



# 求解波动方程的时空四阶算法

林晓嫒, 张启峰, 徐映红

(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

**摘要:** 针对一类二阶线性波动方程, 首先根据时空紧算子构造了一类新的紧差分格式, 证明了差分格式解的存在性和唯一性; 其次, 利用 Fourier 分析法得到建立的紧差分格式的条件稳定性; 再次, 利用 Lax 定理和相容性条件证明数值格式的收敛性, 收敛阶在  $L^\infty$  范数下为  $O(\tau^4 + h^4)$ 。数值计算的结果验证了理论结果。

**关键词:** 波动方程; 紧差分格式; 可解性; 收敛性; 稳定性

**中图分类号:** O244

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-3851 (2019) 03-0249-06

## Time-space fourth order algorithm for solving wave equations

LIN Xiaoman, ZHANG Qifeng, XU Yinghong

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Firstly, for a class of second order linear wave equations, a class of new compact difference scheme was constructed according to space-time compact operator and the unique solvability was proved. Secondly, the conditional stability of the scheme was gained by using Fourier analysis. Thirdly, the convergence of numerical format was proven by Lax-Milgram theorem and compatibility condition and the convergence order was  $O(\tau^4 + h^4)$  in  $L^\infty$  norm. Numerical calculation result testified the theoretical results.

**Key words:** wave equations; compact difference scheme; solvability; convergence; stability

## 0 引言

本文研究经典波动方程解的高阶数值逼近问题, 其方程形式为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), a \leq x \leq b, 0 < t \leq T \quad (1)$$

其中  $r$  是正数。方程(1)的初始条件为:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & a \leq x \leq b \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & a \leq x \leq b \end{cases} \quad (2)$$

边界条件为:

$$\begin{cases} u(a, t) = \alpha(t), & 0 \leq t \leq T \\ u(b, t) = \beta(t), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $f(x, t)$ 、 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$  为已知函数, 且  $\varphi(a) = \alpha(0)$ 、 $\varphi(b) = \beta(0)$ 、 $\psi(a) = \alpha'(0)$ 、 $\psi(b) = \beta'(0)$ 。本文假定方程(1)–(3)的解满足

$$u(x, t) \in C^{6,4}([a, b]) \quad (4)$$

并且  $f(x, t)$  在解的  $\epsilon_0$  邻域内关于第一、第二分量有一阶连续导数, 其中  $\epsilon_0$  是一个正数。

对于二阶线性边值问题, 常用的数值方法有打靶法和有限差分法等。很多学者都在此领域进行了深入广泛的研究。例如, 孙志忠<sup>[1]</sup>以波动方程为模型, 对第一边值问题分别建立了时空方向均有二阶精度的显格式和隐格式。随后, 他又建立了时间二阶空间四阶的紧致差分格式。刘相国等<sup>[2]</sup>利用有限差分法求解波动方程边值问题, 求得的数值解有较

高的精度和较快的运行速度;刘付军等<sup>[3]</sup>针对一类二阶双曲型偏微分方程,利用有限差分法建立了两种差分格式,并对其进行加权平均,得到具有三阶精度的加权平均格式;Britt等<sup>[4]</sup>考虑变声速二阶波动方程在空间和时间上的四阶精度紧差分格式,其分析方法为能量分析法,与本文不同。

双曲型偏微分方程在实际问题中有着广泛的应用,但一般情况下,直接分析和求解很困难,因此常常通过对数值格式稳定性进行间接分析得到数值格式的精度。本文利用时空紧算子,推导了一类新的差分格式,利用对角占优矩阵性质<sup>[5]</sup>证明差分格式解的存在唯一性;另外利用 Fourier 级数分析了该格式的条件稳定性,并利用 Lax-Milgram 定理以及相容性条件得到了数值格式的收敛性,为数值求解双曲型方程提供一种有效解法。

## 1 建立紧差分格式

有限差分法方法是定解问题求解的最广泛的数值方法,其基本思想是对时空进行离散,用数值解代替真解,忽略小量项得到的差分方程组,去近似代替原方程和相应的定解条件,并把差分方程组的解作为原定解问题的近似解。

用有限差分法建立紧差分格式的第一步,是将求解区域  $\Omega = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$  进行剖分。取正整数  $m$  和  $n$ , 并记  $x_i = a + ih, 0 \leq i \leq m, t_k = k\tau, 0 \leq k \leq n$ , 其中:  $h = \frac{b-a}{m}, t = T/n$ , 分别称  $h$  和  $\tau$  为空间步长和时间步长。用两簇平行直线

$$\begin{cases} x = x_i, & 0 \leq i \leq m \\ t = t_k, & 0 \leq k \leq n \end{cases} \quad (5)$$

将  $\Omega$  分割成一系列的矩形网格。记  $\Omega_h = \{x_i \mid 0 \leq i \leq m\}, \Omega_\tau = \{t_k \mid 0 \leq k \leq n\}, \Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ , 称  $(x_i, t_k)$  为结点。

引进下列记号:

$$\begin{aligned} \delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^k &= \frac{1}{h}(u_i^k + u_{i+1}^k), \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{h}(u_i^k - u_{i-1}^k), \\ \delta_x^2 u_i^k &= \frac{1}{h}(\delta_x u_{i+\frac{1}{2}}^k - \delta_x u_{i-\frac{1}{2}}^k), \\ \delta_t u_{i+\frac{1}{2}}^k &= \frac{1}{\tau}(u_i^k + u_{i+1}^{k+1}), \delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{\tau}(u_i^k - u_{i-1}^{k-1}), \\ \delta_t^2 u_i^k &= \frac{1}{\tau}(\delta_t u_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - \delta_t u_{i-\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

定义网格函数  $U = \{U_i^k \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n\}$ , 其中  $U_i^k = u(x_i, t_k), 0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n$ 。定义  $f_i^k$

$$= f(x_i, t_k)。$$

**引理 1**<sup>[6]</sup> 如果  $g(x) \in C^6[x_{i-1}, x_{i+1}]$  则有

$$\frac{1}{12}[g''(x_{i-1}) + 10g''(x_i) + g''(x_{i+1})] - \frac{1}{h^2}$$

$$[g(x_{i-1}) - 2g(x_i) + g(x_{i+1})] = \frac{h^4}{240}g^{(6)}(\omega_i)$$

(6)

其中,  $\omega_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 。

定义算子:

$$(A_x u)_i^k =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{12}(u_{i-1}^k + 10u_i^k + u_{i+1}^k), & 1 \leq i \leq m-1, 0 \leq k \leq n \\ u_i^k, & i = 0, m, 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

(7)

$$(A_t u)_i^k =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{12}(u_i^{k-1} + 10u_i^k + u_i^{k+1}), & 1 \leq k \leq n-1, 0 \leq i \leq m \\ u_i^k, & k = 0, n, 0 \leq i \leq n \end{cases} \quad (8)$$

第二步在节点  $(x_i, t_k)$  考虑方程(1), 则有:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k) = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) + f(x_i, t_k),$$

$$1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq n \quad (9)$$

将算子  $A_x A_t$  作用方程(9)并利用引理 1 可得

$$A_x \delta_t^2 U_i^k = r^2 A_x \delta_x^2 U_i^k + A_x A_t f(x_i, t_k) + R_i^k,$$

$$1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq n \quad (10)$$

其中:

$$R_i^k = r^2 A_t \left[ \frac{\tau^4}{240} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6}(x_i, \eta_i^k) \right] -$$

$$A_x \left[ \frac{h^4}{240} \frac{\partial^6 u}{\partial t^6}(\xi_i^k, t_k) \right] \quad (11)$$

由初始条件(2), 有:

$$U_i^0 = \varphi(x_i), 1 \leq i \leq m-1 \quad (12)$$

根据带积分余项的 Taylor 展开式以及方程(2), 可得:

$$\begin{aligned} U_i^1 &= u(x_i, t_0) + \tau \frac{\partial u(x_i, t_0)}{\partial t} + \\ &\frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 u(x_i, t_0)}{\partial t^2} + \frac{1}{3!} \tau^3 \frac{\partial^3 u(x_i, t_0)}{\partial t^3} + \\ &\frac{(-1)^3}{3!} \int_0^\pi (t-\tau)^3 \frac{\partial^4 u(x_i, t)}{\partial t^4} dt \\ &= \varphi(x_i) + \tau \psi(x_i) + \frac{1}{2} \tau^2 [r^2 \varphi''(x_i) + \end{aligned}$$

$$f(x_i, 0)] + \frac{1}{6} \tau^3 r^2 [\psi''(x_i)) + f_i(x_i, 0)] + r_i^{(1)}$$

(13)

其中:  $r_i^{(1)} = \frac{(-1)^3}{3!} \int_0^\tau (t-\tau)^3 \frac{\partial^4 u(x_i, t)}{\partial t^4} dt$ ,  $1 \leq i \leq m-1$ .

注意到边界条件(3), 有:

$$U_0^k = \alpha(t_k), \quad U_m^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq n \quad (14)$$

在方程(10)–(14), 略去高阶小量项  $R_i^k$  和  $r_i^{(1)}$  并用  $u_i^k$  代替  $U_i^k$ , 可对方程(1)–(3)建立如下差分格式:

$$A_x \delta_i^2 u_i^k = r^2 A_t \delta_x^2 u_i^k + A_x A_t f_i^k, \quad 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq n \quad (15)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), 1 \leq i \leq m-1 \quad (16)$$

$$u_i^1 = \varphi_i + \tau \psi_i + \frac{1}{2} \tau^2 (r^2 (\varphi'')_i + f_i^0) +$$

$$\frac{1}{6} \tau^3 r^2 ((\psi'')_i + (f_t)_i^0), 1 \leq i \leq m-1 \quad (17)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_m^k = \beta(t_k), \quad 0 \leq k \leq n \quad (18)$$

其中:  $\varphi_i = \varphi(x_i)$ ,  $\psi_i = \psi(x_i)$ ,  $(\varphi'')_i = \varphi''(x_i)$ ,  $f_i^0 = f(x_i, 0)$ ,  $(f_t)_i^0 = f_t(x_i, 0)$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{12}(10+2s^2) & \frac{1}{12}(1-s^2) & & & & \\ \frac{1}{12}(1-s^2) & \frac{1}{12}(10+2s^2) & \frac{1}{12}(1-s^2) & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{12}(1-s^2) & \frac{1}{12}(10+2s^2) & \frac{1}{12}(1-s^2) \\ & & & & \frac{1}{12}(1-s^2) & \frac{1}{12}(10+2s^2) \end{pmatrix}.$$

易知, 矩阵  $A$  是严格对角占优的, 故方程组(21)有唯一解, 由初值条件可以确定  $u^0, u^1$ , 依次类推, 可以唯一求解出时间上各层的数值解. 定理证毕.

### 3 差分格式解的稳定性和收敛性

#### 3.1 稳定性

考虑如下齐次线性方程组

$$\frac{1}{12}(\delta_i^2 v_{i-1}^k + 10v_i^k + v_{i+1}^k) =$$

$$r^2 \frac{1}{12}(\delta_x^2 v_i^{k-1} + 10v_i^k + v_i^{k+1}),$$

$$1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (22)$$

$$v_i^0 = \varphi_i, \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (23)$$

$$v_i^1 = \varphi_i + \tau \psi_i + \frac{1}{2} \tau^2 a^2 (\varphi'')_i + \frac{1}{6} \tau^3 a^2 (\psi'')_i,$$

$$1 \leq i \leq m-1 \quad (24)$$

$$v_0^k = 0, \quad v_m^k = 0, \quad 0 \leq k \leq n \quad (25)$$

可以得到定理2.

**定理2** 记  $\{v_i^k \mid 0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq k \leq n\}$  为差

由  $R_i^k$  的定义(11), 容易得到数值格式(15)–(18)的局部截断误差.

**引理2**<sup>[7]</sup> 假设方程(4)成立, 差分格式(15)–(18)的局部截断误差满足

$$|R_i^k| \leq C_0(\tau^4 + h^4), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (19)$$

其中,  $C_0$  是与  $h$  和  $\tau$  无关的常数.

### 2 差分格式解的存在性

**定理1** 差分格式(15)–(18)有唯一解.

**证明** 令

$$u^k = (u_0^k, u_1^k, \dots, u_{m-1}^k, u_m^k)^T, s = \frac{r\tau}{h} \quad (20)$$

则差分格式(15)–(18)可以写成如下矩阵形式:

$$A u^{k+1} = B u^k - A u^{k-1} + F^{k-1} + 10F^k + F^{k+1} + H, \quad 1 \leq k \leq m-1 \quad (21)$$

其中:

分格式(22)–(25)的解, 则当  $s \leq 1$  时, 有

$$\|v^k\|^2 \leq 4\|\varphi\|^2 + 2T^2\|\psi\|^2 + 2C_1(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2), \quad 0 \leq k \leq n \quad (26)$$

其中,  $s = \frac{r\tau}{h}$ .

**证明** 首先, 方程(22)–(25)的解可展开成如下 Fourier 级数:

$$v_i^k = \sum_{l=1}^{m-1} T_l(k) \sin(l\pi x_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq n \quad (27)$$

将方程(27)代入到方程(22), 得到:

$$\sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{\tau^2} [T_l(k-1) - 2T_l(k) + T_l(k+1)] \left[ \frac{1}{12} \sin(l\pi x_{i-1}) + \frac{10}{12} \sin(l\pi x_i) + \frac{1}{12} \sin(l\pi x_{i+1}) \right] - \sum_{l=1}^{m-1} \frac{r^2}{h^2} \left[ \frac{1}{12} T_l(k-1) + \frac{10}{12} T_l(k) + \frac{1}{12} T_l(k+1) \right] [\sin(l\pi x_{i-1}) - 2\sin(l\pi x_i) + \sin(l\pi x_{i+1})] = 0 \quad (28)$$

即

$$\sum_{l=1}^{m-1}\left\{\left[1+4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)(s^2-1)\right]T_l(k-1)-2\left[1-4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)-2s^2\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)(1-2\theta)\right]T_l(k)+\left[1+4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)(s^2-1)\right]T_l(k+1)\right\}\sin(l\pi x_i)=0,\quad 1\leq l\leq m-1,\quad 1\leq k\leq n-1\tag{29}$$

其中,  $\theta=\frac{1}{12}$ 。因而

$$\left[1+4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)(s^2-1)\right]T_l(k-1)-2\left[1-4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)-2s^2\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)(1-2\theta)\right]T_l(k)+\left[1+4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)(s^2-1)\right]T_l(k+1)=0,\quad 1\leq l\leq m-1,\quad 1\leq k\leq n-1\tag{30}$$

记

$$C_l=\frac{1-4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)-2s^2(1-2\theta)\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)}{1+4\theta\sin^2\left(\frac{l\pi h}{2}\right)(s^2-1)}\tag{31}$$

则有:

$$T_l(k-1)-2C_lT_l(k)+T_l(k+1)=0,\quad 1\leq l\leq m-1,\quad 1\leq k\leq n-1\tag{32}$$

令

$$g(x)=\frac{1-4\theta x-2s^2(1-2\theta)x}{1+4\theta(s^2-1)x},\quad 0\leq x\leq 1\tag{33}$$

则:

$$g'(x)=\frac{-2s^2}{[1+4\theta(s^2-1)x]^2}\tag{34}$$

故  $g(x)$  为减函数。又  $g(0)=1,\quad g(1)=1-\frac{2s^2}{1+4\theta(s^2-1)}\geq -1$ , 因而当  $x\in(0,1)$  时, 有

$$-1<g(x)<1\tag{35}$$

由此易知  $-1<C_l<1$ 。

方程(32)为二阶常系数差分方程,应用差分方程理论可得

$$T_l(k)=-\frac{\sin(k-1)\theta_l}{\sin\theta_l}T_l(0)+\frac{\sin\theta_l}{\sin(\theta_l)}T_l(1),\quad 1\leq l\leq m-1,\quad 0\leq k\leq n\tag{36}$$

其中,  $\theta_l=\arctan\frac{\sqrt{1-C_l^2}}{C_l}$ 。

设

$$\varphi_i=\sum_{l=1}^{m-1}a_l\sin(l\pi x_i),\quad \psi_i=\sum_{l=1}^{m-1}b_l\sin(l\pi x_i),\quad 1\leq i\leq m-1\tag{37}$$

则有:

$$T_l(0)=a_l,\quad T_l(1)=a_l+\tau b_l-\frac{a^2\tau^2}{2}a_l(l\pi)^2-\frac{a^2\tau^3}{6}(l\pi)^2b_l,\quad 1\leq l\leq m-1\tag{38}$$

将方程(38)代入方程(36),得

$$T_l(k)=-\frac{\sin(k-1)\theta_l}{\sin\theta_l}a_l+\tau\frac{\sin\theta_l}{\sin(\theta_l)}b_l-\frac{\sin(k\theta_l)}{\sin\theta_l}a^2(l\pi)^2\tau^2\left(\frac{1}{2}a_l+\frac{\tau}{6}b_l\right),\quad 1\leq l\leq m-1,\quad 0\leq k\leq n\tag{39}$$

注意到:

$$\frac{\sin(k\theta_l)-\sin(k-1)\theta_l}{\sin\theta_l}=\frac{2\cos((k-1/2)\theta_l)\sin\theta_l/2}{\sin\theta_l}=\frac{\cos(k-1/2)\theta_l}{\cos\frac{\theta_l}{2}}\tag{40}$$

及

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\cos\frac{x}{2}\leq 1,x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\tag{41}$$

有

$$\left|\frac{\sin(k\theta_l)-\sin(k-1)\theta_l}{\sin\theta_l}\right|\leq\frac{1}{\cos\frac{\theta_l}{2}}\leq\sqrt{2}\tag{42}$$

另一方面,由数学归纳法可证

$$|\sin(k\theta_l)|\leq k|\sin\theta_l|,\quad 0\leq k\leq n\tag{43}$$

于是

$$\left|\frac{\tau\sin(k\theta_l)}{\sin\theta_l}\right|\leq k\tau\leq T,\quad 0\leq k\leq n\tag{44}$$

此外,

$$\left|\frac{\sin(k\theta_l)}{\sin\theta_l}r^2(l\pi)^2\tau^2\left(\frac{1}{2}a_l+\frac{\tau}{6}b_l\right)\right|\leq k\tau r^2(l\pi)^2\tau^2\left(\frac{a_l}{2}+\frac{\tau}{6}b_l\right)\leq Tr^2(m-1)^2$$

$$\pi^2\tau^2\left(\frac{a_l}{2}+\frac{\tau}{6}b_l\right)\leq C_1(a_l+b_l)\tag{45}$$

其中:  $C_1=\max\left\{\frac{1}{2}Tr^2(m-1)^2\pi^2\tau^2,\frac{1}{6}Tr^2\right\}$

$(m-1)^2\pi^2\tau^3\}$  将方程(42)、(44)—(45)代入方程(39),得

$$\begin{aligned} |T_l(k)| &\leq (\sqrt{2} + C_1)a_l + (T + C_1)b_l, \\ 1 \leq l \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned} \tag{46}$$

于是:

$$\begin{aligned} T_l^2(k) &\leq 2[(\sqrt{2} + C_1)^2 a_l^2 + (T + C_1)^2 b_l^2] \leq \\ &4a_l^2 + 2T^2 b_l^2 + 2C_1^2 a_l^2 + 2C_1^2 b_l^2 \end{aligned} \tag{47}$$

将方程(47)两边对  $l$  求和,得

$$\begin{aligned} \|v^k\|^2 &\leq 4\|\varphi\|^2 + 2T^2\|\psi\|^2 + 2C_1^2(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2), \\ 0 \leq k \leq n \end{aligned} \tag{48}$$

定理证毕。

3.2 收敛性

记  $e_i^k = U_i^k - u_i^k$ ,  $0 \leq i \leq m, \quad 0 \leq k \leq n$ , 则可得

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \tag{49}$$

$$\begin{aligned} [Lu]_i^k &= A_x(\delta_i^2 U_i^k) - r^2 A_t(\delta_x^2 U_i^k) + \\ R_i^k &= A_x A_t f(x_i, t_k) \end{aligned} \tag{50}$$

$$L_h u_i^k = A_x \delta_i^2 u_i^k - r^2 A_t(\delta_x^2 u_i^k) = A_x A_t f_i^k \tag{51}$$

这里  $L_h$  表示差分算子,  $R_i^k$  表示局部截断误差,即

$$R_i^k = [Lu]_i^k - L_h u_i^k \tag{52}$$

记  $r_i^k = A_x A_t f(x_i, t_k) - A_x A_t f_i^k = 0$ 。为了证明收敛性,本文需要引进下面相容性的概念,有定义 1。

**定义 1**<sup>[8]</sup> 若当  $\tau, h \rightarrow 0, \quad k\tau = t(0 < t \leq T)$  时,对于充分光滑的函数  $u$  有  $\|R^k\| \rightarrow 0$ , 则称  $L_h$  是微分算子  $L$  的相容逼近。另外,若当  $\tau, h \rightarrow 0, k\tau = t$  时,又有  $\|r^k\| \rightarrow 0$ , 则称差分方程(51)是微分方程(49)的相容逼近,或简称差分方程(51)是相容的。

由引理 2 可知差分格式(15)—(18)是相容的。

**定理 3** (Lax 定理<sup>[9]</sup>) 若差分格式是线性的且相容的,则稳定性意味着收敛性,且若局部截断误差满足  $|R_i^k| = O(\tau^\alpha + h^\beta)$ , 则差分格式的收敛阶满足

$$\|R^k\| \leq C_2(\tau^\alpha + h^\beta) \tag{53}$$

其中,  $C_2$  是与空间步长和时间步长无关的有界量。

结合定义 1 及其相容性,易知差分格式(15)—(18)满足如下收敛性定理。

**定理 4**<sup>[8]</sup> 在假设条件下,本文差分格式是收敛的,且收敛阶满足

$$\|R^k\| \leq C_2(\tau^4 + h^4) \tag{54}$$

其中,  $C_2$  是与空间步长和时间步长无关的有界量。

4 数值算例与结果分析

定义最大模范数和收敛阶  $Ord$  如下,

$$\begin{cases} E_\infty(h, \tau) = \max_{0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n} |u(x_i, t_k) - u_i^k| \\ Ord = \log_2 \left( \frac{E_\infty(h, \tau)}{E_\infty(h/2, \tau/2)} \right) \end{cases} \tag{55}$$

**算例 1** 考虑边界条件齐次的初边值问题(1)—(3),此问题的精确解为  $u(x, t) = e^{-t} \sin(x)$ , 其中边界条件和初始条件由精确解确定。

**解** 由于  $s^2 = \pi^2 \frac{\tau^2}{h^2} = \frac{m^2}{n^2}$ , 故稳定性条件为

$$\frac{m}{n} \leq 1。$$

表 1 为满足稳定性条件  $m = 10, n = 10$  时部分节点的数值解,真实解以及相应数值解和真实解之间的绝对误差。

表 1 部分结点处的精确解、数值解以及相应的绝对误差

结点坐标	数值解	真实解	$ u(x_i, t_k) - u_i^k $
$(\pi/2, 0.2)$	0.818734	0.818731	$3.6158 \times 10^{-6}$
$(\pi/2, 0.3)$	0.740828	0.740818	$1.0149 \times 10^{-5}$
$(\pi/2, 0.4)$	0.670339	0.670320	$1.8650 \times 10^{-5}$
$(\pi/2, 0.5)$	0.606559	0.606531	$2.8003 \times 10^{-5}$
$(\pi/2, 0.6)$	0.548849	0.548812	$3.7039 \times 10^{-5}$
$(\pi/2, 0.7)$	0.496630	0.496583	$4.4642 \times 10^{-5}$
$(\pi/2, 0.8)$	0.449376	0.449329	$4.9860 \times 10^{-5}$

表 2 为不同网格剖分下数值解和真实解误差的最大范数和收敛阶,其中范数和收敛阶按方程(55)定义。

表 2 数值解  $u$  在  $L^\infty$  范数下的误差及其相应的收敛阶

网格剖分	$E_\infty(h, \tau)$	收敛阶
20/20	$3.2996 \times 10^{-6}$	3.9845
40/40	$2.0845 \times 10^{-7}$	3.9919
80/80	$1.3101 \times 10^{-8}$	3.9956
160/160	$8.2131 \times 10^{-10}$	—

由表 2 可以看出当  $h$  缩小到原来的  $1/2, \tau$  缩小到原来的  $1/2$  时,最大误差约缩小到原

来的  $1/16$ ,由此可知本文构造的差分格式全局收敛阶为 4 阶。

图 1 描绘了  $40 \times 40$  网格剖分下数值解、精确解及其相应的误差曲面。

**算例 2** 考虑边界条件非齐次的初边值问题(1)—(3),此问题的精确解为  $u(x, t) = t^2 \cos(x)$ , 其中边界条件和初始条件由精确解确定。

**解** 由于  $s^2 = \pi^2 \frac{\tau^2}{h^2} = \frac{m^2}{n^2}$ , 故稳定性条件为  $\frac{m}{n} \leq 1$ 。

表 3 为满足稳定性条件  $m = 10, n = 10$  时部分节点的数值解,真实解以及相应数值解和真实解之

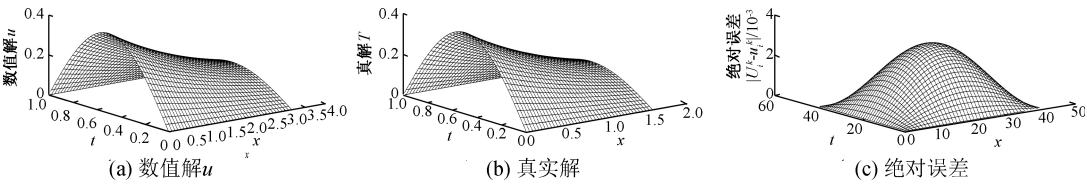


图1  $m=40,n=40$  时,相应的数值解曲面、精确解曲面以及误差曲面

间的误差绝对值。

表3 部分结点处的精确解、数值解以及相应的绝对误差

结点坐标	数值解	真实解	$ u(x_i,t_k)-u_i^k $
$(2\pi/5,0.2)$	0.012361	0.012361	$1.4380\times10^{-8}$
$(2\pi/5,0.3)$	0.027812	0.027812	$7.8707\times10^{-8}$
$(2\pi/5,0.4)$	0.049443	0.049443	$2.4831\times10^{-7}$
$(2\pi/5,0.5)$	0.077255	0.077254	$5.9287\times10^{-7}$
$(2\pi/5,0.6)$	0.111247	0.111246	$1.1430\times10^{-6}$
$(2\pi/5,0.7)$	0.151420	0.151418	$1.8609\times10^{-6}$
$(2\pi/5,0.8)$	0.197774	0.197771	$2.6835\times10^{-6}$

表4 为不同网格剖分下数值解和真实解误差的最大范数和收敛阶,其中范数和收敛阶按方程(55)定义。

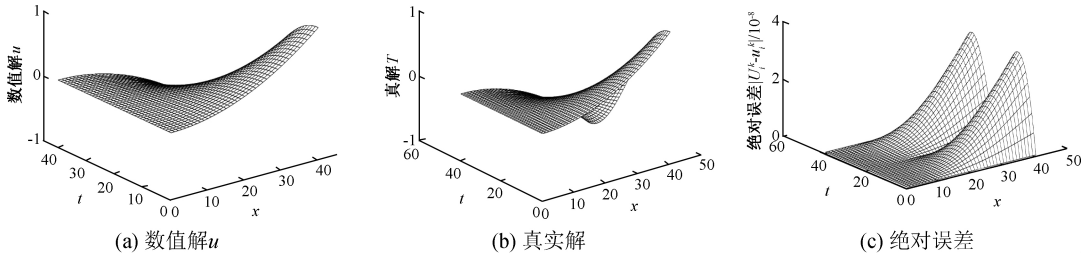


图2  $m=40,n=40$  时,相应的数值解曲面、精确解曲面以及误差曲面

5 结 语

本文对经典的线性波动方程构造了时空四阶紧差分格式,并证明了差分格式的收敛阶在无穷范数意义下时间和空间方向上均为四阶精度。数值算例表明,本文的算法对于高精度求解线性波动方程十分有效。

参考文献:

[1] 孙志忠. 偏微分方程数值解法 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2012:143-267.

[2] 刘相国, 郝江锋. 一类双曲型方程的有限差分法[J]. 宜宾学院学报, 2011(6):14-17.

[3] 刘付军, 龚东, 王高放. 一类线性双曲型偏微分方程的有限差分格式求解[J]. 河南工程学院学报(自然科学版), 2014, 26(3):73-76.

[4] Britt S, Turkel E, Tsynkov S. A high order compact time/space finite difference scheme for the wave

表4 数值解  $u$  在  $L^\infty$  范数下的误差及其相应的收敛阶

网格剖分	$E_\infty(h,\tau)$	收敛阶
20/20	$5.3073\times10^{-7}$	3.9915
40/40	$3.3367\times10^{-8}$	4.0003
80/80	$2.0850\times10^{-9}$	3.9993
160/160	$1.3038\times10^{-10}$	—

由表4可以看出,本文构造的差分格式的全局收敛阶为4阶,且当 $h$ 缩小到原来的1/2, $\tau$ 缩小到原来的1/2时,最大误差约缩小到原来的1/16。由此再次验证本文构造的差分格式全局收敛阶为4阶。

图2描绘了 $40\times40$ 网格剖分下数值解、精确解及其相应的误差曲面。

equation with variable speed of sound[J]. Journal of Scientific Computing, 2018, 76(2):777-811.

[5] 曹志浩. 数值线性代数[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1996:85-86.

[6] Sun Z. Compact difference schemes for heat equation with Neumann boundary conditions [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2013, 29 (5):1459-1486.

[7] Zhang Q, Mei M, Zhang C. Higher-order linearized multistep finite difference methods for non-Fickian delay reaction-diffusion equations[J]. International Journal of Numerical Analysis & Modeling, 2017, 14(1):1-19.

[8] 胡建伟, 汤怀民. 微分方程数值方法[M]. 北京: 科学出版社, 1999:176-186.

[9] Thomas J W. Numerical partial differential equations: Finite difference methods [J]. Texts in Applied Mathematics, 2010, 33(6):531-531.

[10] 姜明杰. 热传导方程 Neumann 边界值问题的紧差分格式[D]. 南京: 东南大学, 2006:18-19.

(责任编辑:康 锋)