浙江理工大学学报(自然科学版),第 39 卷,第 5 期,2018 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 39, No. 5, Sep. 2018

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2018.05.016

含有 2 的幂次的 Euler 和的研究

陈　瑶,王伟平
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要:利用生成函数及特殊函数的积分,建立含有 2^n 的 Euler 和与交错 Euler 和的关系,并系统地得到一些含有 2^n 的 Euler 和的值。结果表明:权 2,3 的含有 2^n 的 Euler 和可以用 zeta 值表示;权 4 的含有 2^n 的 Euler 和可以用 $\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$、$\ln(2)$及 zeta 值表示;权 5 的两个含有 2^n 的 Euler 和 $S_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{1^22,1}\left(\frac{1}{2}\right)$可以分别用 $\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)$、$\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$、$\ln(2)$及 zeta 值表示。

关键词:调和数;生成函数;Euler 和
中图分类号:O157.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2018) 09-0619-05

0 引　言

广义调和数的定义为

$$H_0^{(p)}=0,\quad H_n^{(p)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^p},\quad n,p=1,2,\cdots.$$

当 $p=1$ 时为经典的调和数,用 H_n 表示。

设 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 为正整数,且 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_m$,$x\in[-1,1)$,记

$$S_{p_1p_2\cdots p_m,q}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(p_1)}H_n^{(p_2)}\cdots H_n^{(p_m)}}{n^q}x^n,$$

称 $p_1+\cdots+p_m+q$ 为 $S_{p_1p_2\cdots p_m,q}(x)$ 的权。为方便起见,类似整数分拆的记法,将重复的数字用幂的形式来表示,例如,

$$S_{1^22^34,p}(x)=S_{112224,p}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2(H_n^{(2)})^3H_n^{(4)}}{n^p}x^n.$$

在 $S_{p_1p_2\cdots p_m,q}(x)$ 中令 $x=1$,就得到经典的 Euler 和 $S_{p_1p_2\cdots p_m,q}$。Berndt[1] 指出,Euler 和的研究起源于 1742 年,在与 Goldbach 的通信中,Euler 首先考虑了线性和

$$S_{p,q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(p)}}{n^q},\quad p\geqslant1,\quad q\geqslant2,$$

并得出很多结果。例如,Euler 指出当 $q\geqslant2$ 时,$S_{1,q}$ 可以用 zeta 值表示:

$$S_{1,q}=\left(1+\frac{q}{2}\right)\zeta(q+1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-2}\zeta(k+1)\zeta(q-k),$$

其中 zeta 值就是 Riemann zeta 函数 $\zeta(s)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^s}$ 在正整数处的值。Euler 还指出当 $p=q$,$p+q$ 为奇数,$(p,q)=(2,4)$ 或 $(4,2)$ 时,线性和 $S_{p,q}$ 可以用 zeta 值表示。之后,Euler 和的研究受到很多著名数学家的关注。例如,Baliey 等[2] 利用 PSLQ 算法进行数值计算,得到很多 Euler 和的表达式。Borwein 等[3] 研究了二次 Euler 和 $S_{1^2,q}$ 与 $S_{2,q}$ 的关系。Flajolet 等[4] 利用 Contour 积分与留数计算得到了几类 Euler 和的表达式。近年来,Euler 和的研究又取得了很大的进展。Xu 等[5] 基于对 Tornheim 型级数的计算提出了一种计算非线性 Euler 和的方法,进而得到一些二次与三次 Euler 和的表达式。Xu[6] 通过多重积分,建立了非线性 Euler 和与多重 zeta 值的关系,得到了很多 Euler 和。Wang 等[7] 利用 Bell 多项式、生成函数以及特殊函数的积分,建立了许多混合 Euler 和与 Stirling 和,并提出了计算未知 Euler 和

收稿日期:2018－04－04　　网络出版日期:2018－05－09
基金项目:国家自然科学基金项目(11671360)
作者简介:陈　瑶(1994－),女,河南安阳人,硕士研究生,主要从事组合数学方面的研究。
通信作者:王伟平,E-mail:wpingwang@zstu.edu.cn

的算法。

在 $S_{p_1p_2\cdots p_m,q}(x)$ 中令 $x=-1$,得到交错 Euler 和;令 $x=\frac{1}{2}$,得到含有 2^n 的 Euler 和。关于这两种形式的 Euler 和的研究工作也有很多。Doelder[8] 通过多对数函数及对数函数的积分,研究了 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^q}(\psi(k)-\psi(1))^p$,其中:$p=1,2;q=1,2,3;\psi(x)$ 为 digamma 函数,$\psi(x)=\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},\psi(k)-\psi(1)=H_{k-1}$. Doelder 在上述无穷级数中令 $x=-1$ 及 $x=\frac{1}{2}$ 得到几个交错的 Euler 和与含有 2^n 的 Euler 和。Choi 等[9] 利用 Kummer 求和公式得到 6 个含有 2^n 的 Euler 和,例如,$S_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{1^2,2}\left(\frac{1}{2}\right)$ 与 $S_{2,2}\left(\frac{1}{2}\right)$。Xu 等[10-11] 利用特殊函数积分、Stirling 数、Bell 多项式以及 Dirichlet 级数得出了很多交错 Euler 和及一些其他形式的级数。

本文主要研究含有 2^n 的 Euler 和,并通过生成函数及特殊函数积分系统地计算出一些低阶的含有 2^n 的 Euler 和的值。

1 一些引理

引理 1 当 $k\geqslant 1$ 时,第一类无符号 Stirling 数满足如下生成函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{t^n}{n!}=\frac{(-1)^k}{k!}\ln^k(1-t) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{t^n}{n\cdot n!}=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j+1)!}\ln^{k-j+1}(1-t)\mathrm{Li}_j(1-t)+\zeta(k+1) \tag{2}$$

其中 $\mathrm{Li}_p(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ 为多对数函数。

引理 1 中(1) 即为第一类无符号 Stirling 数的指数型生成函数。Wang 等[7] 在(1) 的基础上通过积分进一步得到生成函数(2)。利用第一类无符号 Stirling 数与 Bell 多项式的关系[7]:

$$\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}=(-1)^k\frac{n!}{k!}Y_k(-0!H_n^{(1)},-1!H_n^{(2)},\cdots,-(k-1)!H_n^{(k)}),$$

可以将(1) 和(2) 改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\widetilde{Y}_{k-i-1}(n)}{(k-i-1)!n^{i+1}}t^n=\frac{(-1)^k}{k!}\ln^k(1-t) \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\widetilde{Y}_{k-i-1}(n)}{(k-i-1)!n^{i+2}}t^n=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j+1)!}\ln^{k-j+1}(1-t)\mathrm{Li}_j(1-t)+\zeta(k+1) \tag{4}$$

其中 $\widetilde{Y}_k(n)=Y_k(-0!H_n^{(1)},-1!H_n^{(2)},\cdots,-(k-1)!H_n^{(k)})$,$Y_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 为指数型完全 Bell 多项式

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}x_m\frac{t^m}{m!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}Y_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)\frac{t^k}{k!}.$$

当 $t=\frac{1}{2}$ 时,由(3) 和(4) 可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\widetilde{Y}_{k-i-1}(n)}{(k-i-1)!n^{i+1}\cdot 2^n}=\frac{\ln^k(2)}{k!} \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\widetilde{Y}_{k-i-1}(n)}{(k-i-1)!n^{i+2}\cdot 2^n}=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{-\ln^{k-j+1}(2)}{(k-j+1)!}\mathrm{Li}_j\left(\frac{1}{2}\right)+\zeta(k+1) \tag{6}$$

由(5) 和(6) 可以进一步得到含有 2^n 的 Euler 和的关系式。

此外,Wang 等[7] 利用序列(H_n) 及($H_n^{(r)}$) 的生成函数得到 $\left(\frac{H_n^2}{n^2}\right)$ 及 $\left(\frac{H_n^{(r)}}{n}\right)$ 的生成函数。

引理 2 序列 $\left(\frac{H_n^2}{n^2}\right)$ 以及序列 $\left(\frac{H_n^{(r)}}{n}\right)$ 满足如下生成函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}t^n=\mathrm{Li}_4(t)+\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2^2(t)-\frac{1}{3}\ln^3(1-t)\ln(t)-\ln^2(1-t)\mathrm{Li}_2(1-t)+2\ln(1-t)\mathrm{Li}_3(1-t)-2\mathrm{Li}_4(1-t)+2\zeta(4) \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(r)}}{n}t^n=(r+1)\mathrm{Li}_{r+1}(t)-\mathrm{Li}_r(t)\ln(1-t)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^r}t^n-\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(j)}}{n^{r-j+1}}t^n \tag{8}$$

在(8) 中令 $t=\frac{1}{2}$,可得

$$S_{r,1}\left(\frac{1}{2}\right)=(r+1)\mathrm{Li}_{r+1}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Li}_r\left(\frac{1}{2}\right)\ln(2)-S_{1,r}\left(\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{r-1}S_{j,r-j+1}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

再令 r 取特殊值也可得到含有 2^n 的 Euler 和的关系式。

最后,Choi 等[9] 利用 Kummer 求和公式得到两个含有 2^n 的无穷级数的表达式。

引理 3 设 $k\geqslant 0$ 为整数,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_k}{n\cdot 2^n}=(-1)^k\frac{2^k-1}{2^k}\zeta(k+1) \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_k}{n^2\cdot 2^n}=(-1)^{k+1}\frac{2^k-1}{2^k}\zeta(k+1)\ln(2)+\frac{(-1)^k}{2}(k+1)\zeta(k+2)+\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{k-1}(2^i-1)(2^{k-i}-1)\zeta(i+1)\zeta(k-i+1)\tag{11}$$

其中 p_k 满足以下递推关系：

$$p_0=1,\quad p_1=-H_n,$$

$$(k+1)p_{k+1}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}H_n^{(i+1)}p_{k-i}.$$

2　权 2,3,4 的含有 2^n 的 Euler 和的计算

利用上述引理可以系统地得到权 2,3,4 的含有 2^n 的 Euler 和的值。

定理 1　权为 2,3 的 4 个含有 2^n 的 Euler 和可以用 zeta 值表示。

证明　权为 2,3 的 4 个含有 2^n 的 Euler 和为 $S_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{1^2,1}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)$与 $S_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)$。在(5)中,令 $k=2$ 得 $S_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln^2(2)$,即 $S_{1,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\zeta(2)$。在(5)中令 $k=3$,在(6)和(10)中令 $k=2$,可以得到

$$\frac{1}{2}S_{1^2,1}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}S_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)-S_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\ln^3(2),$$

$$S_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln^3(2)-\ln(2)\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)+\zeta(3),$$

$$\frac{1}{2}S_{1^2,1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}S_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\zeta(3).$$

解以上三个线性方程构成的方程组可以得到权 3 的所有 Euler 和：

$$S_{1^2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}\zeta(3),\ S_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)=\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(2)\ln(2),$$

$$S_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}\zeta(3).$$

定理 2　权 4 的 6 个含有 2^n 的 Euler 和可以用 $\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$、$\ln(2)$ 及 zeta 值表示。

证明　权 4 的 6 个含有 2^n 的 Euler 和为 $S_{1^3,1}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{1^2,2}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{1,3}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{12,1}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{2,2}\left(\frac{1}{2}\right)$与 $S_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)$。在(5)中令 $k=4$,可以得到

$$\frac{1}{3}S_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}S_{12,1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}S_{1^3,1}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}S_{2,2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}S_{1^2,2}\left(\frac{1}{2}\right)+S_{1,3}\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}\ln^4(2).$$

类似地,在(6)和(10)中令 $k=3$,在(11)中令 $k=2$ 可以得到另外 3 个方程。

除此之外,在(7)中令 $t=\frac{1}{2}$,在(9)中令 $r=3$,可以得到

$$S_{1^2,2}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2\cdot 2^n}=-\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{37}{16}\zeta(4)-\frac{7}{4}\zeta(3)\ln(2)+\frac{1}{4}\zeta(2)\ln^2(2)-\frac{1}{24}\ln^4(2),$$

$$S_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)=4\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)\ln(2)-2S_{1,3}\left(\frac{1}{2}\right)-S_{2,2}\left(\frac{1}{2}\right).$$

解以上线性方程组可以得到权 4 的所有 Euler 和：

$$S_{1^3,1}\left(\frac{1}{2}\right)=-5\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{25}{4}\zeta(4)-\frac{35}{8}\zeta(3)\ln(2)+\frac{5}{4}\zeta(2)\ln^2(2)-\frac{5}{24}\ln^4(2),$$

$$S_{1^2,2}\left(\frac{1}{2}\right)=-\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{37}{16}\zeta(4)-\frac{7}{4}\zeta(3)\ln(2)+\frac{1}{4}\zeta(2)\ln^2(2)-\frac{1}{24}\ln^4(2),$$

$$S_{1,3}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\zeta(4)-\frac{1}{8}\zeta(3)\ln(2)+\frac{1}{24}\ln^4(2),$$

$$S_{12,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\zeta(4)+\frac{7}{8}\zeta(3)\ln(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)\ln^2(2)+\frac{1}{24}\ln^4(2),$$

$$S_{2,2}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\zeta(4)+\frac{1}{4}\zeta(3)\ln(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)\ln^2(2)+\frac{1}{24}\ln^4(2),$$

$$S_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{16}\zeta(4)+\frac{7}{8}\zeta(3)\ln(2)-\frac{1}{4}\zeta(2)\ln^2(2)+\frac{1}{24}\ln^4(2).$$

3　含有 2^n 的 Euler 和与交错 Euler 和的关系

Xu[12] 通过以下积分定义了序列$(Y_k(n))$：

$$Y_k(n)=(-1)^k n\int_0^1(-1)^{n-1}\ln^k(1-x)\mathrm{d}x.$$

该序列满足如下递推公式：

$$Y_0(n)=1,$$

$$Y_k(n)=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}(k-j-1)!H_n^{(k-j)}Y_j(n).$$

利用序列$(Y_k(n))$可以建立含有 2^n 的 Euler 和与交错 Euler 和的关系。

定理 3 对于正整数 k，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(m+1)}}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{m!}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_m(n)}{n^2}(-1)^{n-1}.$$

证明 考虑积分 $I(m)=\int_0^1\frac{\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)\ln^m x}{1-x}\mathrm{d}x$。一方面，将 $\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$展开并计算所得积分有

$$\begin{aligned}I(m)&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}\int_0^1\frac{x^n\ln^m x}{1-x}\mathrm{d}x\\&=(-1)^{m+1}m!\zeta(m+1)\ln(2)+\\&\quad(-1)^m m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(m+1)}}{n\cdot 2^n}\end{aligned}\tag{12}$$

另一方面，直接做变量替换 $x\to 1-t$ 可得

$$\begin{aligned}I(m)&=\int_0^1\frac{\ln\left(\frac{1+t}{2}\right)\ln^m(1-t)}{t}\mathrm{d}t\\&=(-1)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_m(n)}{n^2}(-1)^{n-1}+\\&\quad\ln(2)\cdot(-1)^{m+1}m!\zeta(m+1)\end{aligned}\tag{13}$$

结合(12)和(13)可以得到结果。

推论 1 含有 2^n 的 Euler 和 $S_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right)$、$S_{1^22,1}\left(\frac{1}{2}\right)$可以由 $\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)$、$\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$、$\ln(2)$ 及 zeta 值表示：

$$\begin{aligned}S_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3+3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n^2}(-1)^{n-1}\\&=-\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)\ln(2)+\frac{27}{32}\zeta(5)+\\&\quad\frac{7}{16}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{7}{16}\zeta(3)\ln^2(2)+\\&\quad\frac{1}{6}\zeta(2)\ln^3(2)-\frac{1}{30}\ln^5(2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{1^22,1}\left(\frac{1}{2}\right)&=3\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)+3\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)\ln(2)-\frac{31}{32}\zeta(5)-\\&\quad\frac{7}{16}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{21}{16}\zeta(3)\ln^2(2)-\\&\quad\frac{1}{12}\zeta(2)\ln^3(2)+\frac{1}{10}\ln^5(2).\end{aligned}$$

证明 在定理 3 中令 $k=3$，再结合[10]中交错 Euler 和的值即可得到 $S_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right)$。再令(5)中的 $k=5$，令(6)，(10)中的 $k=4$，可以得到

$$\begin{aligned}S_{1^22,1}\left(\frac{1}{2}\right)+S_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right)&=-\frac{1}{8}\zeta(5)+\frac{1}{15}\ln^5(2)-\\&\quad\frac{1}{3}\zeta(2)\ln^3(2)+\frac{7}{8}\zeta(3)\ln^2(2)+\\&\quad2\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)\ln(2)+2\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

进而可以解出 $S_{1^22,1}\left(\frac{1}{2}\right)$。

4 结 论

本文利用生成函数的方法得到权 2，3，4 的所有含有 2^n 的 Euler 和，并利用特殊函数积分的方法建立含有 2^n 的 Euler 和与交错 Euler 和的关系，由此计算出两个权 5 的含有 2^n 的 Euler 和。笔者将在后续的研究中利用生成函数、特殊函数积分，建立更多的含有 2^n 的 Euler 和与交错 Euler 和的关系，得到足够多的方程，由此求解出所有权 5、6 的含有 2^n 的 Euler 和。

参考文献：

[1] Berndt B C. Ramanujan's Notebooks. Part I[M]. New York：Springer-Verlag，1985.
[2] Bailey D，Borwein J，RolandGirgensohn. Experimental evaluation of Euler sums[J]. Experimental Mathematics，1994，3(1)：17-30.
[3] Borwein D，Borwein J M. Explicit evaluation of Euler sums[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society，1995，38(2)：277-294.
[4] Flajolet Philippe，Salvy Bruno. Euler sums and contour integral representations[J]. Experimental Mathematics，1998，7(1)：15-35.
[5] Xu C，Li Z. Tornheim type series and nonlinear Euler sums[J]. Journal of Number Theory，2017，174：40-67.
[6] Xu C. Multiple zeta values and Euler sums[J]. Journal of Number Theory，2017，177：443-478.
[7] Wang W，Lü Y. Euler sums and Stirling sums[J]. Journal of Number Theory，2018，185：160-193.
[8] Doelder P J D. On some series containing ψ(x)-ψ(y) and (ψ(x)-ψ(y))^2 for certain values of x and y[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，1991，37(1-3)：125-141.
[9] Choi J，Srivastava H M. Explicit evaluation of Euler and related sums[J]. Ramanujan Journal，2005，10(1)：51-70.
[10] Xu C. Some formulas of Dirichlet series[EB/OL].

(2017-08-01)[2018-04-04]. https://www.researchgate.net/publication/319182409.

[11] Xu C, Cai Y. On harmonic numbers and nonlinear Euler sums[EB/OL]. (2001-12-19)[2002-04-15]. http://adsabs.harvard.edu/abs/2016arXiv160904924X.

[12] Xu C, Yan Y, Shi Z. Euler sums and integrals of polylogarithm functions[J]. Journal of Number Theory, 2016,165:84-108.

Studies on Euler sums with power of 2

CHEN Yao, *WANG Weiping*

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In this paper, generating functions and integrals of special functions are used to establish a relation between the Euler sums with 2^n and the alternating Euler sums, and some special Euler sums with power of 2 are obtained systematically. The results show that the Euler sums with 2^n of weights 2, 3 can be expressed with zeta values. The Euler sums with 2^n of weight 4 can be expressed with $\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$, $\ln(2)$ and zeta values. The two Euler sums with 2^n of weight 5, $S_{4,1}\left(\frac{1}{2}\right)$ and $S_{1^2 2,1}\left(\frac{1}{2}\right)$ can be expressed with $\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$, $\ln(2)$ and the zeta values.

Key words: harmonic numbers; generating functions; Euler sums

(责任编辑:康　锋)