浙江理工大学学报，2019，42(1)：10-19
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(s).2019.01.002

中国大陆地区地震巨灾风险的分布拟合及债券定价

谢卓伦，陈佳琰，叶　露
（浙江理工大学经济管理学院，杭州 310018）

摘　要： 巨灾债券将保险市场风险向资本市场转移，使资本市场资金得到更充分的利用。首先，对中国大陆地区1992—2016年地震巨灾年发生次数和地震损失金额进行了分布拟合，结果显示：中国地震巨灾年发生次数服从强度为7.8的泊松分布，损失金额服从对数正态分布，由此计算得到中国地震巨灾触发条件。然后，利用模型分布拟合结果，分别采用现金流贴现模型和Wang两因素模型对中国地震巨灾债券进行定价计算。通过两个模型的定价结果发现：地震巨灾风险债券的价格与触发金额成正相关；一年期的债券定价要高于三年期债券定价。最后在同等条件下，比较现金流贴现模型和Wang两因素模型在不同的本金损失比下的价格差异。

关键词： 地震巨灾债券定价；现金流贴现模型；Wang两因素模型；泊松分布；对数正态分布

中图分类号： F832.5　　　　**文献标志码：** A　　　　**文章编号：** 1673-3851 (2019)02-0010-10

Distribution fitting of earthquake catastrophe risk and bond pricing in mainland China

XIE Zhuolun, CHEN Jiayan, YE Lu
(School of Economics and Management, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Catastrophe bonds transfer the risk of insurance market to the capital market and make the funds in capital market more fully utilized. Firstly, the distribution of annual occurrence times of earthquakes and the amount of earthquake losses in China from 1992 to 2016 was fitted. The results showed that the annual occurrence times of earthquake catastrophes in China obeyed the Poisson distribution with the intensity of 7.8, and the amount of losses obeyed the lognormal distribution. Based on the above, the triggering conditions of earthquake losses in China were obtained by calculation. Then, cash flow discount model and Wang two-factor model were applied to calculate the pricing of China′s earthquake catastrophe bonds according to the distribution fitting results of models. It was found from the pricing results of both models that, the price of earthquake catastrophe risk bonds was directly proportional to the triggering amount. The pricing of one-year bonds was higher than that of three-year bonds. Finally, under the same conditions, price differences of the discounted cash flow discount model and Wang two-factor model in different principal-loss ratios were compared.

Key words: earthquake catastrophe bond pricing; cash flow discount model; Wang two-factor model; Poisson distribution; lognormal distribution

---

收稿日期：2018－07－30　　网络出版日期：2018－11－28
基金项目：国家自然科学基金青年科学基金项目(71703154)
作者简介：谢卓伦(1996－　)，男，浙江宁波人，本科生，主要从事经济统计方面的研究。
通信作者：叶　露，E-mail：zjwzajyl@126.com

巨灾往往给人民带来严重的生命威胁和重大的财产损失。据统计，在 2008 年四川汶川大地震中遇难 69227 人，失踪 17923 人，造成直接经济损失 8523 亿元人民币[1]。从全球范围来看，近年来世界各地巨灾频发，许多评级机构对提供巨灾保险产品的保险公司提出越来越严格的资金要求，保险公司逐渐转向资本市场寻求承保能力，创新巨灾保险衍生品。巨灾保险基金的正常运转需要投入较多的人力、物力来维持。而地震巨灾风险证券通过发行与地震巨灾风险相关的债券，将地震巨灾风险转移到资本市场，不但发行成本低，而且充分利用资本市场的雄厚资金来提高保险公司的承保能力，也为投资者提供了一种投资途径。

建立合适的巨灾模型是中国巨灾金融保障体系构建中的一项非常重要的工作。无论是巨灾保险还是风险证券化，都离不开对历史巨灾信息的统计分析和对未来巨灾的预测。建立健全符合中国国情的巨灾模型，将为巨灾金融防范的决策者和参与者提供重要的量化信息[2]。相比于国外和中国台湾地区，中国大陆对于巨灾风险证券化的法律法规尚不健全，对巨灾债券的定价和发行机制尚不健全。因此，探究巨灾风险债券的定价模型和定价原理，对中国大陆地区巨灾风险金融衍生品市场的不断完善具有积极作用。

本文利用 1992—2016 年间中国大陆地震巨灾数据，首先对地震年发生次数进行分布拟合，得出拟合分布的参数估计，然后采用 6 种概率分布对地震巨灾损失金额进行拟合，通过 P-P 图比较数据与分布的拟合程度，得出参数估计。接着，使用现金流贴现模型和 Wang 两因素模型分别对一年期和三年期的地震巨灾债券给出合理定价。现金流贴现模型是将未来的现金收支折现成当期现金[3]，而 Wang 两因素模型是在概率变换的基础上，对参数进行相应的调整，理论上可以对地震巨灾债券进行更好的定价。最后，在相同触发条件下，比较现金流贴现模型和 Wang 两因素模型在不同本金损失比、不同到期日巨灾债券上的定价差异。

本文的创新点如下：第一、针对中国大陆地区的地震巨灾情况进行债券定价研究。对地震巨灾债券定价的已有研究一般都是基于某个地区或者单独的省份，为使 Wang 模型中的参数尽可能准确，本文将数据范围拓展为中国大陆地区。由于目前中国没有历年地震发生次数和损失金额的完整数据库，所以笔者整合了中国地震台网、国家统计局和文献[1]、[4]—[17]的相关数据资料，综合统计了中国大陆地区的地震经济损失数据。第二、利用中国大陆地震灾害发生频率和损失程度的拟合结果，拟合灾害发生年次数和损失额分布。定价模型中的参数由中国大陆地区实际灾害发生数据拟合得到，由此得到的巨灾债券价格，更符合中国国情。第三、对现金流贴现模型和 Wang 两因素模型的定价结果进行比较。本文将这两种模型应用于同一种债券，研究在相同条件下两种模型定价的差异，并总结造成差异的原因。

一、文献综述

国外研究中，Loubergé 等[18]较早尝试运用 B-S 模型为巨灾风险债券定价。Briys 等[19]、Cox 等[20]分别提出以均衡模型和无套利定价模型为基础的巨灾风险债券定价方法。Lee 等[21]运用蒙特卡罗模拟技术，在考虑多种风险的情况下，对无套利定定价模型的合理性进行检验。Vaugirard[22]在此基础上，给出了带跳的资产模型下债券的无套利定价公式。Morton[23]根据保险市场上的存在的风险，对风险溢价模型进行了改进。Wang[24]提出 Wang 两因素巨灾债券定价模型，用 t 分布代替带未知参数的正态分布的统计抽样理论，进行参数不确定性调整，更好地描述了参数的“重尾”特征。Christofides 等[25]和 Christofides[26]将 Wang 两因素定价模型进行算法优化，使之在不降低精确性的同时，大大提高了计算效率。

国内研究往往是结合相关模型给出中国风险巨灾债券的定价。闰会丽等[27]通过 Wang 转换模型拟合了 1961—2009 年中国洪水灾害数据，在实证中模型对数据的拟合效果显著。马宗刚等[28]采用极值理论中的门限峰值(POT)法研究了风暴潮灾害损失分布的尾部特征，同时采用风险中性测度技术导出了零息票巨灾债券定价公式，为台风风暴潮债券进行了定价。展凯等[29]针对台风数据匮乏的特点，采用贝叶斯推断方法给出台风巨灾风险债券的定价。

不同于洪水、台风灾害，地震巨灾不存在季节性，以往研究较少结合实际数据，而是基于假定的参数给出地震巨灾债券定价。李姗姗等[30]采用蒙特卡洛模拟的方法，对地震年发生次数和损失金额进行拟合检验，根据损失的分布情况，得到不同触发比例下发生巨灾的概率，但是该研究并未使用实际数据。齐超颖[31]根据已知的地震损失数据，拟合得出了中国地震损失分布服从对数正态分布的结果，并且构建加入了道德风险因子的二项分布模型来进行

地震巨灾债券定价,尝试制订了巨灾债券的定价体系。陈和等[32]将 Wang 的两因素模型引入地震债券定价,设计了一款一年期地震巨灾债券。张笑玎等[33]使用 CIR 模型和 Copula 函数,在考虑风险反馈的影响下,给出了地震巨灾债券定价方式。国内对于地震巨灾债券的研究起步较晚,且缺乏相对完整的巨灾损失统计数据,所以对于地震巨灾的研究较少。中国尚未发行巨灾债券,对其定价方式尚无标准范式,故本文结合地震发生的实际特点,给出两种国际学术研究中常用模型下的债权定价并比较其特征。

二、中国地震巨灾年发生次数和损失金额的描述性分析

(一)数据选取与预处理

巨灾通常指造成重大财产和人员损伤的灾难,但是政府部门或学术界对其认定标准无相关规定。根据相关研究[34],本文假定中国大陆地区 5.0 级及以上的地震灾难为巨灾。据此,笔者搜集了中国大陆地区 1992—2016 年的地震巨灾数据①。由于通货膨胀因素会影响巨灾的实际经济损失数额,如不排除将导致误差存在,所以本文采用 CPI 指数逆推法②对地震损失金额进行调整。本文以中国大陆地区 2016 年的物价指数为基准,计算出 1992—2015 年中地震年的 CPI 指数,再将地震造成的经济损失金额乘以各年的 CPI 指数,得出调整后的经济损失。

(二)地震年发生次数的描述性分析

对 1992—2016 年中国大陆地区地震年发生次数的基本统计量进行计算,得出各震源地区一年中发生 5.0 级及以上的地震最多为 16 次,最少的仅 1 次,均值为 7.8 次,中位数为 7 次,标准差为 4.4535。偏度接近于 0,说明分布可能是存在对称性的,峰度为 −1.0230 说明数据分布并不是很集中。其中,云南和新疆为地震高发区,1992—2016 年 5.0 级及以上地震分别发生了 67 次和 59 次,四川、青海、甘肃、西藏等地区大地震也时有发生。

(三)地震巨灾损失金额的描述性分析

对 1992—2016 年中国大陆地区地震年发生次数的基本统计量进行计算,得出地震巨灾损失经调整后的均值为 6464.7342 百万元,中位数为 101.6338 百万元,均值位于中位数的右边,所以分布呈明显右偏。标准差为 73432.4923,峰度系数为 192.4574。从调整后的地震造成的经济损失地区来看,四川地区的损失远高于其他地区。相对于四川来说,新疆和云南虽然地震发生频率较高,但是两地地广人稀,人口密度较小,且经济发展较慢。然而,四川地区人口密集,一旦发生地震,就可能造成巨大的经济损失,如 2008 年汶川地震。由于汶川地震造成的经济损失过于巨大,属于奇异值,所以下文对数据的处理都不包含此次地震数据。

三、中国地震年发生次数和损失金额的分布拟合

(一)地震年发生次数的分布拟合

一般认为,地震的发生遵循泊松分布[31,35-36],具有随机性。因此,假定中国地震年发生次数 N 服从参数为 λ 的泊松分布,记做 $N \sim P(\lambda)$,其概率分布函数为:$P(N=k)=\dfrac{e^{-\lambda}\times\lambda^{k}}{k!}$,$k=0,1,2,\cdots$。由矩估计可得 $\lambda=7.8$,使用参数 λ 对年发生次数进行拟合,并对地震年发生次数进行 χ^2 检验,结果如表 1 所示。由表 1 可知,当 $\alpha=0.05$ 时,查泊松分布表可得 $\chi_3^2=7.82$。因为 $3.5352<\chi_3^2=7.82$,故可认为地震风险年发生次数服从参数 $\lambda=7.8$ 的泊松分布。

表 1　1992—2016 年中国大陆地区地震年发生次数的 χ^2 检验

发生次数/次	发生概率	理论值	统计量	χ^2
0～5	0.2098	5.2460	7	0.5864
6～7	0.2710	6.7739	6	0.0884
8～9	0.2599	6.4975	3	1.8826
≥10	0.2560	6.4825	9	0.9777
合计	1.0000	25.0000	25	3.5352

(二)地震损失金额分布拟合以及最优分布选取

本文选取标准分布、帕累托分布、Weibull 分布、对数正态分布、指数分布和 Gamma 分布这 6 种分布对损失金额进行拟合。对于拟合效果,采用 P-P 图来检验 6 种分布对地震巨灾经济损失的拟合情况。P-P 图是根据变量(调整后的经济损失)的累积比例与指定分布的累积比例之间的关系所绘制的图形,图中各点分布越接近一条直线,说明拟合的效果越好。

图 1 为 1992—2016 年地震损失金额的标准分布、帕累托分布、Weibull 分布、对数正态分布、指数分布和 Gamma 分布。从图 1 中可以看出:标准分布拟合 P-P 图中各点的分布与直线的差距很大,拟合效果

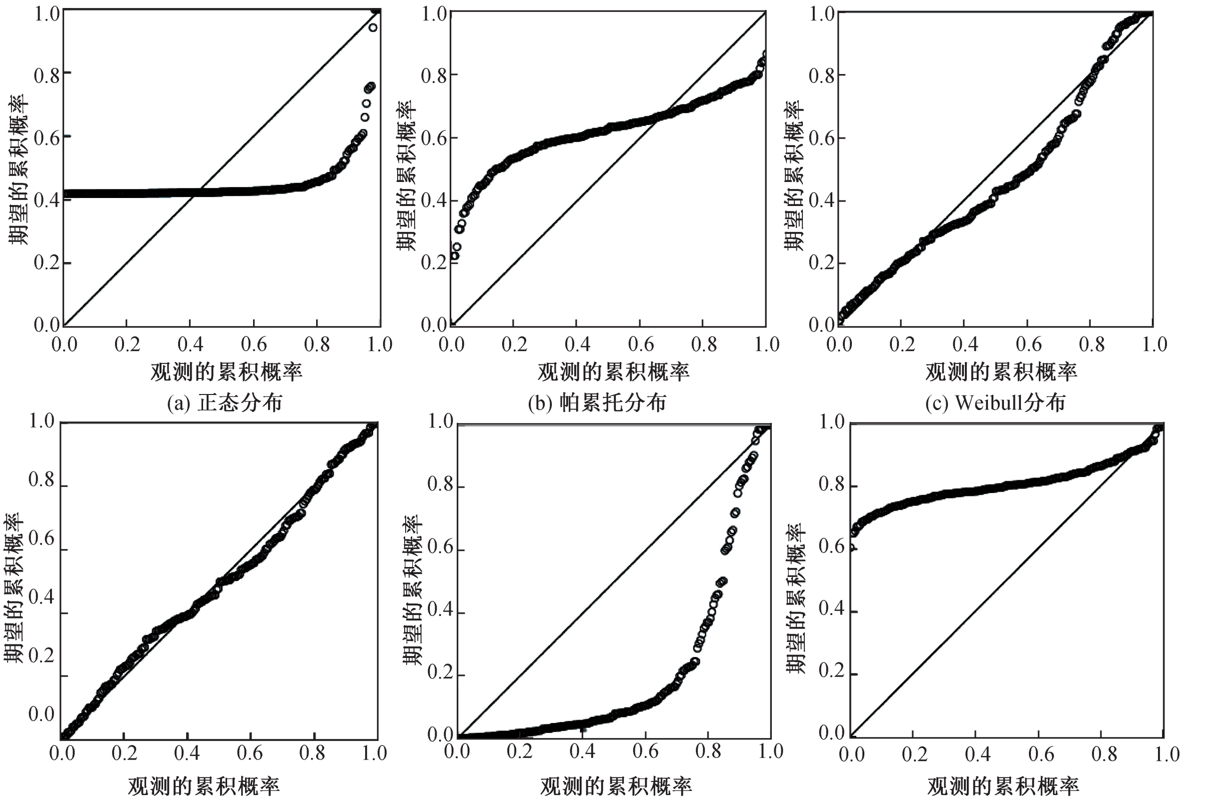
① 虽然中国台湾地区属于地震高发地区,但是该地区的债券发行制度与中国大陆有所不同,所以本文并没有考虑中国台湾地区的地震数据。

② CPI 指数逆推法:假定某一年的 CPI 指数为 1.0000,由此推算出其他年份的 CPI 指数。

很差；帕累托分布拟合 P-P 图中各点的分布与直线的差距比标准分布拟合 P-P 图小，拟合效果比标准分布好，但是拟合程度也不够高；对比 Weibull 分布、对数正态分布、指数分布和 Gamma 分布的 P-P 图，基于收集的数据可以发现，对数正态分布拟合最接近于一条直线，拟合程度最佳，所以可以认为地震经济损失 x 分布近似服从对数正态分布，即

$$f(x,u,\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(lnx\text{-}u)^2\right],x>0\\ 0,x\leqslant 0\end{cases},$$

其中：参数 u,σ 由似然估计得到，$u=4.6269,\sigma=2.1417$。



(a) 正态分布　(b) 帕累托分布　(c) Weibull分布
(d) 对数正态分布　(e) 指数分布　(f) Gamma分布

图 1　地震经济损失 6 种分布拟合的 P-P 图

四、现金流贴现模型下的定价

（一）地震巨灾债券触发条件

在债券有效期内，单位时间内地震巨灾损失发生的次数为 N，其中第 n 次发生地震巨灾的经济损失金额为 X_n，X_n 独立同分布，且 N 和 X_n 是独立的。建立损失聚合风险模型为：

$$S_N=X_1+X_2+\cdots+X_N=\sum_{n=1}^{N}X_n \qquad (1)$$

由前文可知，中国大陆地区巨灾灾害单位时间内发生的次数分布服从泊松分布，每次地震发生的损失金额服从对数正态分布，则累积损失金额 S 的期望函数为：

$$E(S)=E[E(S\mid N)]=E(NE(X))=E(N)E(X) \qquad (2)$$

其中：每次地震损失的期望值是 $\mathrm{E}(X)=e^{u+\frac{\sigma2}{2}}=e^{4.6269+\frac{2.14172}{2}}=1012.7071$ 百万元。地震单位时间内发生次数的期望值是 $\mathrm{E}(N)=\lambda=7.8$ 次。所以，中国大陆地区单位时间内地震灾害累积损失金额 S 的期望值 $\mathrm{E}(S)=1012.7071\times7.8=7899.1150$ 百万元。为了设立债券触发条件，将加入风险自留度，若地震损失没有超过风险自留度，则不触发地震巨灾债券触发机制。假定自留度为 30%[36]，则地震巨灾债券的触发金额 $K=30\%\times7899.1150=2369.7345$ 百万元。由累积损失金额 S 服从复合泊松分布，利用正态近似等式，得到地震巨灾债券不触发的概率 p 为：

$$\begin{aligned}p&=P(S\leqslant 2369.7345)\\&=P(S\leqslant 0.3\lambda E(X))\\&=P\left(\frac{S-\lambda E(X)}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\leqslant\frac{-0.7\lambda E(X)}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\right)\\&=P\left(\frac{S-\lambda E(X)}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\leqslant\frac{-0.7\lambda u}{\sqrt{\lambda(u^2+\sigma^2)}}\right)\end{aligned}$$

$=\Phi(-1.7741)$

$=0.0380$

其中：Φ 是指标准正态分布。因此，地震巨灾债券触发的概率 q 为：$q=1-p=0.9620$。

(二)现金流贴现模型定价

1.利率假设

为了准确计算出中国大陆地区地震巨灾债券的价格，以 2017 年 12 月 31 日的国债的收益率①为基准，计算三年期地震巨灾债券的每期市场利率。

由于一年期国债的收益率为 3.7909%，即 T_1 时期地震巨灾债券的市场利率 $i_1=3.7909\%$。可以假设地震巨灾债券的市场价格为 100 元，由于债券价格等于未来收益的现值，根据 T_2 时期地震债券市场利率 i_2 的计算公式：

$$100=\frac{3.7869}{1+i_1}+\frac{3.7869+100}{(1+i_1)(1+i_2)} \tag{3}$$

解得 $i_2=3.7827\%$，同理，T_3 时期地震巨灾债券市场利率 i_3 的计算公式为：

$$100=\frac{3.7808}{1+i_1}+\frac{3.7808}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{3.7808+100}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)} \tag{4}$$

解得 $i_3=3.7679\%$，即 T_3 时期地震债券市场利率 $i_3=3.7679\%$。

2.本金利息保证偿还型债券

本金利息保证偿还型债券，即在债券有效期内不受巨灾是否发生的影响，期满后交付投资人全部本金及息票收益。该类债券的本质为定期存款，特点是无风险，相应的债券收益较低。

假设债券面值与本金相同，记为 $F=100$ 元，息票收益 $F_r=8$ 元，i_t 为中国大陆地区三年期地震巨灾债券每期市场利率的估算值。假设债券期限在 $T=3$ 时结束，将每期收益折现到初始时刻，则债券的发行价格 P_0 为：

$$P_0=\frac{F_r}{1+i_1}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{F_r+F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}=111.7567 \tag{5}$$

结果显示，虽然每期利率递减，但该类型债券收益稳定，因而发行价格较高。

3.风险债券价格

利用地震巨灾的分布拟合特征，给出加入触发条件的风险债券定价。在安全债券类型中加入触发机制，在没有达到触发的条件下，债券持有人在每一期都将获得息票收益，同时在期末获得本金；但是只要达到触发条件，持有人的本金将遭受部分或全部损失，并且将失去当期息票。假设息票收益 $F_r=12$ 元(由于存在风险，故息票收益偏高)，债券触发条件为累积巨灾损失金额达到 $K=2369.7345$ 百万元，即不触发的概率为 $p=0.0380$。现分别对下列三种巨灾风险债券进行定价。

①本金保障型债券

该类巨灾债券在债券到期时，无论巨灾是否在债券有效期内发生，本金都会返回给投资人，但息票收益则视累积巨灾损失金额而定，一旦达到触发条件，投资人就不会获得收益，反之则有。即在约定期内达到触发条件，则投资人只能收回本金 F；若没有达到触发条件，则债券到期时投资人能得到 $(F+F_r)$。对于三年期的债券，若在第一年内达到触发条件，则失去第一年的息票收入，且等期满时，得到本金；若在第二年内达到触发条件，则会失去第二年的息票收入，且需等到期满时得到本金；若在第三年内达到触发条件，则会失去第三年的息票收入，在期满时得到本金；若三年内都达不到触发条件，即每年的累加损失均小于触发金额，则每年将得到息票收入且三年期满时，将收回本金。故债券价格的定价公式为：

$$\begin{aligned}P_0=&\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times q+\left[\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times pq\\&+\left[\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times p^2q\\&+\left[\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times p^3\\=&\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\times p+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}\times p^2+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times p^3\end{aligned} \tag{6}$$

解得债券发行价格 $P_0=89.9212$ 元。相比于本金利息保证偿还型，本金保障型的价格要低许多，这是

① 2017 年 12 月 31 日的国债的收益率：一年期为 3.7909%，二年期为 3.7869%，三年期为 3.7808%。

因为本金保障型债券为风险债券，存在一定的风险，即对同样的本金和息票收益，风险产品的价格一定比无风险产品的价格要低。试想如果两者价格一样，本金利息保证偿还型可以让购买者在期满时得到本金和息票收益，而本金保障型债券购买者能得到本金但不一定会得到息票收益，则本金保障型债券对于购买者而言将没有任何吸引力。

②本金受险型债券

在该债券类型中，一旦达到触发条件，将不能获得息票收益，同时将损失全部本金；只有在债券期限内没有达到触发条件，才会获得本金和息票收益。即在约定期内达到触发条件，则投资人不能收回本金；若没有达到触发条件，则债券到期时投资人能得到 $(F+F_r)$。对于三年期的债券，若在第一年内达到触发条件，则失去第一年的息票收入，且等期满时，得不到本金；若在第二年内达到触发条件，则会失去第二年的息票收入，且等到期满时得不到本金；若在第三年内达到触发条件，则会失去第三年的息票收入，在期满时得不到本金；若三年内都达不到触发条件，即每年的累加损失均小于触发金额，则每年将得到息票收入且三年期满时，将收回本金。则债券价格的定价公式为：

$$\begin{aligned}P_0 &= 0\times q+\left[0+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times pq+\left[0+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times p^2q\\&\quad+\left[\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times p^3\\&=\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times p^3+\frac{F_r}{(1+i_1)}\times p+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}\times p^2+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times p^3\end{aligned} \tag{7}$$

解得债券发行价格为 $P_0=0.4612$ 元。相比于本金保障型，本金受险型的价格要低，是因为达到触发条件时，本金保障型可收回本金，本金受险型无法收回本金。

③部分本金受险型债券

设不受险的本金比例为 $s(0\leqslant s\leqslant 1)$，若在约定期内无地震巨灾发生，在债券期满时，投资人得到的现金流为 $(F+F_r)$；若有巨灾发生，则投资人能收回部分本金 sF。假设模型免赔额度为票面价值的 70%。也就是说，当没有达到触发条件，将获得全部本金和息票收益；当达到触发条件时，没有息票收益，且返还 70% 的本金。对于三年期的债券，若在第一年内达到触发条件，则失去第一年的息票收入，且等期满时，得到 70% 的本金；若在第二年内达到触发条件，则会失去第二年的息票收入，且等到期满时得到 70% 的本金；若在第三年内达到触发条件，则会失去第三年的息票收入，在期满时得到 70% 的本金；若三年内都达不到触发条件，即每年的累加损失均小于触发金额，则每年将得到息票收入且三年期满时，将收回本金。则债券价格的定价公式为：

$$\begin{aligned}P_0 &= \frac{sF}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times q+\left[\frac{sF}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times pq\\&\quad+\left[\frac{sF}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times p^2q\\&\quad+\left[\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}+\frac{F_r}{(1+i_1)}\right]\times p^3\\&=\frac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times p^3+\frac{F_r}{(1+i_1)}\times p+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)}\times p^2\\&\quad+\frac{F_r}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times p^3+\frac{sF}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times(1\text{-}p^3)\end{aligned} \tag{8}$$

解得债券发行价格为 $P_0=63.0832$ 元。部分本金受险型的价格要高于本金受险型，低于本金保障，是因为该险种将收回部分本金。

五、Wang 两因素模型下的债券定价

(一)地震巨灾债券触发条件

在 Wang 两因素定价模型下，债券触发机制常设定为约定期内最大损失额到达某触发水平。假设 T 年期的地震巨灾债券在约定期内发生巨灾次数为 N_T，最大损失额为 M。已知 $N_T=n(n=1,2,\cdots)$时，地震损失金额变量分别为 $X_1,X_2,\cdots X_n$，相互独立且同分布。计算在 T 年里地震造成的最大损失额大于触发点的概率：

$$P(M>K)=P(\max(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_{N_T})>K)$$

$$
\begin{aligned}
&=1-P(\max(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_{NT})\leqslant K)\\
&=1-P(X_1\leqslant K,X_2\leqslant K,X_3\leqslant K,\\
&\quad \cdots,X_{NT}\leqslant K)\\
&=1-\sum_{n=1}^{\infty}P(N_T=n)P(X_1\leqslant K,X_2\leqslant\\
&\quad K,\cdots,X_{NT}\leqslant K\mid N_T=n)\\
&=1-\sum_{n=1}^{\infty}P(N_T=n)P(X_1\leqslant K,X_2\leqslant\\
&\quad K,\cdots,X_n\leqslant K)\\
&=1-\sum_{n=1}^{\infty}P(N_T=n)P^n(X\leqslant K)\\
&=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\exp(-\lambda T)P^n(X\leqslant K)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

(二)Wang 两因素模型的调整

Wang 单因素定价模型是指损失分布的生存函数 $D(x)=P(X>x)$，即巨灾损失额 X 超过阈值 x 的概率。由于巨灾风险债券具有偏斜性和跳跃性的特点，单因素模型的假定过于理想化，与巨灾风险"重尾"特征不符，因此 Wang 两因素模型在参数不确定性方面做了改进，提出 Wang 变换公式：

$$D^*(x)=\Phi(\Phi^{-1}(D(x))+\lambda^*) \tag{10}$$

其中：Φ^{-1} 是标准正态分布的反函数。该公式假定风险的概率分布是明确的。但实际上，概率分布是人们根据已有的数据估计出来的，即参数是不确定的。所以，Wang 提出用 t 分布代替标准正态分布，用式(11)对 $D(x)$ 进行参数不确定性调整，以更好地描述参数的"重尾"特征：

$$D^*(x)=\Psi(\Phi^{-1}(D(x))) \tag{11}$$

其中：Ψ 是服从自由度为 k 的 t 分布，其概率密度为 $f(t;k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times c_k\times(1+\frac{t^2}{k})^{-(0.5k+1)}$，其中 $-\infty<t<\infty$，$c_k=\sqrt{\frac{2}{k}}\times\frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)}$。Wang 两因素模型中，调整后的 t 分布标的峰度有所增加，使其均值显示出损失分布"重尾"特征。将式(10)和(11)相关联，即可得到 Wang 两因素模型：

$$D^*(\mathrm{X})=\Psi(\Phi^{-1}(D(\mathrm{x}))+\lambda^*) \tag{12}$$

在 Wang 两因素模型的调整下，将地震损失触发概率 $P(M>K)$ 带入式(12)进行修正，得到：

$$P^*(M>K)=\Psi(\Phi^{-1}(P(M>K))+\lambda^*) \tag{13}$$

(三)Wang 两因素模型定价

参考 Wang[24] 在美国巨灾债券市场的数据拟合的数据，可得 P 是参数 $\lambda^*=0.453$、Ψ 是自由度为 5 的 t 分布函数。债券的定价公式：

$$
\begin{aligned}
V(0)=[&(1-\delta)P^*(M>K)F+\\
&P^*(M\leqslant K)F]e^{-r_tT}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

其中：δ 表示启动地震巨灾债券触发机制时的本金损失比例。

为了得到一年期和三年期的地震债券价格，分别取 2017 年 12 月 31 日的一年期定期存款利率 $r_1=1.75\%$，2017 年 12 月 31 日的三年期定期存款利率 $r_3=2.75\%$，令 $P(X>K)=0.01,0.02,\cdots,0.10$，得到相应的触发点 K。将本金损失程度 $\delta=0.3,0.5,1$，一年期 $T=1$ 和三年期 $T=3$，面值 $F=100$ 元地震巨灾债券数据代入式(14)进行定价，得到不同概率下的触发点以及一年期和三年期的债券价格，分别如表 2 和 3 所示。由表 2—3 可知，地震巨灾风险债券的触发点高，债券价格越高，这符合市场运行规律。同时，达到触发点时本金损失比越高，债券价格越低，如本金 100 元全部损失 ($\delta=1$) 比本金损失超过 30 元 ($\delta=0.3$) 的债券价格要低得多。比较一年期与三年期的债券价格，可以发现一年期的价格要高于同类三年期债券价格，这是因为三年期债券存在更高的风险。

表 2　Wang 两因素模型下不同触发点的一年期地震巨灾债券价格表

$P(X>K)$	触发点 K/百万元	$P^*(M>K)$	$P^*(M\leqslant K)$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=1$
0.10	1590.1744	0.6997	0.3003	77.6384	63.8871	29.5090
0.09	1805.1429	0.6693	0.3307	78.5350	65.3815	32.4978
0.08	2071.7351	0.6347	0.3653	79.5548	67.0812	35.8971
0.07	2410.5293	0.5952	0.4048	80.7187	69.0210	39.7768
0.06	2854.8044	0.5500	0.4500	82.0519	71.2430	44.2208
0.05	3462.2814	0.4980	0.5020	83.5852	73.7986	49.3319
0.04	4343.1030	0.4379	0.5621	85.3572	76.7519	55.2385
0.03	5738.7441	0.3679	0.6321	87.4189	80.1880	62.1107
0.02	8311.6551	0.2856	0.7144	89.8472	84.2352	70.2052
0.01	14901.8291	0.1853	0.8147	92.8030	89.1616	80.0579

表 3　Wang 两因素模型下不同触发点的三年期地震巨灾债券价格表

$P(X>K)$	触发点 K（百万元）	$P^*(M>K)$	$P^*(M\leqslant K)$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=1$
0.10	1590.1744	0.9303	0.0697	66.3834	49.2515	6.4219
0.09	1805.1429	0.9169	0.0831	66.7535	49.8685	7.6558
0.08	2071.7351	0.8997	0.1003	67.2287	50.6605	9.2398
0.07	2410.5293	0.8772	0.1228	67.8493	51.6947	11.3083
0.06	2854.8044	0.8473	0.1527	68.6753	53.0714	14.0616
0.05	3462.2814	0.8066	0.1934	69.7986	54.9436	17.8061
0.04	4343.1030	0.7500	0.2500	71.3635	57.5518	23.0224
0.03	5738.7441	0.6689	0.3311	73.6021	61.2827	30.4842
0.02	8311.6551	0.5496	0.4504	76.8994	66.7782	41.4753
0.01	14901.8291	0.3674	0.6326	81.9312	75.1646	58.2481

六、现金流贴现模型和 Wang 两因素模型下债券价格比较

现金流贴现模型和 Wang 两因素模型价格存在差异，是因为两者的债券触发机制不同。为了清楚地比较两种模型定价结果的不同，将现金流贴现模型的息票收益设为 0，同时将 Wang 两因素模型的触发点设为 $K=2369.7345$ 百万元，其他条件不变，给出一年期和三年期地震债券价格的比较结果。

1.现金流贴现模型

①本金保障型债券

对于三年期无息票收入本金保障型债券，即在式（6）中令 $F_r=0$，其定价公式为：$P_0=\dfrac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}$，解得债券发行价格为 $P_0=89.4649$ 元。

一年期无息票收入本金保障型债券定价公式为：$P_0=\dfrac{F}{(1+i_1)}$，解得债券发行价格为 $P_0=96.3476$ 元。

②本金受险型债券

对于三年期无息票收入本金受险型债券，即在式(7)中令 $F_r=0$，其定价公式为：

$P_0=\dfrac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times p^3$，解得债券发行价格为 $P_0=0.0049$ 元。

一年期无息票收入本金受险型债券定价公式为：$P_0=\dfrac{F}{(1+i_1)}\times p$，解得债券发行价格为 $P_0=3.9461$ 元。

③部分本金受险型债券

对于三年期无息票部分本金受险型债券，即在式(8)中令 $F_r=0$，其定价公式为：

$P_0=\dfrac{F}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times p^3+\dfrac{sF}{(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)}\times(1-p^3)$，当 $s=0.7$ 时，解得债券发行价格为 $P_0=62.6269$ 元。

一年期无息票收入本金保障型债券定价公式为：$P_0=\dfrac{F}{(1+i_1)}\times p+\dfrac{sF}{(1+i_1)}\times(1-p)$，解得债券发行价格 $P_0=68.5422$ 元。

2.Wang 两因素模型

对于 Wang 两因素模型，本金损失程度 $\delta=0$ 对应于现金流贴现模型中的本金保障型债券，$\delta=1$ 对应于本金受险型债券，$\delta=0.3$ 对应于 $s=0.7$ 的部分本金受险型债券。表 4 汇总了面值 $F=100$、触发点 $K=2369.7345$ 百万元、无息票收益的一年期和三年期现金流贴现模型和 Wang 两因素模型债券价格。对于这两种模型，本金保障型债券价格远大于本金受险型债券。对于同一债券，Wang 两因素模型的价格要远高于现金流贴现模型给出的价格。对 $\delta=0$，即本金保障型债券，两种模型给出的价格相差较小。

表 4　现金流贴现模型和 Wang 两因素模型的债券价格比较

不同模型的债券价格	一年期			三年期		
	$s=1$, $\delta=0$	$s=0.7$, $\delta=0.3$	$s=0$, $\delta=1$	$s=1$, $\delta=0$	$s=0.7$, $\delta=0.3$	$s=0$, $\delta=1$
现金流贴现模型	96.3476	68.5422	3.9461	89.4649	62.6269	0.0049
Wang 两因素模型	98.2652	80.5829	39.3241	92.0811	67.7723	11.0516

七、结 论

本文基于中国大陆地区地震巨灾损失数据，运用现金流贴现模型对本金保障型、部分本金受险型和本金受险型巨灾债券给出定价公式，利用实证参数拟合结果，得出不同债券类型三年期的发行价格。同时运用 Wang 两因素定价模型，对触发点不同、本金损失比例不同、到期时间不同的地震巨灾债券进行定价。

根据 1992—2016 年中国大陆地区地震巨灾损失数据的基本统计分析，得到地震年发生次数服从强度为 7.8 的泊松分布。巨灾损失金额具有右偏、“尖峰”和“厚尾”的特征，说明一般地震的损失都集中徘徊在一定范围，但偶尔有几次造成的损失特别巨大，正态分布不适用。通过 6 种概率分布的拟合，由 P-P 图可知损失金额服从对数正态分布。对于现金流贴现模型，首先根据地震年发生次数和损失金额的分布参数估计值，计算得到中国大陆地区巨灾债券的触发点和触发概率。然后根据国债收益率，估计出每期的市场利率，从而对三种地震巨灾债券给出清晰的定价公式。由计算结果可知，本金保障型巨灾债券的风险性最低，发行价格最高；本金受险型债券价格最低，风险最大；部分本金受险型债券的价格介于二者之间，符合市场规律。对于 Wang 两因素模型，首先利用估计的参数对债券触发概率进行 Wang 两因素模型转换，然后对一年期和三年期的地震巨灾债券进行定价分析，结果表明：地震巨灾风险债券的价格与触发金额成正相关，触发金额越高，风险越低，巨灾债券价格越高；反之，触发金额越低，风险越高，地震巨灾债券的价格就越低。对于不同的本金损失比例，可以看到本金损失比例越高时债券价格越低，反之，本金损失比例越低，债券价格越高，即债券价格与本金损失比成负相关。对于不同到期时间，一年期的债券价格高于三年期的债券价格，即债券价格与到期时间成负相关。综合比较现金流贴现模型和 Wang 两因素模型，发现对于相同面值、相同到期时间、相同触发金额的无息票收益债券，对于不同的本金损失额，Wang 模型给出的价格要高于现金流贴现模型给出的价格，且价格差随着本金损失比的减小而减小，当 $\delta=0$ 时，即对于本金保障型债券，两者的价格差最小。本研究只给出了基于本金和息票收入风险的债券计算公式，后续的研究将致力于加入附加费率等其他影响价格的因素，使得债券定价更为完善。同时由于中国尚未发行巨灾债券，现金流贴现模型和 Wang 两因素模型给出的价格有待进一步的实证检验。

参考文献：

[1] 郑通彦，李洋，侯建盛，等.2008 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 灾害学，2010，25(2)：112-118.

[2] 史翔. 加快我国巨灾模型建设的思考[J]. 中国保险，2010(8)：18-24.

[3] 谈运勇. 现金流贴现模型的比较研究[J]. 商，2014(23)：173-174.

[4] 苗崇刚，杜玮.1997 年中国大陆地震灾害述评[J]. 自然灾害学报，1998，5(7)：99-103.

[5] 侯建盛，苗崇刚，李成日.2002 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 震情研究，2003(1)：4-10.

[6] 侯建盛，苗崇刚，李成日，等.2003 年中国大陆震害述评[J]. 自然灾害学报，2004，13(3)：24-29.

[7] 米宏亮，李洋，侯建盛.2005 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 自然灾害学报，2006，15(3)：164-168.

[8] 米宏亮，李洋，侯建盛.2007 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 国际地震动态，2008(2)：41-45.

[9] 郑通彦，李洋，侯建盛，等.2009 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 灾害学，2010，25(4)：96-101.

[10] 郑通彦，赵凭，刘在涛.2010 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 自然灾害学报，2011，20(4)：107-113.

[11] 郑通彦，郑毅.2011 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 自然灾害学报，2012，21(5)：88-97.

[12] 郑通彦，郑毅.2012 年中国大陆地震灾害述评[J]. 自然灾害学报，2014，23(3)：166-170.

[13] 郑通彦，郑毅.2013 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 自然灾害学报，2015，24(1)：239-246.

[14] 郑通彦，冯蔚，郑毅.2014 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 自然灾害学报，2015，31(2)：202-208.

[15] 陈通，郑通彦.2015 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 世界地震工程，2016，31(3)：133-137.

[16] 文鑫涛，郑通彦.2016 年中国大陆地震灾害损失述评[J]. 灾害学，2018，33(3)：141-144.

[17] 刘昕龙，姜世杰，李哲. 地震巨灾保险共同体的风险转移效率研究[J]. 保险研究，2017(4)：49-66.

[18] Loubergé H，Kellezi E，Gilli M. Using catastrophe-linked securities to diversify insurance risk：A financial analysis of CAT bonds [J]. Journal of Insurance Issues，1999，22(2)，125-146.

[19] Briys E，Varenne F D. Valuing risky fixed rate debt：An extension [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis，1997，32 (2)，239-248.

[20] Cox S，Pedersen H. Catastrophe risk bonds [J]. North American Actuarial Journal，2000，4(4)：56-82.

[21] Lee J P，Yu M T. Pricing default-risky CAT bonds

with moral hazard and basis risk [J]. Journal of Risk and Insurance,2002,69 (1):25-44.

[22] Vaugirard V E. Pricing catastrophe bonds by an arbitrage approach [J]. Quarterly Review of Economics and Finance, 2003, 43(1):119-132.

[23] Morton N L. Pricing risk transfer transactions [J]. Astin Bulletin: The Journal of the International Actuarial Association, 2000, 30(2):259-293.

[24] Wang S. CAT bond pricing using probability transforms[C]//Geneva Association. Insurance and the State of the Art in CAT Bond Pricing. Working Paper Series,2004:19-29.

[25] Christofides S, Smith A, David A. DFA:The value of risk [C] Casualty Actuarial Society E-Forum Casualty Actuarial Society, USA:Virginia,2001:153-194.

[26] Christofides S. Pricing of catastrophe linked securities [J]. Astin Colloquium International Actuarial Association, Belgium: Brussels, 2004,6(6):1-28.

[27] 闫会丽，周延. 我国洪水巨灾债券定价问题研究:基于Wang两因素模型的实证分析[C]//中国保险学会.中国保险学会学术年会入选文集2011(理论卷).2011:10.

[28] 马宗刚，马超群，肖时松. 台风风暴潮债券定价:基于我国沿海1989—2015灾害数据[J]. 系统工程,2017,35(9):18-26.

[29] 展凯，丁冬. 基于贝叶斯推断的巨灾债券定价研究[J]. 长沙理工大学学报(社会科学版),2018,33(3):88-95.

[30] 李姗姗，叶丽，吴涛. 地震风险债券产品的设计[J]. 统计与决策,2009(14):49-51.

[31] 齐超颖. 中国地震风险债券的定价研究[D]. 郑州:河南大学, 2011:37-55.

[32] 陈和，曹琳. 基于Wang两因素模型的台风巨灾债券定价研究[J]. 上海管理科学, 2013, 35(3):81-85.

[33] 张笑玎，米岩，乔慧淼. 复合触发机制下地震巨灾债券定价研究:考虑风险反馈的影响[J]. 保险研究,2018(1):67-78.

[34] 张卫星，史培军，周洪建. 巨灾定义与划分标准研究:基于近年来全球典型灾害案例的分析[J]. 灾害学,2013,28(1):15-22.

[35] 雷媛棠. 基于Wang两因素模型对我国地震巨灾债券定价的分析[D]. 武汉:华中师范大学,2017:19-21.

[36] 胡今朝. 地震巨灾债券产品设计研究[D]. 昆明:云南财经大学,2015:40-50.

(责任编辑:陈丽琼)