

带有饱和发生率和线性饱和治疗函数的 SIS 模型的动力学研究

王 青,路秋英

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要:改进了一类具有饱和发生率和不具有常态预防的饱和治疗函数的传染病模型,改进后的模型具有常态预防能力,更能反映真实的传染病防治情况,所得结论更具一般性。利用定性理论和稳定性分析,研究了模型的平衡点个数、平衡点的稳定性以及后向分支问题。研究发现:模型最多存在 4 个平衡点;当基本再生数小于 1 时,若饱和治疗率较小,常态预防能力较大或者过早采取最大治疗能力,模型发生后向分支。

关键词:治疗函数;SIS 传染病模型;后向分支;平衡点

中图分类号: O193

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2018)09-0630-07

0 引 言

为了发现传染病的传染规律并有效地对传染病进行控制,许多学者致力于传染病模型动力学问题的研究。基本再生数 R_0 是传染病模型中决定疾病是否消失的一个重要依据, $R_0 > 1$ 意味着疾病持续, $R_0 \leq 1$ 表示疾病消失。在经典传染病模型中,从无病平衡点到地方病平衡点的分支是向前的。但当后向分支发生时,即使 $R_0 < 1$,模型仍存在多个地方病平衡点,因此根据 R_0 是否小于 1 不能判断疾病是否灭绝。

1927 年,Kermack 等^[1]研究了著名的 SIRS 传染病模型,该模型包括易感者(Susceptible population, S)、感染者(Infected population, I)以及恢复者(Recovered population, R)。由于发生率函数和治疗函数反映的分别是传染病的传染规律和治疗规律,因此发生率函数和治疗函数是影响传染病模型动力学行为的两大重要因素。例如双线性发生率函数^[2-3],当治疗率较小时,后向分支发生且存在稳定的地方病平衡点。随着研究的深入,研究者们发现,这种发生率函数不能精确表达疾病的传播特点。这

是因为当感染者数量增大时发生率函数并不像双线性发生率函数那样呈线性增加,而是需要适当的函数形式和适当的参数限制感染者与易感者之间的无限接触。由此,研究者们提出了饱和发生率函数^[4-8],饱和发生率函数显然比双线性发生率函数更合理。此后,大量非线性发生率函数和一般发生率函数^[9-11]相继提出。一般而言,非线性发生率函数比双线性发生率函数更能反映传染病的真实传染规律,同时能够产生更加丰富和复杂的动力学行为。

对传染病进行有效控制进而消灭的一种重要手段就是采取治疗。最早,Wang 等^[12]提出常数治疗,即对疾病存在固定的治疗能力。Wang^[13]和吴琼等^[5]进一步改进了常数治疗函数,采取线性饱和治疗函数,该治疗函数在没有达到最大值时,保持与感染者数量呈正比例关系,否则采取最大治疗能力。周康等^[6]推广了该治疗函数,研究了具有常态预防能力的线性饱和治疗函数的 SIR 模型。此治疗函数的优点在于提出了常态下的预防,即在没有感染者被发现的情况下,医院对疾病保持有一定的治疗能力,这样更有利于对疾病的预防。除线性饱和治疗函数外,其他有关二次治疗函数和饱和治疗函数

的相关研究参见文献[14-15]。

本文研究带有饱和发生率和线性饱和治疗函数的 SIS 模型,借助微分方程定性稳定性理论分析模型平衡点的存在性与稳定性,研究平衡点的共存性,进而确定该模型是否发生后向分支现象以及后向分支何时发生。

1 模型的建立

本文建立并研究的传染病模型为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - dS - \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} + rI + h(I) \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} - (d+\epsilon+r)I - h(I) \end{cases} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1)$$

其中:

$$h(I) = \begin{cases} kI + \beta, & 0 \leq I \leq I_0 \\ m, & I > I_0 \end{cases}$$

为治疗函数; m 指饱和治疗率, $m = kI_0 + \beta$; β 指常态下的正常预防能力,一般 $\beta > 0$; k 为治愈率,一般 $k > 0$; A 为人口补充率,一般 $A > 0$; λ 为双线性发生率,一般 $\lambda > 0$; α 代表由大量感染者出现或易感者行为变化对疾病发生率产生的抑制作用,一般 $\alpha > 0$; d 为自然死亡率,一般 $d > 0$; r 为自然恢复率,一般 $r > 0$; ϵ 为疾病致死率,一般 $\epsilon > 0$; I_0 代表采取最大治疗能力时刻的感染者水平。文献[5]采用了线性饱和治疗函数 $h(I) = kI$,也就是本文 $\beta = 0$ 的情况,该治疗函数没有常态预防能力。本文的工作将不具有常态下正常预防能力的治疗函数推广到了具有常态下正常预防能力的情形,研究结果更具一般性。

2 平衡点存在性

首先考虑模型(1)平衡点的存在性。显然,当感染者数量 $I = 0$ 时,模型(1)存在唯一的无病平衡点 $E_0 = (A/d, 0)$ 。地方病平衡点满足:

$$\begin{cases} A - dS - \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} + rI + h(I) = 0 \\ \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} - (d+\epsilon+r)I - h(I) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

本文模型的基本再生数 R_0 的表达式为:

$$R_0 = \frac{\lambda A}{d(d+\epsilon+r+k)}.$$

情形 1: 当 $0 < I \leq I_0$ 时,式(2)可化为:

$$\begin{cases} A - dS - \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} + rI + kI + \beta = 0 \\ \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} - (d+\epsilon+r)I - kI - \beta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

将式(3)的两个方程相加得

$$S = \frac{(A - (d+\epsilon)I)}{d},$$

将其代入式(3)的第二个方程并化简得:

$$aI^2 + bI + c = 0 \quad (4)$$

其中:

$$\begin{cases} a = ad(d+\epsilon+r+k) + \lambda(d+\epsilon) \\ b = d(d+\epsilon+r+k) - \lambda A + d\beta\alpha, \\ c = d\beta \end{cases}$$

故此一元二次方程可能有正解 I_1, I_2 :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ I_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \quad (5)$$

其中:

$$\Delta = b^2 - 4ac = [d(d+\epsilon+r+k) - \lambda A + d\beta\alpha]^2 - 4d\beta[\lambda(d+\epsilon) + ad(d+\epsilon+r+k)] \quad (6)$$

从式(5)可以看出,当 $b \geq 0$ 时, I_1, I_2 均小于零。

故只需考虑 $b < 0$ 的情况,而 $b < 0$ 等价于:

$$R_0 > 1 + \frac{\alpha\beta}{(d+\epsilon+r+k)} \quad (7)$$

又因为式(4)有解必须有 $\Delta \geq 0$,而 $\Delta \geq 0$ 等价于:

$$\begin{aligned} R_0 &\geq 1 + \frac{\alpha\beta}{d+\epsilon+r+k} + \\ &\frac{2\sqrt{d\beta[\lambda(d+\epsilon) + ad(d+\epsilon+r+k)]}}{d(d+\epsilon+r+k)} = P_0 \end{aligned} \quad (8)$$

或

$$\begin{aligned} R_0 &\leq 1 + \frac{\alpha\beta}{d+\epsilon+r+k} - \\ &\frac{2\sqrt{d\beta[\lambda(d+\epsilon) + ad(d+\epsilon+r+k)]}}{d(d+\epsilon+r+k)}. \end{aligned}$$

易判断使式(7)~(8)同时成立的前提是式(8)成立。此时式(4)有两个正解 $I_i (i=1, 2)$ 。设 $S_i = \frac{(A - (d+\epsilon)I_i)}{d}$ 且 $E_i = (S_i, I_i) (i=1, 2)$,若 $I_i \leq I_0$, 则 E_i 为模型(1)的地方病平衡点。

先考虑 $I_1 > I_0$ 的情况,由于 $I_1 > I_0$ 等价于:

$$b + 2[\lambda(d+\epsilon) + ad(d+\epsilon+r+k)]I_0 < 0,$$

故由该不等式可得:

$$R_0 > 1 + \frac{2[\lambda(d+\epsilon) + ad(d+\epsilon+r+k)]I_0}{d(d+\epsilon+r+k)} = P_1 \quad (9)$$

进一步,对 $b + 2[\lambda(d+\epsilon) + ad(d+\epsilon+r+k)]I_0 < -\sqrt{\Delta}$ 两边平方并化简可以得到:

$$R_0 < 1 + \left[\frac{\lambda(d+\epsilon)}{d(d+\epsilon+r+k)} + \alpha \right] I_0 + \frac{\beta}{(d+\epsilon+r+k)I_0} = P_2 \quad (10)$$

故 $I_1 > I_0$ 等价于式(9)–(10)同时成立。因此,当 $R_0 \leq P_1$ 或 $R_0 \geq P_2$ 时, $I_1 \leq I_0$ 成立。

类似地,对 $I_2 > I_0$ 进行讨论,得到当 $P_2 < R_0 \leq P_1$ 时, $I_2 > I_0$ 。因此当 $R_0 \leq \min(P_1, P_2)$ 时, $I_2 \leq I_0$ 。

由于

$$P_1 - P_2 = \frac{[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2 - d\beta}{d(d+\epsilon+r+k)I_0},$$

故 $P_1 < P_2$ 等价于 $d\beta > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2 + \alpha\beta dI_0$ 。因此有定理1:

定理1 当 $R_0 \geq P_0$ 时,对于模型(1)的两个地方性平衡点 E_1, E_2 ,

a) 若 $d\beta \leq [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2$, 则 E_1 存在;当 $R_0 \leq P_2$ 时, E_2 存在,当 $R_0 > P_2$ 时, E_2 不存在。

b) 若 $d\beta > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2$, 当 $R_0 \leq P_1$ 时, E_1, E_2 均存在。

c) 若 $d\beta > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2$, 当 $P_1 < R_0 < P_2$ 时, E_1, E_2 均不存在;当 $R_0 > P_2$ 时, E_1 存在, E_2 不存在。

情形2: 当 $I > I_0$ 时,式(2)可化为:

$$\begin{cases} A - dS - \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} + rI + m = 0 \\ \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} - (d+\epsilon+r)I - m = 0 \end{cases} \quad (11)$$

以下讨论式(11)的正的地方病平衡点,与讨论式(3)同理,设式(11)的两个正的地方病平衡点为 E_3, E_4 。

$$P_0 - \hat{P}_0 = \frac{k(1-\alpha I_0)}{d+\epsilon+r+k} + \frac{2\sqrt{d\beta[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]} - 2\sqrt{d\beta[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)] + \alpha k d^2\{[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0 - \beta\}}}{d(d+\epsilon+r+k)},$$

若 $P_0 < \hat{P}_0$, 则有 $1 < I_0$ 且 $\beta < [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+\epsilon)]I_0$ 。又因为 $d < I_0$ 。故 $d\beta < [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+\epsilon)]I_0^2$, 这与题设 $[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2 < d\beta < dm \leq [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2$ 矛盾,故得证。

推论3 模型(1)存在多个平衡点,但平衡点个数不超过4个。

推论4 模型(1)同时存在4个平衡点是不可能出现的。

这是因为当 $dm > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2$ 时,由式(8)–(9)可知 $P_0 > P_1$,根据定理1的b)知

定理2 当 $R_0 \geq \hat{P}_0$ 时,对于模型(1)的两个地方病平衡点 E_3, E_4 ,

a) 若 $dm \leq [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2$, E_3 不存在,且当 $R_0 \leq P_2$ 时, E_4 不存在,当 $R_0 > P_2$ 时, E_4 存在。

b) 若 $dm > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2$, 当 $P_3 < R_0 < P_2$ 时, E_3, E_4 均存在。

c) 若 $dm > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2$, 当 $R_0 \leq P_3$ 时, E_3, E_4 均不存在,当 $R_0 \geq P_2$ 时, E_3 不存在, E_4 存在。其中:

$$\hat{P}_0 = 1 + \frac{m\alpha - k}{d+r+\epsilon+k} +$$

$$\frac{2\sqrt{md[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+\epsilon)]}}{d(d+r+\epsilon+k)},$$

$$P_3 = 1 + \frac{m\alpha - k}{d+r+\epsilon+k} + \frac{2[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+\epsilon)]I_0}{d(d+r+\epsilon+k)}.$$

推论1 当 $R_0 < 1$ 时,若 $dm > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2$ 且 $\hat{P}_0 < 1$,模型(1)产生一个后向分支。

证明: 由定理2的b)即可得到。

推论2 若 $[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2 < d\beta < dm \leq [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2$, 当 $\max\{\hat{P}_0, P_0, P_3\} < R_0 < P_2$ 时,模型(1)存在三个地方病平衡点 E_1, E_3, E_4 。

证明: 由定理1的a)、定理2的b)以及 $m = kI_0 + \beta > \beta$ 可知,若 $[\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2 < dm \leq [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2$, 当 $\max\{\hat{P}_0, P_0, P_3\} < R_0 < P_2$ 时, E_1, E_3, E_4 都存在。若 $dm > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2$, 则有 $\hat{P}_0 > P_3$ 成立。注意到

此时 E_1 与 E_2 均不存在。当 $d\beta \leq [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r+k)]I_0^2$ 时,由推论2得到模型(1)最多存在3个地方病平衡点。

3 平衡点局部稳定性

首先,讨论 E_1 和 E_2 的稳定性。令

$$\begin{cases} \varphi(S, I) = A - dS - \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} + rI + kI + \beta \\ \psi(S, I) = \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} - (d+r+\epsilon)I - kI - \beta \end{cases},$$

可知式(2)的Jaccobi矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \varphi_s & \varphi_I \\ \psi_s & \psi_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d - \frac{\lambda I}{1+\alpha I} & -\frac{\lambda S}{(1+\alpha I)^2} + r + k \\ \frac{\lambda I}{1+\alpha I} & \frac{\lambda S}{(1+\alpha I)^2} - (d+r+\epsilon+k) \end{pmatrix}.$$

定理 3 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 是不稳定的.

证明: 由于在 $E_0(A/d, 0)$ 处的 Jaccobi 矩阵为 J

$$= \begin{pmatrix} -d & -\frac{\lambda A}{d} + r + k \\ 0 & \frac{\lambda A}{d} - (d+r+\epsilon+k) \end{pmatrix}, \text{ 故可得 } \operatorname{tr}(J(E_0)) =$$

$$= -d + \frac{\lambda A}{d} - (d+r+\epsilon+k), \det(J(E_0)) = -d \left[\frac{\lambda A}{d} - (d+r+\epsilon+k) \right], \text{ 由于 } \operatorname{tr}(J(E_0)) < 0 \text{ 等价于 } R_0 < 1 \text{ 且这时有 } \det(J(E_0)) > 0. \text{ 因此知当 } R_0 < 1 \text{ 时, } E_0 \text{ 是局部渐近稳定的. 又因为当 } R_0 > 1 \text{ 时, } \det(J(E_0)) < 0, \text{ 所以 } E_0 \text{ 是不稳定的.}$$

定理 4 若模型(1)的地方病平衡点 E_1 存在, 则 E_1 为一个鞍点.

证明: 在 $E_1\left(\frac{A-(d+\epsilon)I_1}{d}, I_1\right)$ 处的 Jaccobi 矩阵为

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(J(E_2)) &= -d - \frac{\lambda I_2}{1+\alpha I_2} + \frac{\lambda S_2}{(1+\alpha I_2)^2} - (d+r+\epsilon+k) \\ &= \frac{-2dac + b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] - [c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) + \beta a]\sqrt{\Delta}}{2ac(1+\alpha I_2^2)}, \end{aligned}$$

记

$$\varphi = -2dac + b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] - [c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) + \beta a]\sqrt{\Delta}, \text{ 若要 } \operatorname{tr}(J(E_2)) < 0, \text{ 只要 } \operatorname{tr} \sqrt{\Delta} > \frac{b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] - 2dac}{[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) + \beta a]}.$$

故若 $b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] \leq 2dac$, 则有 $\operatorname{tr}(J(E_2)) < 0$ 成立. 若 $b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] > 2dac$, 则要使 $\operatorname{tr}(J(E_2)) < 0$ 成立还需要满足

$$\Delta > \frac{\{b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] - 2dac\}^2}{[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) + \beta a]^2},$$

$$\begin{aligned} \text{即 } (b^2 - 4ac)[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) + \beta a]^2 - \{b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] - 2dac\}^2 > 0, \text{ 整理得} \\ 4d^2 a^2 c^2 < 2c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda)[\beta ab^2 - 4\beta a^2 b + \beta b^2 + 2dacb - 2ac^2(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda)] + \beta(\beta a^2 b^2 - 4a^3 \beta c - b^2 \beta - 4adcb). \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} -d - \frac{\lambda I_1}{1+\alpha I_1} & -\frac{\lambda S_1}{(1+\alpha I_1)^2} + r + k \\ \frac{\lambda I_1}{1+\alpha I_1} & \frac{\lambda S_1}{(1+\alpha I_1)^2} - (d+r+\epsilon+k) \end{pmatrix},$$

由于 $\det(J(E_1)) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{1+\alpha I_1} < 0$, 故若 E_1 存在, 则为鞍点. 证毕.

定理 5 假设地方病平衡点 E_2 存在,

a) 若有 $b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] \leq 2dac$ 或

$$\begin{cases} 2dac < b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] \\ 4d^2 a^2 c^2 < 2c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda)[\beta ab^2 - 4\beta a^2 c + \beta b^2 + 2dacb - 2ac^2(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda)] + \beta(\beta a^2 b^2 - 4a^3 \beta c - b^2 \beta - 4adcb) \end{cases}$$

则 E_2 是局部渐近稳定的.

b) 若有

$$\begin{cases} 2dac < b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda) - \beta] \\ 4d^2 a^2 c^2 > 2c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda)[\beta ab^2 - 4\beta a^2 c + \beta b^2 + 2dacb - 2ac^2(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda)] + \beta(\beta a^2 b^2 - 4a^3 \beta c - b^2 \beta - 4adcb) \end{cases}$$

则 E_2 是不稳定的.

证明: 由于在 $E_2\left(\frac{A-(d+\epsilon)I_2}{d}, I_2\right)$ 处的 Jaccobi 矩阵为

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} -d - \frac{\lambda I_2}{1+\alpha I_2} & -\frac{\lambda S_2}{(1+\alpha I_2)^2} + r + k \\ \frac{\lambda I_2}{1+\alpha I_2} & \frac{\lambda S_2}{(1+\alpha I_2)^2} - (d+r+\epsilon+k) \end{pmatrix},$$

$$\text{故 } \det(J(E_2)) = \frac{\sqrt{\Delta}}{1+\alpha I_2} > 0,$$

证毕.

类似地, 可以得到 E_3, E_4 的稳定性:

定理 6 若 E_3 存在, 则 E_3 为一个鞍点.

定理 7 若 E_4 存在,

a) 若有 $b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda) - m] \leq 2dac$, 或

$$\begin{cases} 2dac < b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda) - m] \\ 4d^2 a^2 c^2 < 2c(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda)[mab^2 - 4ma^2 c + mb^2 + 2dacb - 2ac^2(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda)] + m(ma^2 b^2 - 4a^3 mc - b^2 m - 4adcb) \end{cases}$$

则 E_4 是局部渐近稳定的.

b) 若有

$$\begin{cases} 2dac < b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda) - m] \\ 4d^2 a^2 c^2 > 2c(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda)[mab^2 - 4ma^2 c + mb^2 + 2dacb - 2ac^2(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda)] + m(ma^2 b^2 - 4a^3 mc - b^2 m - 4adcb) \end{cases}$$

则 E_4 是不稳定的.

4 平衡点全局性质

定理 8 无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的当且仅当下列两个条件之一成立:

a) $R_0 < 1$ 且 $\hat{P}_0 \geq 1$,

b) $R_0 < 1, \hat{P}_0 < 1$ 且 $P_3 \geq 1$ 。

证明: a) 由于 $P_0 > 1$, 故由定理 1 可知当 $R_0 < 1$ 时, E_1, E_2 不存在。若 $\hat{P}_0 \geq 1$, 由定理 2 可知当 $R_0 < 1$ 时, E_3, E_4 不存在。

b) 由 a) 知当 $R_0 < 1$ 时, E_1, E_2 不存在。若

$$dm > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2,$$

此时 $P_3 < P_2$, 则根据定理 2 的 b) 和 c) 知当 $R_0 > P_3$ 时, E_3, E_4 存在, 因为 $P_3 \geq 1$, 则 $R_0 > P_3$ 不可能成立, 故此时 E_3, E_4 不存在。

由此, 在定理 8 的条件下, 模型(1)不存在地方病平衡点。将模型(1)的两个方程相加有

$$\frac{d(S+I)}{dt} = A - dS - (d+\epsilon)I = A - d(S+I) - \epsilon I,$$

则

$$\frac{d(S+I)}{dt} \leq A - d(S+I),$$

解得

$$\begin{aligned} S(t) + I(t) &\leq (S(0) + I(0)) \frac{A - e^{-dt}}{d} \\ &\leq (S(0) + I(0)) \frac{A}{d}. \end{aligned}$$

故模型(1)的一切正解是最终有界的, 并且非负半 S 轴和非负半 I 轴均不是模型(1)的正解的正不变集。由定理 3 可知, 当 $R_0 < 1$ 时, E_0 是局部渐近稳定的。根据 Bendixson 定理可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 模型(1)的每个正解均趋向于 E_0 。证毕。

以下利用 Dulac 函数来证明模型(1)的极限环的不存在性。由于 Dulac 函数是应用于光滑的向量场, 所以当它应用于模型(1)时, 应该注意由模型(1)所定义的向量场在 $I = I_0$ 上是不光滑的。

引理 9 [4] 如果在一个单连通区域 R_+^2 内存在一个函数 D , 在 $I \neq I_0$ 时, D 满足:

a) D 是连续可微的,

b) $\frac{\partial(D\xi)}{\partial S} + \frac{\partial(D\tau)}{\partial I} < 0$,

则模型(1)不存在极限环。其中:

$$\begin{cases} \xi = A - dS - \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} + rI + h(I) \\ \tau = \frac{\lambda SI}{1+\alpha I} - (d+r+\epsilon)I - h(I) \end{cases}.$$

由引理 9, 可以得到:

定理 10 当 $\lambda A < (2d+\epsilon+r)d$ 时, 模型(1)不存在极限环。

证明: 从模型(1)的第一个方程可以看出模型(1)的所有正解都在 H 内, 其中: $H = \{(S, I) | 0 \leq S \leq \frac{A}{d}\}$ 。故若模型(1)存在极限环, 此极限环也必在其中。取 Dulac 函数如下:

$$D = \begin{cases} \frac{1}{SI}, & I \leq I_0 \\ \frac{1}{SI_0}, & I > I_0 \end{cases},$$

$$\text{当 } 0 < I < I_0 \text{ 时, } \frac{\partial(D\xi)}{\partial S} + \frac{\partial(D\tau)}{\partial I} = -\frac{1}{S^2 I}$$

$$\left[A + rI + kI + \left(\frac{\lambda S^2}{1+\alpha I} - \frac{\lambda S^2}{(1+\alpha I)^2} \right) \right] < 0.$$

当 $I > I_0$ 时,

$$\frac{\partial(D\xi)}{\partial S} + \frac{\partial(D\tau)}{\partial I} = \frac{1}{S^2 I_0} (-rI - m) +$$

$$\frac{1}{S^2 I_0} \left[-A + \frac{\lambda S^2}{(1+\alpha I)^2} - (d+r+\epsilon)S \right] \quad (12)$$

由于 $-rI - m < 0$, 当 $\lambda A < (2d+\epsilon+r)d$ 时, 有

$$\left[-A + \frac{\lambda S^2}{(1+\alpha I)^2} - (d+r+\epsilon)S \right] \leq \frac{A(-2d+\lambda A - dr - d\epsilon)}{d^2} < 0,$$

故可得: 当 $\lambda A < (2d+\epsilon+r)d$ 时, 式(12)为负, 从而可知模型(1)无极限环。证毕。

5 数值模拟

例 1 取 $d=1, \alpha=0.01, \epsilon=0.01, r=0.01, I_0=6, \lambda=0.01, \beta=0.01, m=10$ 。通过计算可知 $R_0 \approx 0.99 < 1, \hat{P}_0 < 1$, 由于 $dm > [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2$ (其中: $dm=10, [\lambda(d+\epsilon) + \alpha d(d+\epsilon+r)]I_0^2 \approx 0.7368$)。故由推论 1 知模型(1)发生了一个后向分支, 平衡点的后向分支数值模拟情况如图 1 所示。

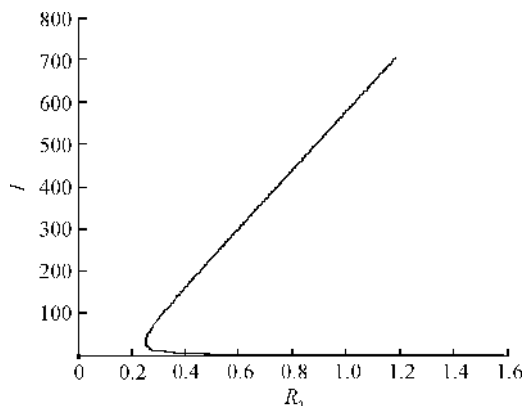


图 1 后向分支数值模拟图

例2 取 $a=1, b=1, c=1, d=1, \alpha=0.01, \epsilon=0.01, r=0.01, \lambda=0.01, \beta=0.01, I_0=6$, 故通过计算可以得到 $b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda)-\beta]=0.032, 2dac=2$ 。从而可得 $b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+ak+\lambda)-\beta] \leq 2dac$, 因此由定理5可知, 模型(1)存在局部稳定的地方病平衡点 E_2 , 其稳定性数值模拟结果如图2所示。

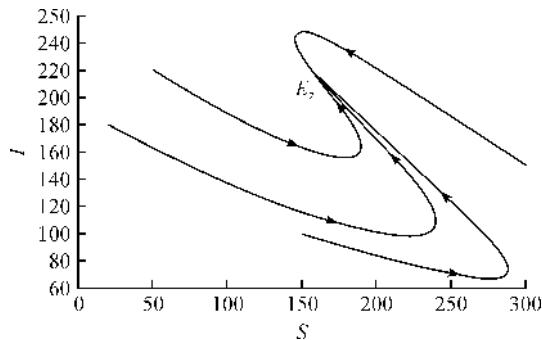


图2 地方病平衡点 E_2 的稳定性模拟结果

例3 取 $A=200, a=1, b=1, c=1, d=1, \alpha=0.01, \epsilon=0.01, r=0.01, \lambda=0.01, \beta=0.01, k=0.01, m=120, I_0=6$ 通过计算可知 $R_0 < 1$ 且 $\hat{P}_0 < 1$, 又因为 $dm - [\lambda(d+\epsilon) + ad(d+\epsilon+r+k)]I_0^2 \approx 119.2056 > 0$, 故由定理1可知 E_1, E_2 均不存在, 且根据推论1可得模型(1)存在不稳定的鞍点 E_3 。又因为 $2dac - b[c(2ad+ar+\alpha\epsilon+\lambda) - m] = 121.9698 > 0$ 。故由定理7的(a)可知模型(1)存在唯一的稳定地方病平衡点 E_4 , 其稳定性数值模拟结果如图3所示。

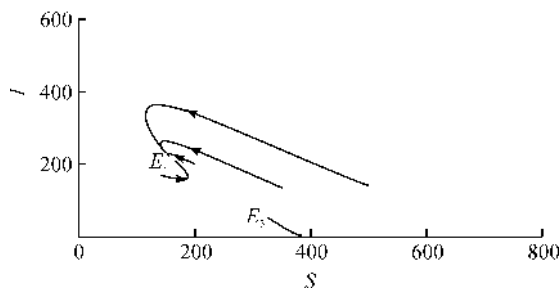


图3 地方病平衡点 E_3 的不稳定性和 E_4 的稳定性模拟结果

6 结论

本文主要研究了一类带有饱和发生率和线性饱和治疗函数的 SIS 传染病模型。该模型中治疗函数采用线性饱和治疗函数, 即: 当治疗能力没有达到最大时, 治疗率与感染者数量成正比; 否则, 采取最大治疗率。研究发现该模型至多存在4个平衡点, 并利用定性分析的方法得到了各个平衡点的稳定性。数值结果验证了理论结果的正确性。当基本再生数

小于1时, 若饱和治疗率较小, 常态预防能力过高或者采取最大治疗能力的时机过早, 模型发生后向分支。故应选择适当的饱和治疗率、一定的常态预防能力以及选择合适的时机采取最大治疗能力, 以避免后向分支的发生。

参考文献:

- [1] Kermack W O, McKendrick A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1927, 115:700-721.
- [2] Wei J J, Cui J A. Dynamics of SIS epidemic model with the standard incidence rate and saturated treatment function [J]. International Journal of Biomathematics, 2012, 5(3):1-18.
- [3] Hu Z X, Liu S, Wang H. Backward bifurcation of an epidemic model with standard incidence rate and treatment rate [J]. Nonlinear Mathematical Real World Applications, 2008, 9(5):2302-2312.
- [4] Capasso V, Serio G. A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model [J]. Mathematical Biosciences, 1978, 42:43-75.
- [5] 吴琼, 滕志东. 一类具有饱和发生率和治疗的 SIS 传染病模型的后向分支及动力学行为[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2014, 31(2):174-180.
- [6] 周康, 路秋英. 带有线性饱和治疗函数的 SIR 模型动力学研究[J]. 浙江理工大学学报, 2017, 37(6):874-880.
- [7] Khan MA, Khan Y, Islam S. Complex dynamics of an SEIR epidemic model with saturated incidence rate and treatment [J]. Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications, 2018(493):210-227.
- [8] Zhou T T, Zhang W P, Lu Q Y. Bifurcation analysis of an SIS epidemic model with saturated incidence rate and saturated treatment function [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 226(1):288-305.
- [9] Xiao D M, Ruan S G. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate [J]. Mathematical Biosciences, 2007, 208(2):419-429.
- [10] Ruan S G, Wang W D. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 188(1):135-163.
- [11] Liu W M, Levin S A, Iwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models [J]. Journal of Mathematical Biology, 1986, 23(2):187-204.
- [12] Wang W D, Ruan S G. Bifurcation in an epidemic model with constant removal rate of the infectives[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2004, 291(2):775-793.

- [13] Wang W D. Backward bifurcation of an epidemic model with treatment [J]. Mathematical Bioscience, 2006, 201:58-71. Journal of Mathematical Analysis & Application, 2008, 348(1):433-443.
- [14] Zhang X, Liu X N. Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function [J]. [15] Eckalbar J C, Eckalbar W L. Dynamics of an epidemic model with quadratic treatment [J]. Nonlinear Analysis Real Word Application, 2011, 12(1):320-332.

Research on dynamical behaviors of SIS epidemic model with saturation incidence and linear saturation therapy function

WANG Qing, LU Qiuying

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: An epidemic model with saturation incidence and abnormal preventive saturation therapy function was improved. The improved model has normal preventive capability and can better reflect real infectious disease prevention and treatment. Besides, the conclusions are more general. Qualitative theory and stability analysis were used to study the number of equilibrium points, the stability of equilibrium points and backward bifurcation. The result showed that the model has 4 equilibrium points at most. When the basic regeneration number is less than 1, if the saturation treatment rate is relatively small, normal prevention capacity is greater or the maximum treatment is taken early, backward bifurcation will happen.

Key words: therapy function; SIS epidemic model; backward bifurcation; equilibrium point

(责任编辑: 康 锋)