

广义可压缩杠杆方程的精确行波解

王 越,张丽俊

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要: 运用微分方程定性理论和动力系统分支方法研究了一类广义可压缩杠杆方程的有界行波解。再次说明了行波系统的奇直线对非线性波方程行波解光滑性的影响,奇直线的存在使得非线性波方程的行波解产生了奇异性。通过对奇异行波系统的与奇直线相交或趋于奇直线的轨道的分析,得到了该方程的奇异行波解。结果证明,广义可压缩杠杆方程具有光滑孤波解、光滑周期波解、孤立 peakon、周期 peakon、周期 cuspon 和 compacton。

关键词: 行波解;动力系统;分支理论;可压缩杠杆方程

中图分类号: O193

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2018)09-0624-06

0 引 言

非线性方程是描述自然现象的一种重要数学模型,对其行波解的研究是近年来非线性动力系统中的一个热点之一。为了研究非线性方程的行波解,人们已经提出了一些行之有效的方法,其中动力系统研究方法^[1-2]已经很好地应用于非线性方程行波解的研究中。本文主要运用动力系统的分支方法研究下列广义可压缩杠杆方程^[3-4]:

$$u_t - u_{txx} + \left(\frac{g(u)}{2} \right)_x = \gamma(2u_x u_{xx} + uu_{xxx}) \quad (1)$$

其中: g 是给定的 C^∞ 函数, γ 是与材料常数和杆的感应力有关的常数。当 $\gamma=1, g(u)=3u^2$ 时,方程(1)为 Camassa-Holm 方程^[5]:

$$u_t - u_{uxx} + 3uu_x + ku_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (2)$$

方程(2)具有双哈密顿结构、可积性、有无穷多个守恒律,且已经得到了方程(2)的周期解、孤波解、Peakon 等^[6-7]。当 $g(u)=3u^2, \gamma \in (-29.4760, 3.4174)$ 时,方程(1)为超弹性杆波方程^[5]。当 $\gamma=0, g(u)=3u^2$ 时,方程(1)为 Benjamin-Bona-Machony 方程^[3]。本文主要研究当 $\gamma=1, g(u)=3au^2+2ku(a \neq 0)$ 时,方程(1)的行波解。

为了研究方程(1)的行波解,首先令 $u(x, t) = u(\xi), \xi = x - ct$,并代入方程(1),再关于 ξ 积分一次并取积分常数为 0 可得:

$$\frac{1}{2}(u')^2 + (u-c)u'' + cu - \frac{1}{2}(3au^2 + 2ku) = 0 \quad (3)$$

本文通过研究常微分方程(3)参数 a, c 和 k 的分支和相图将得到方程(1)的各类行波解。

1 行波系统的分支与相图

令 $u' = v$,若 $u \neq c$,方程(3)可转化为平面系统

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{(3au^2 + 2ku) - 2cu - v^2}{2(u-c)} \end{cases} \quad (4)$$

$u=c$ 是系统(4)的奇直线。时间尺度变换 $d\xi = (u-c)d\eta$ 将系统(4)化为

$$\begin{cases} \frac{du}{d\eta} = 2(u-c)v \\ \frac{dv}{d\eta} = 3au^2 + 2(k-c)u - v^2 \end{cases} \quad (5)$$

其首次积分为

$$H(u, v) = (c-k-au)u^2 + (u-c)v^2 \quad (6)$$

系统(4)和系统(5)除奇直线 $u=c$ 外有相同的拓扑结构。本文仅考虑 $a < 0$ 和 $a > \frac{2}{3}$,当 a 为其他

情形时方程只有孤波解和周期波解。由动力系统的理论^[9]可知系统的分支曲线为:

$$C_1: k=c, C_2: c=0, C_3: k=-\frac{3a-2}{2}c, C_4: k=0.$$

1.1 $a > \frac{2}{3}$ 的情形

分支曲线把参数平面 (c, k) 分为八个区域:

$$D_1 = \{(c, k) | c > k > 0\},$$

$$D_2 = \{(c, k) | k > c > 0\},$$

$$D_3 = \{(c, k) | c < 0 < -\frac{3a-2}{2}c < k\},$$

$$D_4 = \{(c, k) | c < 0 < k < -\frac{3a-2}{2}c\},$$

$$D_5 = \{(c, k) | c < k < 0\},$$

$$D_6 = \{(c, k) | k < c < 0\},$$

$$D_7 = \{(c, k) | k < -\frac{3a-2}{2}c < 0 < c\},$$

$$D_8 = \{(c, k) | -\frac{3a-2}{2}c < k < 0 < c\}.$$

引理 1 令 $v_1 = (3a-2)c^2 + 2kc, u_1 = \frac{2(c-k)}{3a}$,

则系统(5)在每个参数区域和分支集上的奇点类型如下所示:

a) 当 $(c, k) \in D_1 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_8 \cup C_4$ 时, 系统(5)有鞍点 $(0, 0)$ 与 $(c, \pm\sqrt{v_1})$ 和中心 $(u_1, 0)$ 。

b) 当 $(c, k) \in D_2 \cup D_6$ 时, 系统(5)有鞍点 $(u_1, 0)$ 与 $(c, \pm\sqrt{v_1})$ 和中心 $(0, 0)$ 。

c) 当 $(c, k) \in D_3 \cup D_7$ 时, 系统(5)有鞍点 $(0, 0)$ 和 $(u_1, 0)$ 。

d) 当 $(c, k) \in C_1$ 时, 系统(5)有尖点 $(0, 0)$ 和鞍点 $(c, \pm\sqrt{3ac})$ 。

e) 当 $(c, k) \in C_2$ 且 $k \neq 0$ 时, 系统(5)有尖点 $(0, 0)$ 和鞍点 $(-\frac{2k}{3a}, 0)$ 。

f) 当 $(c, k) \in C_3$ 时, 系统(5)有尖点 $(c, 0)$ 和鞍

点 $(0, 0)$ 。

系统(5)的相图见图 1。

1.2 $a < 0$ 的情形

分支曲线把参数平面 (c, k) 分为八个区域:

$$D_1 = \{(c, k) | 0 < k < c < -\frac{3a-2}{2}c\},$$

$$D_2 = \{(c, k) | 0 < c < k < -\frac{3a-2}{2}c\},$$

$$D_3 = \{(c, k) | 0 < c < -\frac{3a-2}{2}c < k\},$$

$$D_4 = \{(c, k) | -\frac{3a-2}{2}c < c < 0 < k\},$$

$$D_5 = \{(c, k) | -\frac{3a-2}{2}c < c < k < 0\},$$

$$D_6 = \{(c, k) | -\frac{3a-2}{2}c < k < c < 0\},$$

$$D_7 = \{(c, k) | k < -\frac{3a-2}{2}c < c < 0\},$$

$$D_8 = \{(c, k) | k < 0 < c < -\frac{3a-2}{2}c\}.$$

引理 2 当 $a < 0$ 时, 系统(5)在每个参数区域和分支集上的奇点类型如下所示:

a) 当 $(c, k) \in D_1 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_8 \cup C_4$ 时, 系统(5)有鞍点 $(0, 0)$ 和中心 $(u_1, 0)$ 。

b) 当 $(c, k) \in D_2 \cup D_6$ 时, 系统(5)有鞍点 $(u_1, 0)$ 为鞍点和中心 $(0, 0)$ 。

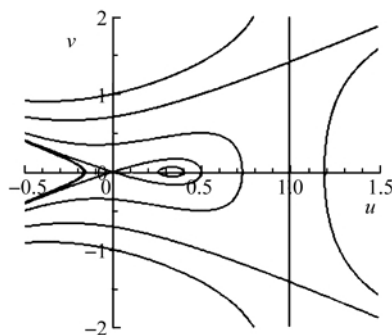
c) 当 $(c, k) \in D_3 \cup D_7$ 时, 系统(5)有中心 $(u_1, 0)$ 与 $(0, 0)$ 和鞍点 $(c, \pm\sqrt{v_1})$ 。

d) 当 $(c, k) \in C_1$ 时, 系统(5)仅有一个尖点 $(0, 0)$ 。

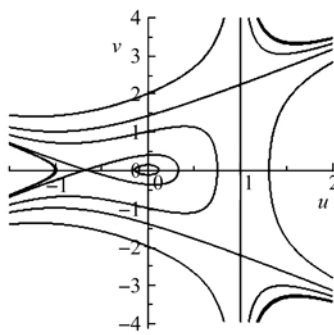
e) 当 $(c, k) \in C_2$ 且 $k \neq 0$ 时, 系统(5)有尖点 $(0, 0)$ 和中心 $(-\frac{2k}{3a}, 0)$ 。

f) 当 $(c, k) \in C_3$ 时, 系统(5)有尖点 $(c, 0)$ 和中心 $(0, 0)$ 。

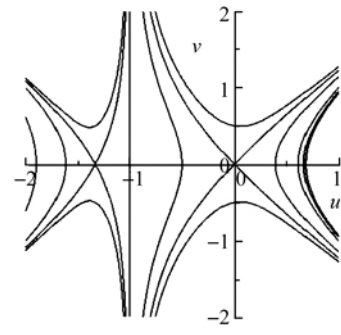
系统(5)的相图见图 2。



(a) $(c, k) \in D_1$



(b) $(c, k) \in D_2$



(c) $(c, k) \in D_3$

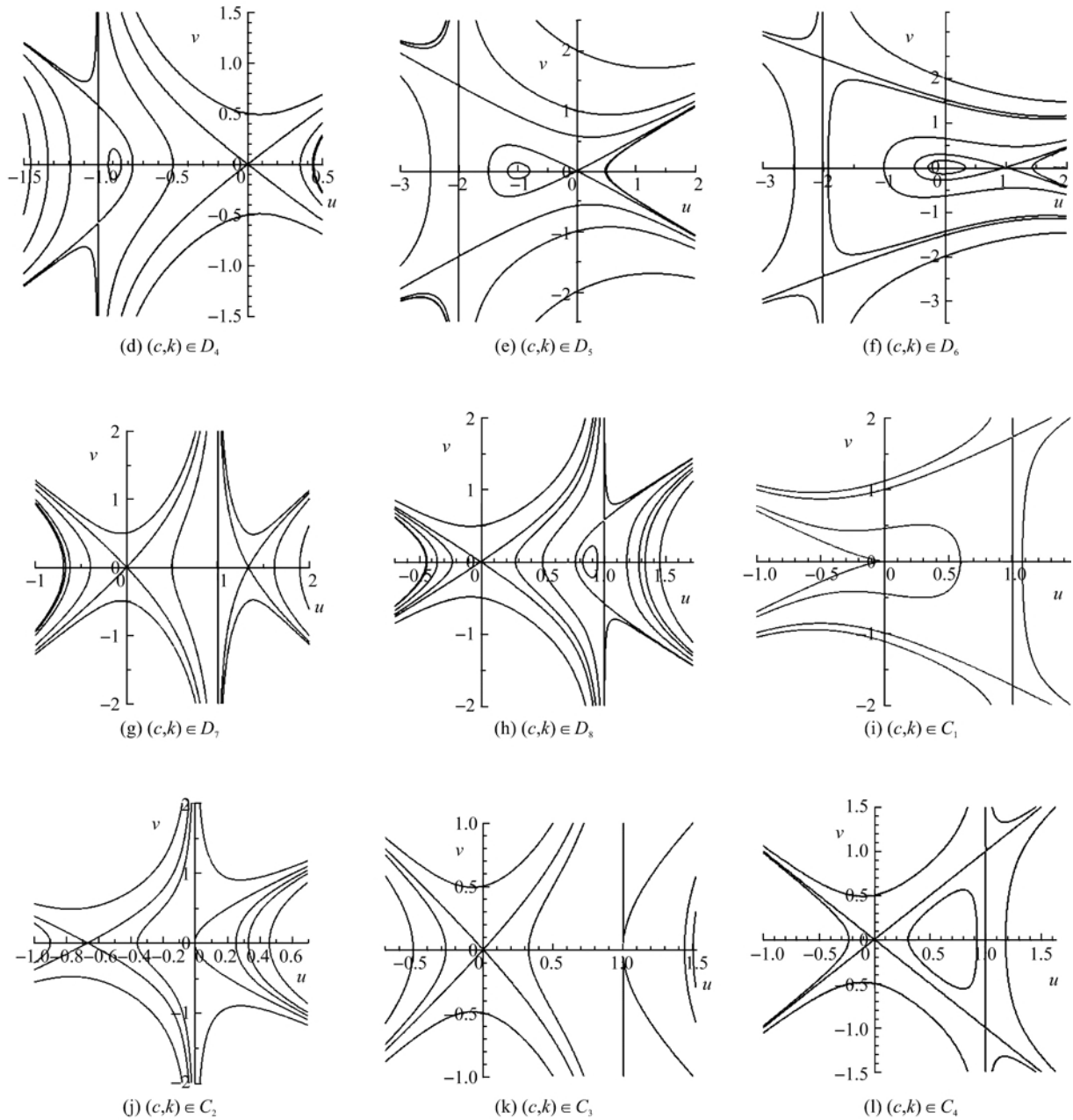
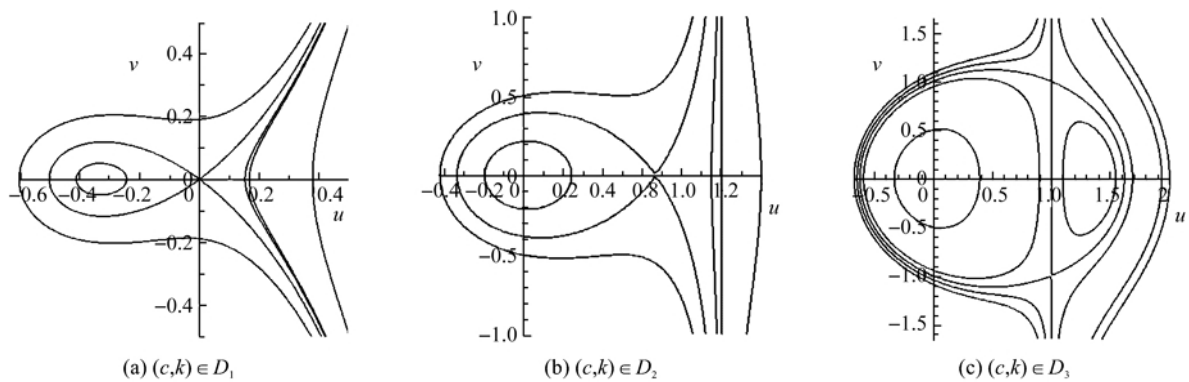
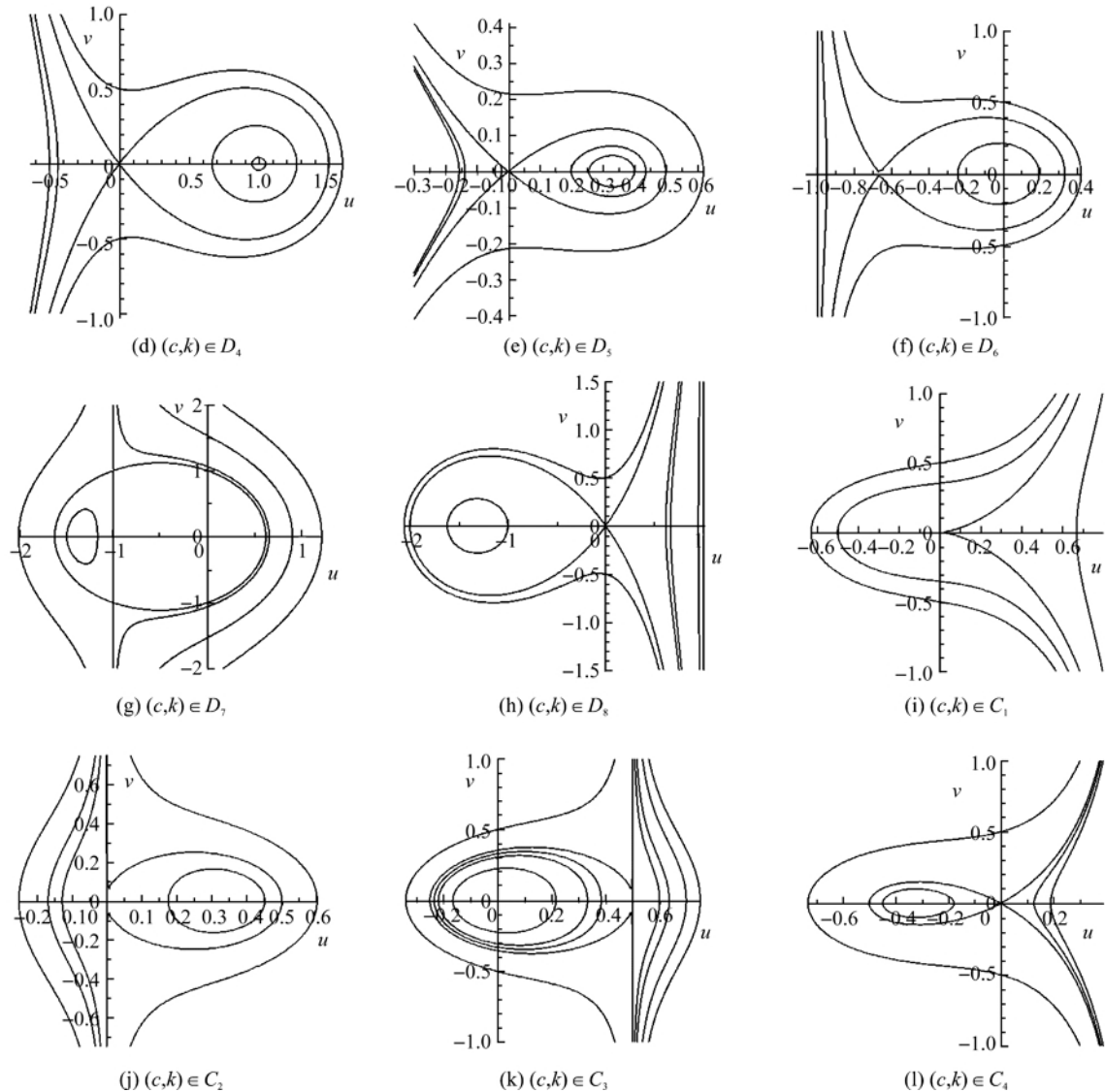


图1 当 $a > \frac{2}{3}$ 时, 系统(5)的相图



图2 当 $a < 0$ 时,系统(5)的相图

2 方程(1)的有界光滑行波解

注意 $u=c$ 为系统(4)的奇直线。众所周知,与奇直线不相交的轨线对应于方程的光滑行波解。在物理中令人感兴趣的光滑行波解一般是周期波、孤波、扭波或反扭波,它们分别对应于相图中的周期轨、同宿轨和异宿轨^[1]。系统(5)的轨道由下列方程确定

$$(c-k-au)u^2 + (u-c)v^2 = h \quad (7)$$

当 $u \neq c$ 时,方程(7)可以写成

$$v^2 = \frac{(au+k-c)u^2+h}{u-c} \quad (8)$$

令 $u_2 = \frac{c-k}{a}$ 和 $I(u; u_0, c, k, h) =$

$$\int_{u_0}^u \frac{\sqrt{u-c}}{\sqrt{(au+k-c)u^2+h}} du, \text{ 则在 } c, k \text{ 和 } h \text{ 给定时,}$$

$$I(u, u_0, c, k, h) = \pm \xi \quad (9)$$

是方程(1)的隐式解。

定理 1 当 $a > \frac{2}{3}$ 时,方程(1)有如下有界光滑行波解:

a) 当 $(c, k) \in D_1 ((c, k) \in D_5)$ 且 $h = H(u_0, 0)$ 时,若 $u_0 \in (u_1, u_2) (u_0 \in (u_2, u_1))$, 式(9)确定了方程(1)的周期行波解;若 $u_0 = u_2$, 则确定了方程(1)的孤波解。

b) 当 $(c, k) \in D_2 ((c, k) \in D_6)$ 且 $h = H(u_0, 0)$ 时,若 $u_0 \in \left(0, -\frac{1}{3}u_2\right) \left(u_0 \in \left(-\frac{1}{3}u_2, 0\right)\right)$, 式(9)确定了方程(1)的周期行波解;若 $u_0 = -\frac{1}{3}u_2$, 则确定了方程(1)的孤波解。

c) 当 $(c, k) \in D_4 \cup C_4 (c < 0) ((c, k) \in D_8 \cup C_4 (c > 0))$

且 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in (c, u_1) (u_0 \in (u_1, c))$, 式(9)确定了方程(1)的周期行波解。

定理 2 当 $a < 0$ 时, 方程(1)有如下的有界光滑行波解:

a) 当 $(c, k) \in D_1 \cup D_8 \cup C_4 (c > 0) ((c, k) \in D_4 \cup D_5 \cup C_4 (c < 0))$ 和 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in (u_2, u_1) (u_0 \in (u_1, u_2))$, 式(9)确定了方程(1)的周期行波解; 若 $u_0 = u_2$, 则确定了方程(1)的孤波解。

b) 当 $(c, k) \in D_2 ((c, k) \in D_6)$ 和 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in \left(-\frac{1}{3}u_2, 0\right) \left(u_0 \in \left(0, -\frac{1}{3}u_2\right)\right)$, 则式(9)确定了方程(1)的周期行波解; 若 $u_0 = -\frac{1}{3}u_2$, 则确定了方程(1)的孤波解。

c) 当 $(c, k) \in D_3 ((c, k) \in D_7)$ 和 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in (0, c) \cup (c, u_1) (u_0 \in (u_1, c) \cup (c, 0))$, 则式(9)确定了方程(1)的两族周期行波解。

d) 当 $(c, k) \in C_2$ 和 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in \left(0, -\frac{2k}{3a}\right)$, 式(9)确定了方程(1)的周期行波解。

e) 当 $(c, k) \in C_3$ 和 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in (0, c)$, 式(9)确定了方程(1)的周期行波解。

3 方程(1)的奇异行波解

定义 1 若 $u(\xi) \in H_{loc}^1(\mathbf{R})$ 且存在常数 h 和可数集 $\{t_k | t_k \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}, -\infty \leq t_{k-1} \leq t_k \leq \infty\}$ 使得在每个开集 (t_{k-1}, t_k) 上, $u(\xi)$ 为方程(8)的古典解, 且 $\lim_{\xi \rightarrow t_k} [(c-k-au)u^2 + (u-c)u'^2] = h$, 则称 $u(\xi) = u(x-ct)$ 是方程(1)的奇异行波解。

行波系统的与奇直线相交的有界轨道对应于奇异行波解。当 $u \neq c$ 时, 方程(8)可以写成

$$u'^2 = \frac{(au+k-c)u^2+h}{u-c} \quad (10)$$

若 $u(\xi) \in C^1(I)$ 且在 I 的任何子区间上不恒等于常数, 对方程(10)求导并代入方程(3)可知 $u(\xi)$ 必为方程(3)的解, 所以若 $u \neq c$, 方程(8)所定义的古典解 $u(\xi)$ 自然满足上面的定义。若 $u \rightarrow c$, 则解的奇异性将出现, 它对应于系统的渐近于或与奇直线相交的轨线。本节将解从 $C^1(\mathbf{R})$ 推广到 $H_{loc}^1(\mathbf{R})$, 推广方法参见文献[9-10]。

通过分析相图中趋于或与奇直线相交的轨线可得方程(3)的奇异行波解。令 $T = I(c; u_0, c, k, h)$, $u_{\pm} = \frac{(c-k-ac) \pm \sqrt{(c-k-ac)(c-a+3ac)}}{2a}$ 并假设 $u = p(\xi; u_0, c, k, h)$ 表示 $I(u, u_0, c, k, h) = \xi$ 确定

的函数, 则有定理 3 和定理 4。

定理 3 若 $a > \frac{2}{3}$, 方程(1)有下列有界行波解。

a) 当 $(c, k) \in D_4$ 且 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in (u_-, 0)$, 则

$$u(\xi) = \begin{cases} p(\xi; u_0, c, k, h), & 2nT < \xi \leq (2n+1)T \\ p(-\xi; u_0, c, k, h), & (2n-1)T < \xi \leq 2nT \end{cases} \quad (11)$$

是方程(1)的周期 cuspon; 若 $u_0 = u_-$ 且 $h = H(u_0, 0)$, 则式(11)是方程(1)的周期 peakon。

b) 当 $(c, k) \in D_8$ 且 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in (0, u_+)$, 则式(11)是方程(1)的周期 cuspon; 若 $u_0 = u_+$, 则式(11)是方程(1)的周期 peakon。

c) 当 $(c, k) \in C_4$ 时, $u(\xi) = ce^{-\sqrt{u_1}\xi}$ 是方程的孤立 peakon。

定理 4 若 $a < 0$, 方程(1)有如下的有界行波解。

a) 当 $(c, k) \in D_3 \cup D_7$ 且 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 \in (-\infty, u_-) \cup (u_+, +\infty)$, 则式(11)是方程(1)的周期 cuspon; 若 $u_0 = u_- (u_0 = u_+)$, 则式(11)是方程(3)的周期 peakon。

b) 当 $(c, k) \in C_2 ((c, k) \in C_3)$ 且 $h = H(u_0, 0)$ 时, 若 $u_0 = u_+ (u_0 = u_-)$, 则

$$u(\xi) = \begin{cases} p(\xi; u_0, c, k, h), & |\xi| < T \\ c, & |\xi| \geq T \end{cases} \quad (12)$$

是方程(1)的 compacton。

4 结 语

动力系统研究方法是研究非线性方程行波解的重要方法之一。本文运用这一方法研究其分支并得到广义可压缩杠杆方程在各种不同参数条件下的有界行波解, 包括光滑行波解和奇异行波解, 其中光滑行波解有光滑孤波解和周期波解, 奇异行波解有周期 cuspon、周期 peakon、孤立 peakon 和 compacton。本文研究的是取积分常数为零的特殊情形, 当积分常数不为零时, 方程中将出现四个参数, 从而研究其分支就更加困难, 对于一般的情形是否可以得到方程新类型的行波解, 将是下一步深入探讨的问题。

参考文献:

- [1] Li J B. Singular Nonlinear Traveling Wave Equations: Bifurcations and Exact Solutions[M]. Beijing: Science Press, 2013: 9-15.
- [2] Li J B, Liu Z R. Travelling wave solutions for a class of nonlinear dispersive equations[J]. Chinese Annals of

- Mathematics, Series B, 2002, 23(3):397-418.
- [3] Dai H H. Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod[J]. Acta Mechanica, 1998, 127(4):193-207.
- [4] Dai H H, Huo Y. Solitary shock waves and other travelling waves in a general compressible hyperelastic rod[J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 2000, 456(1994):331-363.
- [5] Camassa R, Holm D D. An integrable shallow water equation with peaked solitons[J]. Physical Review Letters, 1993, 71(11):1661-1664.
- [6] Alber M S, Camassa R, Holm D D, et al. The geometry of peaked solitons and billiard solutions of a class of integrable PDE's[J]. Letters in Mathematical Physics, 1994, 32(2):137-151.
- [7] Cao C, Holm D D, Titi E S. Traveling wave solutions for a class of one-dimensional nonlinear shallow water wave models[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2004, 16(1):167-178.
- [8] Chow S N, Hale J K. Method of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer, 1981:20-25.
- [9] Geyer A, Mañosa V. Singular solutions for a class of traveling wave equations arising in hydrodynamics[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2016, 31: 57-76.
- [10] Lenells J. Classification of travelling waves for a class of nonlinear wave equations[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2006, 18(2):381-391.

The accurate traveling wave solution to a generalized compressible lever equation

WANG Yue, ZHANG Lijun

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The bounded traveling wave solutions to a generalized compressible lever equation are studied with qualitative theory of differential equation and dynamical system bifurcation theory. The effect of the singular line of traveling wave system on the smoothness of traveling wave solutions to the nonlinear wave equation is illustrated again. The existence of the singular line leads to the singularity of the traveling wave solution to the nonlinear wave equation. The singular wave solutions are obtained via analysis of the orbits intersecting with or approaching the singular line. The results show that the generalized compressible lever equation has smooth solitary wave solutions, smooth periodic wave solutions, solitary peakons, periodic peakons, periodic cuspons and compacton as well.

Key words: traveling wave solution; dynamical system; bifurcation theory; compressible lever equation

(责任编辑:康 锋)