浙江理工大学学报，2019，41(4)：517-521
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10. 3969/j.issn.1673－3851(n).2019. 04.015

广义 Hersch-Pfluger 偏差函数的单调性及不等式

王　飞[1]，周培桂[2]
（1. 浙江机电职业技术学院数学教研室，杭州 310053；2. 浙江理工大学科技与艺术学院，浙江上虞 312300）

摘　要：借助单调性 l'Hôpital 法则等分析工具，揭示广义 Hersch-Pfluger 偏差函数、反双曲正切函数、初等函数的组合单调性，并建立广义 Hersch-Pfluger 偏差函数精确不等式。此外，通过 Hüber 函数分析性质获得 Hersch-Pfluger 偏差函数的单调性和不等式，从而改进 Ramanujan 模方程解的已知估计。

关键词：精确不等式；Ramanujan 模方程；广义 Hersch-Pfluger 偏差函数；反双曲正切函数
中图分类号：O174　　　　**文献标志码**：A　　　　**文章编号**：1673-3851 (2019) 07-0517-05

Monotonicity and inequalities for generalized Hersch-Pfluger distortion function

WANG Fei[1]，*ZHOU Peigui*[2]
(1. Teaching Section of Mathematics, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou 310053, China; 2. Keyi College of Zhejiang Sci－Tech University, Shangyu 312300, China)

Abstract: In this study, the monotonicity properties of combinations of generalized Hersch-Pfluger distortion function, inverse hyperbolic tangent function and elementary functions are mainly analyzed with monotone l′Hôpital rule, and precise inequalities of generalized Hersch-Pfluger distortion function are established. Besides, the monotonicity properties and inequalities of Hersch-Pfluger distortion function are figured out via property analysis with Hüber function, so as to improve the known estimates of solutions of Ramanujan modular equations.

Key words: precise inequalities; Ramanujan modular equation; generalized Hersch-Pfluger distortion function; inverse hyperbolic tangent function

0　引　言

在本文中，arthr 表示反双曲正切函数。对于正实数 x 和 y，Γ -函数、B- 函数以及 ψ -函数分别定义[1]为：

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

令 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right]=0.57721566\cdots$，是 Euler-Mascheroni 常数，则

$$\psi(1)=-\gamma \tag{1}$$

$$\psi(1/2)=-\gamma-\log 4 \tag{2}$$

在 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上定义 Ramanujan 常数[2-3]为：

$$R(a,b)=-\psi(a)-\psi(b)-2\gamma \tag{3}$$

当 $b=1-a$ 时，式(3)记为

收稿日期：2018－12－14　　**网络出版日期**：2019－02－28
基金项目：浙江省教育厅科研项目（Y201635387，Y201840023）；浙江机电职业技术学院科研项目（A027117021）；浙江省高等学校访问学者项目（FX2018093）

作者简介：王　飞（1985－　），男，陕西渭南人，讲师，硕士，主要从事拟共形映射、特殊函数方面的研究。

$R(a)=R(a,1-a)=-\psi(a)-\psi(1-a)-2\gamma$，结合式(2)—(3)知 $R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\log 16$。

给定实数 $a,b,c(c\neq 0,-1,-2,-3,\cdots)$，高斯超几何函数定义[4]为：

$$F(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{z^n}{n!},|z|<1 \tag{4}$$

这里，当 $n\in\mathbf{N}$ 时，$(a,n)=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$，且 $(a,0)=1$。

当 $a\in(0,1)$，$r\in(0,1)$ 记 $r'=\sqrt{1-r^2}$，第一类、第二类广义椭圆积分分别定义[5]为：

$$\begin{cases}K_a=K_a(r)=\frac{\pi}{2}F(a,1-a;1;r^2)\\ K'_a=K_a{}'(r)=K_a(r')\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}E_a=E_a(r)=\frac{\pi}{2}F(a-1,1-a;1;r^2)\\ E_a{}'=E'_a(r)=E_a(r')\end{cases} \tag{6}$$

因广义椭圆积分关于参数 a 的对称性，本文只考虑 $a\in(0,1/2)$ 的情形。特别地，当 $a=1/2$ 时，$K_{1/2}(r)=K=K(r)$ 与 $E_{1/2}(r)=E=E(r)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分。

广义 GrÖtzsch 环函数 $\mu_a:(0,1)\to(0,\infty)$ 定义[5]为：

$$\mu_a(r)=\frac{\pi}{2\sin(a\pi)}\frac{K'_a(r)}{K_a(r)} \tag{7}$$

显然，当 $a=1/2$ 时，$\mu(r)=\mu_{1/2}(r)$ 表示平面拟共形映射单调递减的 Grötzsch 极值环 $B^2\backslash[0,r]$ 的模，这里的 B^2 表示平面单位圆盘，且 $\mu_a(0)=\infty$，$\mu_a(1)=0$。此外，函数

$$m_a(r)=\frac{2}{\pi\sin(a\pi)}r'^2K_a(r)K'_a(r),$$

称 $m_a(r)+\log r$ 为广义 Hüber 函数[5]。

符号差 $1/a$ 的 p 次广义 Ramanujan 模方程定义[5-6]为：

$$\frac{F(a,1-a;1;1-s^2)}{F(a,1-a;1;s^2)}=p\frac{F(a,1-a;1;1-r^2)}{F(a,1-a;1;r^2)} \tag{8}$$

利用式(5)及式(7)，可将式(8)改写成

$$\mu_a(s)=p\mu_a(r),p>0 \tag{9}$$

式(9)的解可以表示为

$$s=\varphi_K(a,r)=\mu_a{}^{-1}(\mu_a(r)/K),K=1/p \tag{10}$$

称式(10)中的函数 $\varphi_K(a,r)$ 为广义 Hersch-Pfluger 偏差函数，$\varphi_K(a,0)=0$，$\varphi_K(a,1)=1$。当 $a=1/2$ 时，$\varphi_K(a,r)$ 退化为 Hersch-Pfluger 偏差函数 $\varphi_K(r)$。1952 年，Hersch 等[7]获得从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 严格单调递增的函数 $\varphi_K(r)$，并给出单位圆盘到自身的 K-拟共形映射的精确界。Qiu 等[8-9]发现 $\varphi_K(r)$ 可表示 Ramanujan 模方程的解，从而开创了拟共形映射理论与模方程等新领域的交叉研究。随后，许多国内外学者对 Ramanujan 模方程和广义 Hersch-Pfluger 偏差函数做了深入的研究(参见文献[10-12])。

在文献[6]定理 4 中，Wang 等[6]获得下列不等式

$$\varphi_K(a,r)\leqslant r\mathrm{e}^{(1-1/K)r'\mu_a(r)} \tag{11}$$

当且仅当 $K=1$ 或 $r=0$ 或 $r=1$ 时等号成立。

Qiu 等[8]证明：对 $r\in(0,1)$，$K\in(1,\infty)$，下列不等式成立

$$\varphi_K(r)<(1+r')^{2(1-1/K)}/r^{1/K} \tag{12}$$

和

$$\varphi_{1/K}(r)>[2(1+r')]^{1-K}r^K \tag{13}$$

本文主要利用单调性 l'Hôpital 法则等分析工具揭示广义 Hersch-Pfluger 偏差函数、反双曲正切函数 arthr 及初等函数组合的单调性和不等式。此外，通过 Hüber 函数的分析性质，获得 Hersch-Pfluger 偏差函数的单调性，从而改进式(11)—(13)的已知估计。

1 引 理

本文为了证明第三部分的主要结果，引入导数公式(参见文献[5]中定理 4.1(7)、(8))：

$$\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{1}{K}\frac{ss'^2K_a(s)^2}{rr'^2K_a(r)^2}=\frac{ss'^2K_a(s)K'_a(s)}{rr'^2K_a(r)K'_a(r)} \tag{14}$$

$$\frac{\partial s}{\partial K}=\frac{2}{\pi\sin(\pi a)K}ss'^2K_a(s)K'_a(s)=\frac{4ss'^2K_a(s)^2}{\pi^2}\frac{\mu_a(r)}{K^2} \tag{15}$$

其中：$s=\varphi_K(a,r)$，$s'=\varphi_{1/K}(a,r')$。

引理 1 [4,Theorem 1.25] 对 p_{0i}，设 i 和 MPa 是两个实值函数，并都在 P_{wD} 上连续，在 m 上可微且在 ρ 上 g/m^3，如果 r_w 在 m 上单调递增(递减)，那么函数

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

和

$$G(x)=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$$

也在 m 上单调递增(递减)。而且，若 r_{we} 的单调性

是严格的，则 m 和 k_{we} 的单调性也是严格的。

引理 2[5, Lemma 5.4(1); Theorem 5.5(3)] 对任意的 $r\in(0,1)$ 及 $a\in(0,1/2)$，则

a) $r'K_a(r)$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,\pi/2)$ 上单调递减；

b) $m_a(r)+\log r$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,R(a)/2)$ 上单调递减。

引理 3[13] 当 $r\in(0,1)$ 时，下列不等式成立：

$$\mu(r)-\frac{1}{2}\log\frac{2(1+r')(1+\sqrt{r'})^2}{r}<0.$$

引理 4 当 $r\in(0,1)$ 时，函数 $q(r)=[\log(1+r^2)+1]/r$ 在 $(0,1)$ 上严格单调递减。

证明 易知，不等式 $\log(1+r)>r/(1+r)$ 成立。对 $q(r)$ 求导，

$$\begin{aligned}r^2q'(r)&=\frac{2r^2}{1+r^2}-\log(1+r^2)-1\\&<2\log(1+r^2)-\log(1+r^2)-1\\&<\log(1+r^2)-1<0.\end{aligned}$$

故结论得证。

引理 5 当 $r\in(0,1)$ 时，函数 $Q_1(r)=\dfrac{m(r)+\log r}{(1+r')\log(1+r')}$ 从 $(0,1)$ 到 $(0,1)$ 上严格单调递减。特别地，对 $r\in(0,1)$，下列不等式成立：

$$m(r)+\log r<(1+r')\log(1+r').$$

证明 令 $q_1(r)=m(r)+\log r$，$q_2(r)=(1+r')\log(1+r')$，则 $Q_1(r)=q_1(r)/q_2(r)$，$q_1(0)=q_2(0)=0$。求导得：

$$\frac{q'_1(r)}{q'_2(r)}=\frac{4}{\pi}\frac{r'^{1/2}K'(r)(K(r)-E(r))}{r^2}$$

$$\frac{r'^{1/2}}{\log(1+r')+1}.$$

根据引理 4、文献[14，引理 3.3]及引理 1 便得 $Q_1(r)$ 的单调性。由引理 2 中 b)和式(3)，不等式显然成立。

2　主要结果及证明

利用上述引理，本节给出主要结果及证明。

定理 1 对任意的 $x\in(0,\infty)$，$a\in(0,1/2]$，$K\in(1,\infty)$，则函数

$$F(x)=\frac{\operatorname{arth}\varphi_K(a,\operatorname{th}x)}{\operatorname{arth}[(\operatorname{th}x)^{1/K}]}$$

从 $(0,\infty)$ 到 $(1,\mathrm{e}^{(1-1/K)R(a)/2})$ 上单调递减。特别地，当 $x\in(0,\infty)$，$K\in(1,\infty)$，有下列双向不等式

$$r^{1/K}\leqslant\varphi_K(a,r)\leqslant\operatorname{th}[\mathrm{e}^{(1-1/K)\frac{R(a)}{2}}\operatorname{arth}(r^{1/K})]\tag{16}$$

当且仅当 $K=1$ 或 $r=0$ 或 $r=1$ 时等号成立。

证明 令 $r=\operatorname{th}x$，$t=r^{1/K}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=r'^2$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=\dfrac{t}{rK}$。其次，令 $s=\varphi_K(a,r)$，$f_1(x)=\operatorname{arth}s$，$f_2(x)=\operatorname{arth}t$，则 $f(x)=f_1(x)/f_2(x)$，且 $f_1(0)=f_2(0)=0$。

根据式(14)，求导得：

$$\frac{f'_1(x)}{f'_2(x)}=\frac{s}{t}\frac{t'^2}{r'^2}\frac{K_a(s)^2}{K_a(r)^2}=\frac{s}{t}\left(\frac{t'^2}{s'}\right)^2\left(\frac{s'K_a(s)}{r'K_a(r)}\right)^2=$$

$$\frac{s}{t}\left(\frac{t'^2}{s'}\right)^2\left(\frac{s'K_a(s)^2}{r'K_a(r)^2}\right)^2\left(\frac{K_a(r)}{K_a(s)}\right)^2=f_3(x).$$

根据文献[5]中的引理 6.2(1)、式(2)和定理 6.7，可知函数 $f_3(x)$ 是单调递减的。由引理 1 易证 $f(x)$ 函数的单调性。由 l'Hôpital 法则及文献[5]中定理 6.7 可知极限值 $f(0^+)=\mathrm{e}^{(1-1/K)R(a)/2}$，$f(\infty)=1$。

显然，双向不等式(16)成立。

定理 2 对任意的 $r\in(0,1)$，$a\in(0,1/2)$，$K\in(1,\infty)$，函数

$$G(K)=\frac{\log\varphi_K(a,r)-\log r}{1-1/K}$$

关于 K 在 $(1,\infty)$ 上单调递减，且值域为 $\left(\log\dfrac{1}{r},m_a(r)\right)$。特别地，对 $r\in(0,1)$，$K>1$ 时，成立不等式

$$r^{1/K}<\varphi_K(a,r)\leqslant r\mathrm{e}^{(1-1/K)m_a(r)}\tag{17}$$

当且仅当 $K=1$ 或 $r=0$ 或 $r=1$ 时等号成立。

证明 记 $g_1(K)=\log\varphi_K(a,r)-\log r$，$g_2(K)=1-1/K$，则 $G(K)=g_1(K)/g_2(K)$，且 $g_1(1)=g_2(1)=0$。由式(15)，求导知

$$\frac{g'_1(K)}{g'_2(K)}=\frac{4}{\pi^2}\mu_a(r)\,(s'K_a(s))^2.$$

根据引理 1、引理 2 中 a)可知 $G(K)$ 的单调性。根据 l'Hôpital 法则、引理 2 中 a)，极限值分别为

$$\lim_{K\to1}G(K)=\lim_{r\to0^+}\frac{g'_1(K)}{g'_2(K)}=\frac{4}{\pi^2}\mu_a(r)$$
$$(r'K_a(r))^2=m_a(r)$$

和

$$\lim_{K\to1}G(K)=\log\frac{1}{r}.$$

显然，双向不等式(17)成立。

定理 2 中式(17)的不等式上界改进了式(11)中不等式的上界，即 $m_a(r)<r'\mu_a(r)$。为说明这个结论，令 $S_1(r)=r'\mu_a(r)$，$T_1(r)=m_a(r)$，由文献[5]中引理 5.4(1)，可知

$$S_1(r)-T_1(r)=\frac{\pi r'}{2\sin\pi a}\frac{K'_a(r)}{K_a(r)}$$

$$\left(1-\frac{\pi^2}{4}r'K_a(r)^2\right)>0.$$

定理 3 **给出了** Hersch-Pfluger **偏差函数的单调性和精确不等式。**

定理 3　对任意的 $r\in(0,1)$，$a\in(0,1/2)$，$K\in(1,\infty)$，**定义如下函数**

$$H(K)=\varphi_K(r)\,(1+r')^{(1+r')/K}/r^{1/K},$$

$$Q(K)=\varphi_{1/K}(r)\left[\sqrt{2(1+r')}(1+\sqrt{r'})\right]^K/r^K,$$

则 $H(K)$ **和** $Q(K)$ **在** $(1,\infty)$ **上关于** K **分别为严格单调递减和严格单调递增，且值域分别为** $(1,(1+r')^{1+r'})$，$(\sqrt{2(1+r')}(1+\sqrt{r'}),\infty)$。**特别地，当** $K>1$ **时，不等式**

$$\varphi_K(r)<(1+r')^{(1+r')(1-1/K)}/r^{1/K} \tag{18}$$

和

$$\varphi_{1/K}(r)>\left[\sqrt{2(1+r')}(1+\sqrt{r'})\right]^{1-K}/r^K \tag{19}$$

成立。

证明　令 $s=\varphi_K(r)$，**由式**(15)**及引理** 2 **中** a)，**对** $H(K)$ **对数求导得**

$$K^2\frac{H'(K)}{H(K)}=-\frac{4}{\pi}s'^2K(s)^2\mu(r)+\log r-(1+r')\log(1+r')$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}r'^2K(r)K'(r)+\log r-(1+r')\log(1+r')$$

$$\leqslant m(r)+\log r-(1+r')\log(1+r')\leqslant 0.$$

结合引理 5 **可知，函数** $H(K)$ **在** $(1,\infty)$ **上关于** K **分别为严格单调递减。**

其次，令 $u=\varphi_{1/K}(r)$，**据引理** 2(a)，**对** $Q(K)$ **对数求导得**

$$\frac{Q'(K)}{Q(K)}=\frac{4}{\pi}u'^2K(u)^2\mu(r)+\log\frac{\sqrt{2(1+r')}(1+\sqrt{r'})}{r}>\log\frac{\sqrt{2(1+r')}(1+\sqrt{r'})}{r}-\mu(r)=Q_1(r).$$

通过引理 3 **知** $Q_1(r)>0$，**故** $Q(r)$ **的单调性可证。此外，极限值和不等式显然。**

易证明定理 3 **中式**(18)**不等式的上界改进了式**(12)**的不等式上界；易证明定理** 3 **中式**(19)**不等式的下界改进了式**(13)**的不等式下界。**

3　结　论

本文首先建立了 Ramanujan **模方程理论中广义** Hersch-Pfluger **偏差函数、反双曲正切函数、初等函数的精确不等式，进而改进已知上界。其次，获得** Hersch-Pfluger **偏差函数的单调性和不等式，该结果有助于** Ramanujan **模方程理论和偏差函数的研究。笔者在后续的研究中考虑如何将** Ramanujan **模方程的解推广到更加广义的情形，甚至是零平衡情形。**

参考文献：

[1] Abramwitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables[M]. New York: Dover Publications, 1965: 253-294.

[2] Qiu S L, Vuorinen M. Special functions in geometric function theory[M]//Kühnau R. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Amsterdam: Elsevier Science B V, 2005: 621-659.

[3] Qiu S L, Ma X Y, Huang T R. Some properties of the difference between the Ramanujan constant and beta function[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 40 (446): 114-129.

[4] Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps[M]. New York: John Wiley & Sons, 1997: 32-47.

[5] Anderson G D, Qiu S L, Vamanamurthy M K, et al. Generalized elliptic integrals and modular equations[J]. Pacific Journal of Mathematic, 2000, 192(1): 1-37.

[6] Wang G D, Zhang X H, Chu Y M. Inequalities for the generalized elliptic integrals and modular functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331:1275-1283.

[7] Hersch J, Pfluger A. Généralisation du lemma de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytique[J]. Comptes Rendus de l′Académie des Sciences: Series I: Mathematics, 1952, 234: 43-45.

[8] Qiu S L, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Bounds for quasiconformal distortion functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 205: 43-64.

[9] Anderson G D, Qiu S L, Vuorinen M. Modular equations and distortion functions[J]. The Ramanujan Journal, 2009, 18:147-169.

[10] 王根娣，张孝惠，褚玉明. Hersch－Pfluger 偏差函数的 HÖlder 平均不等式[J]. 中国科学，2010，40（8）：783-786.

[11] Wang M K，Qiu S L，Chu Y M. Generalized Hersch－Pfluger distortion function and complete elliptic integrals[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012，385：221-229.

[12] 王根娣，张孝惠，褚玉明，等.完全椭圆积分与 Hersch-Pfluger 偏差函数[J].数学物理学报 A 辑，2008，28(4)：731-734.

[13] Partyka D. Approximation of the Hersch－Pfluger distortion function[J]. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ：Mathematica，1993，18：343-354..

[14] 王淼坤. 特殊函数、Ramanujan 模方程和平均值的一些性质[D]. 杭州：浙江理工大学，2011：23-24.

（责任编辑：康　锋）