浙江理工大学学报，2019，41(1)：118-121
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(n).2019.01.017

# 广义三角函数与双曲函数的 Wilker-Huygens 型不等式

钟根红[a]，李林钟[b]，马晓艳[b]
（浙江理工大学，a.科技与艺术学院；b.理学院，杭州 310018）

**摘　要：**通过初等解析方法与不等式理论，研究了带有一个参数 $p$ 的广义三角函数及广义双曲函数的 Wilker 型与 Huygens 型不等式，所给出的广义三角函数与双曲函数的加强不等式改进了已知结果；同时用初等解析方法解决了一个公开问题，得到了广义双曲函数的相应不等式，补充了该公开问题的完整性。

**关键词：**Wilker 型不等式；Hugens 型不等式；广义三角函数；广义双曲函数；不等式

**中图分类号：**O178　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1673-3851 (2019) 01-0118-04

# Wilker-Huygens inequalities involving generalized trigonometric function and hyperbolic function

*ZHONG Genhong*[a], *LI Linzhong*[b], *MA Xiaoyan*[b]
(a.Keyi College; b.School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Wilker-Huygens inequalities for generalized trigonometric and hyperbolic Function with a parameter P were studied by using elementarily analytic method and inequality theory. The strengthened inequality of generalized trigonometric and hyperbolic Function improved the known result. Meanwhile, an open problem was solved by using elementary analytic method, and the corresponding inequalities of generalized hyperbolic functions were obtained, which supplemented integrity of the open problem.

**Key words:** Wilker-type inequality; Hugens-type inequality; generalized trigonometric function; generalized hyperbolic function, inequality

## 0　引　言

带参数的广义三角函数与双曲函数的是最近发展起来的新课题，特别是关于三角函数以及双曲函数的 Wilker 型不等式及 Huygens 型不等式[1-4]，即：

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}>2,\quad 2\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}>3 \tag{1}$$

$$\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^2+\frac{\tanh x}{x}>2,\quad 2\frac{\sinh x}{x}+\frac{\tanh x}{x}>3 \tag{2}$$

得到了广泛研究[5-7]。

当 $1<p<\infty$ 时，从 $[0,1]$ 到 $[0,\pi_p/2]$ 定义带有一个参数 $p$ 的反三角函数[8]：

$$\arcsin_p(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt[p]{1-t^p}}\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1],$$

其中 $\frac{\pi_p}{2}=\arcsin_p(1)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[p]{1-t^p}}\mathrm{d}t$，在 $x\in[0,\pi_p/2]$ 上的函数 $\arcsin_p(x)$ 的反函数称为带有一个参数 $p$ 的广义正弦函数 $\sin_p(x)$。显然，$\sin_p(x)$ 在 $[0,\pi_p/2]$ 上为单调递增的凹函数。用同样的方法，对于 $1<p<\infty$，$x\in[0,\pi_p/2]$，可以定义推广广义余弦函数 $\cos_p(x)$：

$$\cos_p(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin_p(x)=(1-\sin_p(x)^p)^{1/p}.$$

类似地可定义其它推广正切函数以及双曲正切

收稿日期：2018－09－01　　网络出版日期：2018－10－08
基金项目：浙江自然科学基金项目(LQ17A010010)；国家自然科学基金项目(11671360)；浙江省教育厅一般科研项目(Y201840023)
作者简介：钟根红(1980－)，男，安徽桐城人，助理研究员，硕士，主要从事函数空间、拟共形特殊函数方面的研究。
通信作者：马晓艳，E-mail：mxy@zstu.edu.cn

函数等,如:

$$\tan_p(x)=\frac{\sin_p(x)}{\cos_p(x)},\qquad \tanh_p(x)=\frac{\sinh_p(x)}{\cosh_p(x)}.$$

当 $p=2$ 时,推广的广义三角函数及双曲函数 $\sin_p(x)$、$\tan_p x$、$\sinh_p(x)$ 等退化为三角函数 $\sin x$、$\tan x$、$\sinh x$ 等。

广义三角函数以及双曲函数的 Wilker 型、Huygens 型不等式的相关研究已有一些结果,但仍有很多猜想没有解决。如 2014 年,Yin 等[9]提出:当 $x\in(0,\pi_p/2)$ 时,不等式

$$\frac{p\sin_p(x)}{x}+\frac{\tan_p(x)}{x}>\frac{px}{\sin_p(x)}+\frac{x}{\tan_p(x)}\tag{3}$$

成立,这个公开问题尚待解决;Neuman[10]定理5、8给出了式(1)—(2)的 Wilker 型、Huygens 型不等式的推广形式,即当 $x\in(0,\pi_p/2)$ 与 $x\in(0,\infty)$ 时,分别成立不等式

$$2\frac{\sin_p(x)}{x}+\frac{\tan_p(x)}{x}>3,$$

$$\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)^2+\frac{\tan_p(x)}{x}>2,\quad p\geqslant 2\tag{4}$$

$$2\frac{\sinh_p(x)}{x}+\frac{\tanh_p(x)}{x}>3,$$

$$\left(\frac{\sinh_p x}{x}\right)^2+\frac{\tanh_p x}{x}>2,\quad 1<p\leqslant 2\tag{5}$$

随后 Klén 等[11]定理3.16又将式(4)—(5)中的 Huygens 型不等式进一步推广,即当 $x\in(0,\pi_p/2)$ 与 $x\in(0,\infty)$ 时,分别成立不等式

$$p\frac{\sin_p(x)}{x}+\frac{\tan_p(x)}{x}>p+1,$$

$$p\frac{\sinh_p x}{x}+\frac{\tanh_p x}{x}>p+1,\quad p>1\tag{6}$$

本文得到了带有一个参数 $p$ 的广义三角函数以及广义双曲函数的 Wilker 型、Huygens 型的加强不等式,并解决了 Yin 等[9]提出的公开问题。

## 1　引　理

为了论证新的结果需要引出以下引理。

**引理 1**[11]定理3.32　对于 $p>1$,

a) 函数 $f_1(x)=\dfrac{\sin_p(x)}{x}$ 从 $\left(0,\dfrac{\pi_p}{2}\right)$ 到 $\left(\dfrac{2}{\pi_p},1\right)$ 严格单调递减。特别地,对于 $x\in(0,1)$,有 $\dfrac{x}{\arcsin_p(x)}<\dfrac{\sin_p(x)}{x}<\dfrac{2x/\pi_p}{\arcsin_p(2x/\pi_p)}$.

b) 函数 $f_2(x)=\dfrac{\tan_p(x)}{x}$ 从 $\left(0,\dfrac{\pi_p}{2}\right)$ 到 $(1,\infty)$ 上严格单调递增。特别地,对于 $x\in(0,k)$ 有 $\dfrac{x}{\arctan_p(x)}<\dfrac{\tan_p(x)}{x}<\dfrac{ax}{\arctan_p(ax)}$,其中 $0<x<\dfrac{\pi_p}{2}$,$a=\dfrac{\tan_p(k)}{k}$.

c) 函数 $f_3(x)=\dfrac{\sinh_p(x)}{x}$ 从 $(0,\infty)$ 到 $(1,\infty)$ 上严格单调递增。特别地,对于 $x\in(0,k)$,有 $\dfrac{x}{\operatorname{arcsin}h_p(x)}<\dfrac{\sinh_p(x)}{x}<\dfrac{bx}{\operatorname{arcsin}h_p(bx)}$,其中 $k>0$,$b=\dfrac{\sinh_p(k)}{k}$.

d) 函数 $f_4(x)=\dfrac{\tanh_p(x)}{x}$ 从 $(0,\infty)$ 到 $(0,1)$ 上严格单调递减。特别地,对于 $x\in(0,k)$,有 $\dfrac{x}{\operatorname{arctan}h_p(x)}<\dfrac{\tanh_p(x)}{x}<\dfrac{cx}{\operatorname{arctan}h_p(cx)}$,其中 $k>0$,$c=\dfrac{\tanh_p(k)}{k}$.

**引理 2**[11]定理3.6　对于 $p\in(1,\infty)$,函数 $g(x)\equiv\dfrac{\log(\sin_p(x)/x)}{\log\cos_p(x)}$ 从 $\left(0,\dfrac{\pi_p}{2}\right)$ 到 $\left(0,\dfrac{1}{p+1}\right)$ 上严格单调递减。特别地,对于任意的 $p\in(1,\infty)$,$x\in\left(0,\dfrac{\pi_p}{2}\right)$,有

$$\cos_p^{\alpha}(x)<\frac{\sin_p(x)}{x}<1\tag{7}$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{p+1}$ 为最佳常数。

**引理 3**[11]定理3.8　对于 $p\in(1,\infty)$,函数 $h(x)\equiv\dfrac{\log(\sinh_p(x)/x)}{\log\cosh_p(x)}$ 从 $(0,\infty)$ 到 $\left(\dfrac{1}{p+1},1\right)$ 上是严格单调递增的。特别地,对于任意的 $p\in(1,\infty)$,$x\in(0,\infty)$,有

$$\cosh_p(x)^{\alpha}<\frac{\sinh_p(x)}{x}<\cosh_p(x)^{\beta}\tag{8}$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{p+1}$,$\beta=1$ 为最佳常数。

## 2　主要结果

**定理 1**　对于 $p>1$,成立不等式:

$$\frac{p\sin_p(x)}{x}+\frac{\tan_p(x)}{x}>\frac{px}{\sin_p(x)}+\frac{x}{\tan_p(x)},\quad x\in\left(0,\frac{\pi_p}{2}\right)\tag{9}$$

$$\frac{p\tanh_p(x)}{x}+\frac{\sinh_p(x)}{x}>\frac{px}{\tanh_p(x)}+\frac{x}{\sinh_p(x)},x\in(0,\infty) \quad (10)$$

**定理 2** 对于 $p>1,m,n\in N^*,\beta\leqslant 0$,

a) 当 $x\in\left(0,\frac{\pi_p}{2}\right),m\alpha-pn\beta\geqslant 0$ 时,成立不等式:

$$m\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\alpha}+n\left(\frac{x}{\tan_p(x)}\right)^{\beta}>m+n \quad (11)$$

b) 当 $x\in(0,+\infty),m\alpha-pn\beta\leqslant 0$ 时,成立不等式

$$m\left(\frac{x}{\sinh_p(x)}\right)^{\alpha}+n\left(\frac{x}{\tanh_p(x)}\right)^{\beta}>m+n \quad (12)$$

## 3 主要结果的证明

定理 1 的证明:令 $f(x)=x-\frac{1}{x},f'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0.f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上严格单调递增。由引理 1 中 a) 和 b),$\frac{\sin_p(x)}{x}>0>-\frac{\tan_p(x)}{x}$,根据 $f(x)$ 的单调性,有 $f\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)>f\left(-\frac{\tan_p(x)}{x}\right)$,又因为 $p>1$,所以有 $pf\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)>f\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)>f\left(-\frac{\tan_p(x)}{x}\right)$,即 $pf\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)>f\left(-\frac{\tan_p(x)}{x}\right)$,亦即 $p\left(\frac{\sin_p(x)}{x}-\frac{x}{\sin_p(x)}\right)>-\frac{\tan_p(x)}{x}+\frac{x}{\tan_p(x)}$ 即不等式(9)成立。

由引理 1 中 c) 和 d),$\frac{\tanh_p(x)}{x}>0>-\frac{\sinh_p(x)}{x}$,再利用上述方法,同理可证得不等式(10)成立。

定理 2 的证明:a) 因为 $\frac{x}{\sin_p(x)}>1$,利用均值不等式 $\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\,(x_i>0,n>1)$,有 $\frac{\sum_{i=1}^{m+n}x_i}{m+n}\geqslant\sqrt[m+n]{\prod_{i=1}^{m+n}x_i}$,因为 $\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\alpha}>0$,$\left(\frac{x}{\tan_p(x)}\right)^{\beta}>0$,令 $x_i=\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\alpha}$,$(i=1,2,\cdots,m)$,$x_i=\left(\frac{x}{\tan_p(x)}\right)^{\beta}$ $(i=m+1,m+2,\cdots,m+n)$,则有

$$m\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\alpha}+n\left(\frac{x}{\tan_p(x)}\right)^{\beta}\geqslant$$
$$(m+n)\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\frac{m\alpha}{m+n}}\left(\frac{x}{\tan_p(x)}\right)^{\frac{n\beta}{m+n}}=$$
$$(m+n)\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\frac{m\alpha+n\beta}{m+n}}\cos_p^{\frac{n\beta}{m+n}}(x) \quad (13)$$

由引理 2,$\cos_p^{\frac{1}{p+1}}(x)<\frac{\sin_p(x)}{x}$,则有 $\cos_p(x)<\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)^{p+1}$,又因为 $\beta\leqslant 0$,所以 $\cos_p^{\frac{n\beta}{m+n}}(x)>\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)^{\frac{(p+1)n\beta}{m+n}}$,故当 $m\alpha-pn\beta\geqslant 0$ 时,又 $\frac{x}{\sin_p(x)}>1$,由式(13)可得

$$m\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\alpha}+n\left(\frac{x}{\tan_p(x)}\right)^{\beta}\geqslant$$
$$(m+n)\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\frac{m\alpha+n\beta}{m+n}}\cos_p^{\frac{n\beta}{m+n}}(x)>$$
$$(m+n)\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\frac{m\alpha+n\beta}{m+n}}\left(\frac{\sin_p(x)}{x}\right)^{\frac{(p+1)n\beta}{m+n}}=$$
$$(m+n)\left(\frac{x}{\sin_p(x)}\right)^{\frac{m\alpha-pn\beta}{m+n}}\geqslant m+n.$$

即不等式(11)成立。

b) 根据引理 3 及 $\frac{\sinh_p(x)}{x}>1$,同理可证不等式(12)成立。

## 4 结 论

本文得到了带有一个参数 $p$ 的广义三角函数以及双曲函数的 Wilker 型与 Huygens 型不等式,改进了已知结果。

a) 定理 1 用初等解析方法解决了 Yin 等[9]在 2014 年提出的公开问题,即不等式(3);同时也得到了广义双曲函数的相应不等式,补充了该公开问题的完整性。

b) 在定理 2 中,

b1) 当 $m=p$、$n=1$、$\alpha=-1$、$\beta=-1$ 时,显然有 $m\alpha-pn\beta=-p+p=0$,不等式(11)与不等式(12)退化为不等式(6),即 Klén 等[11]定理3.16 发现的式(3.17)—(3.18)。

b2) 取 $m=2$、$n=1$、$\alpha=-1$、$\beta=-1$,当 $p\geqslant 2$ 时,显然 $m\alpha-pn\beta=p-2\geqslant 0$,不等式(11)退化为不等式(4)的第一个不等式;当 $1<p\leqslant 2$ 时有 $m\alpha-pn\beta=p-2\leqslant 0$,不等式(12),即退化为不等式(5)的第一个不等式。特别地,取 $p=2$、$m=2$、$n=1$、$\alpha=$

$-1$、$\beta=-1$ 时,不等式(11)—(12)即退化为经典的第二类 Huygens 型不等式:$2\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\tan x}{x}>3$ 及 $2\dfrac{\sinh x}{x}+\dfrac{\tanh x}{x}>3$,从而改进了 Neuman[10]定理5、8发现的不等式(35)和不等式(42)。

c) 取 $m=2$、$n=2$、$\alpha=-2$、$\beta=-1$,当 $p\geqslant 2$ 时,显然 $m\alpha-pn\beta=2(p-2)\geqslant 0$。不等式(11)即退化为不等式(4)的第二个不等式;当 $1<p\leqslant 2$ 时,有 $m\alpha-pn\beta=2(p-2)\leqslant 0$。不等式(12)即退化为不等式(5)的第二个不等式。特别的取 $p=2$,$m=2$、$n=2$、$\alpha=-2$、$\beta=-1$ 时,不等式(11)—(12)即退化为经典的第二类 Wilker 不等式:$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2+\dfrac{\tan x}{x}>2$ 及 $\left(\dfrac{\sinh x}{x}\right)^2+\dfrac{\tanh x}{x}>2$,从而改进了 Neuman[10]定理5、8发现的不等式(36)和不等式(43).

**参考文献:**

[1] Wilker J B. Problem E3306[J]. American Mathematical Monthly,1989,96(1):55.

[2] Huygens C. Oeuvres Completes[M]. Haga: Societe Houondaise des Science,1962:1888-1940.

[3] Zhu L. On Wilker-type inequalities[J]. Mathematical Inequalities & Applications,2007,10(4):727-731.

[4] Neuman E, Sandor E. On some inequalities involving trigonometric and hyperbolic function with emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker and Huygens inequalities[J]. Mathematical Inequalities & Applications,2010,13(4):715-723.

[5] Neuman E. On Wilker and Huygens type inequalities [J]. Mathematical Inequalities & Applications,2012,15 (15):271-279.

[6] Zhu L. A new simple proof of Wilker's inequalities[J]. Mathematical Inequalities & Applications,2005,8(4):749-750.

[7] Wu S. On extension and refinement of Wilker inequality [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics,2009,39 (2):683-687.

[8] Lindqvist P. Some remarkable sine and cosine functions [J]. Ricerche di Matematica,1995,44(2):269-290.

[9] Yin L, Huang L G, Qi F. Some inequalities for the generalized trigonometric and hyperbolic functions[J]. Turkish Journal of Analysis and Number Theory,2014,2(3):96-101.

[10] Neuman E. Inequalities involving generalized trigonometric and hyperbolic functions[J]. Journal of Mathematical Inequalities,2014,8(4):725-736.

[11] Klén R, Vuorinen M, Zhang X H. Inequalities for the generalized trigonometric and hyperbolic functions[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,2014,409(1):521-529.

**(责任编辑: 康　锋)**