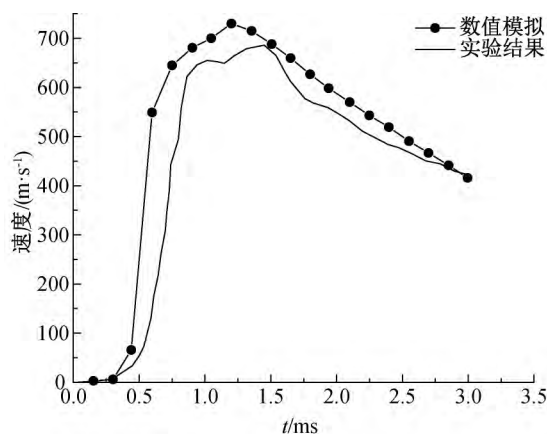


图 16 火药脉冲水枪的数值模拟与实验结果速度变化曲线

3 结 论

本文通过对前人文献中的实验工况进行数值研究,为了模拟在高压梯度下水柱射流的发展,采用了 VOF 结合 SST $k-\omega$ 和 Standard $k-\epsilon$ 湍流模型的计算方法,将得到的计算结果与实验结果进行对比,

得出如下结论:

a) 针对高压驱动下液柱射流的发生机理的数值计算中,发现采用非平衡壁面函数和 SST $k-\omega$ 湍流模型,比采用标准壁面函数和 $k-\epsilon$ 湍流模型,能更准确地模拟所研究的气液两相流动。

b) 液柱射流与气泡速度随运动距离的变化与实验结果发展趋势是一致的,都是单调递增的。

c) 数值模拟中圆管内两个观测点压力变化与实验测量结果是一致的,呈现出先增大后减小的趋势。说明本文所使用的数值模拟方法能够较为准确地计算高速脉冲液体射流。

d) 对火药脉冲水枪的数值模拟发现,随着射流速度的增加,液体雾化破碎行为明显,本文采用的数值模型依然有效。

参考文献:

- [1] Shi H H, Wang X L, Itoh M, et al. Acceleration of water column and generation of large flow rate water spray by shock tube[J]. JSME International Journal Series B, 2001, 44(4): 543-551.
- [2] 施红辉. 激波管喷雾器: ZL02217485. 0[P]. 2003-04-02.
- [3] 施红辉, 岸本薰实. 瞬态加速液柱的流体力学问题研究[J]. 爆炸与冲击, 2003, 23(5): 391-397.
- [4] Wang X L, Shi H H, Itoh M, et al. Flow visualization of high-speed pulsed liquid jet[J]. Proceedings of SPIE — The International Society for Optical Engineering, 2001, 4183: 899-906.
- [5] Semko A N, Rusanova O A, Kazak O V, et al. The use of pulsed high-speed liquid jet for putting out gas blow-out[J]. The International Journal of Multiphysics, 2015, 9(1): 9-20.
- [6] 邓军, 贾鹏飞, 刘长春, 等. 消防脉冲水枪喷嘴结构优化研究[J]. 中国安全生产科学技术, 2018, 14(12): 48-53.
- [7] Guha A, Barron R M, Balachandar R. Numerical simulation of high-speed turbulent water jets in air[J]. Journal of Hydraulic Research, 2010, 48(1): 119-124.
- [8] Srinivasan V, Salazar A J, Saito K. Modeling the disintegration of modulated liquid jets using volume-of-fluid (VOF) methodology[J]. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35(8): 3710-3730.
- [9] 杨国来, 周文会, 刘肥. 基于 FLUENT 的高压水射流喷嘴的流场仿真[J]. 兰州理工大学学报, 2008, 34(2): 49-52.
- [10] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. Journal of Computational Physics, 1981, 39(1): 201-225.
- [11] Menter F R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1598-1605.
- [12] 胡朋, 李永乐, 廖海黎. 基于 SST $k-\omega$ 湍流模型的平衡大气边界层模拟[J]. 空气动力学学报, 2012, 30(6): 737-743.

(责任编辑: 康 锋)