浙江理工大学学报(自然科学版),第 39 卷,第 1 期,2018 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 39, No. 1, Jan. 2018

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2018.01.020

加权差异测度与模糊推理的鲁棒性分析

王　龙,裴道武
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要:针对差异测度概念的缺陷,提出了加权差异测度的概念。基于加权差异测度分析了模糊集运算的扰动性,给出了相应的扰动参数。进一步利用加权差异测度分析了模糊推理中两种重要方法的鲁棒性。这些研究结果推广了基于差异测度得出的相关结论,为模糊推理的鲁棒性分析提供了更多的依据。

关键词:模糊推理;差异测度;鲁棒性;CRI 算法;三 I 算法
中图分类号:TS195.644　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2018) 01-0120-05

0　引　言

对于 FMP(Fuzzy modus ponens)和 FMT(Fuzzy modus tollens)这两种模糊推理形式,Zadeh[1] 提出了合成推理算法(简称 CRI 算法)。鉴于 CRI 算法缺乏严格的逻辑基础,王国俊[2] 提出了全蕴涵三 I 算法(简称三 I 算法)。Ying 等[3] 提出了模糊集最大扰动和平均扰动的概念,分析了模糊推理算法的最大和平均扰动参数。戴松松等[4] 提出了相对扰动的概念,并利用相对扰动的概念分析了 CRI 算法的鲁棒性。Wang 等[5] 比较了由不同类型测度诱导的 δ 等价的概念。Jin 等[6] 也研究了基于逻辑等价测度模糊集的扰动。

Montes 等[7] 提出了一种差异函数的概念来度量模糊集之间的距离。之后,Li 等[8] 基于不相似函数和模糊等价提出了两种构造差异测度的方法。在这两种构造差异测度的基础上,Li 等[9] 用不相似函数构造出差异测度的公式,并延拓了模糊集之间的扰动性,分析了 CRI 算法的鲁棒性。但在实际应用过程中可以发现,Li 等[9] 构造出的差异测度并不能充分地利用所有的信息,即会导致部分信息的缺失。针对这一问题,本文提出了加权差异测度的概念,并与已有的差异测度概念作了比较。同时,在加权差异测度的基础上,研究了 CRI 算法和三 I 算法的鲁棒性。本文推广了文献[9]中的相关结论。

1　加权差异测度

本文中,$\boldsymbol{X}$ 表示论域,论域 $\boldsymbol{X}$ 上所有分明集组成的集合记作 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$,论域 $\boldsymbol{X}$ 上的所有模糊集组成的集合记作 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$。

映射 $I:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 称为模糊蕴涵,简称蕴涵,如果 I 关于第一变元不增,第二变元不减,且满足 $I(0,0)=I(0,1)=I(1,1)=1$ 和 $I(1,0)=0$。文献中 $I(x,y)$ 也简写为 $x\rightarrow y$,其中 $x,y\in[0,1]$。

映射 $T:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$ 称为 t-模,如果 T 是结合的,交换的,单调的,并且满足条件 $T(1,a)=a(0\leqslant a\leqslant 1)$。t-模 T 是左连续的,如果 $T(a,\sup x_i)=\sup T(a,x_i)$,$i\in\boldsymbol{E}$ 成立,这里 $\boldsymbol{E}$ 为任意指标集,$x_i\in[0,1]$。

t-模 T 的剩余是函数 $R:[0,1]^2\rightarrow[0,1]$,对 $x,y\in[0,1]$,$R(x,y)=\sup\{\alpha\in[0,1]\mid T(x,\alpha)\leqslant y\}$。t-模的剩余是蕴涵,称为 R-蕴涵。t-模 T 的双剩余

收稿日期:2017－07－13　　网络出版日期:2017－11－09
基金项目:国家自然科学基金项目(11171308,61379018,61472471)
作者简介:王　龙(1993－),女,湖北随州人,硕士研究生,主要从事模糊数学方面的研究。
通信作者:裴道武,E-mail:peidw@163.com

是函数 $E_T:[0,1]^2\to[0,1]$，对 $x,y\in[0,1]$，$E_T(x,y)=\min(R(x,y),R(y,x))$。

下述差异测度的概念是本文重点关注的内容。

定义 1[8]　函数 $D:\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\to[0,\infty)$ 称为差异测度，如果 D 满足以下条件：

(D1) $D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=D(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$ 对任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$；

(D2) $D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=0$ 对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$；

(D3) 对任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$，如果 $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}$，则 $\max(D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}),D(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}))\leqslant D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$；

(D4) $D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant D(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^c)$ 对任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$，$\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$，其中 $\boldsymbol{P}^c$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 的补集。

定义 2[9]　二元函数 $d:[0,1]^2\to[0,1]$ 称为不相似函数，如果 d 满足以下条件：

(d1) $d(x,y)=d(y,x)$，$x,y\in[0,1]$；

(d2) $d(x,x)=0$，$x\in[0,1]$；

(d3) $d(1,0)=1$；

(d4) 对任意 $x,y,z\in[0,1]$，如果 $x\leqslant y\leqslant z$，则 $\max(d(x,y),d(y,z))\leqslant d(x,z)$。

如果由 t-模 T 的双剩余 E_T 按照 $d_T=1-E_T$ 诱导的不相似函数 d_T 是 $[0,1]$ 上的度量，文献中称 d_T 为 DF-度量[9]。

命题 3[9]　设论域 $\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$d$ 为不相似函数，对任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$，定义 D 如下：

$$D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\frac{a\sum_{i=1}^{n}d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))}{nb+(a-b)\sum_{i=1}^{n}d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))},$$

其中 $a>0$，$b>0$，则 D 是一个差异测度。

上式可以改写为

$$D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\frac{a\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))}{b+(a-b)\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))}。$$

由上式可以看出，D 实际上是对 $d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))$ 的每一项权重均取 $1/n$ 的一个函数，因此在实际应用中有一定局限性。为了弥补这个缺陷，下面本文对其作适当推广。

命题 4　设论域 $\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$d$ 为不相似函数，$(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 为权重向量，对任意 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$，定义 D_1 如下：

$$D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\frac{a\sum_{i=1}^{n}\omega_i d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))}{b+(a-b)\sum_{i=1}^{n}\omega_i d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))},$$

其中 $a>0$，$b>0$，则 D_1 是一个差异测度。

证明：很明显 D_1 满足条件(D1)和(D2)。下证 D_1 满足条件(D3)，(D4)。考虑函数

$$f(t)=\frac{at}{b+(a-b)t}(t>0)。$$

那么由

$$f'(t)=\frac{ab}{(b+(a-b)t)^2}>0$$

知函数 $f(t)$ 单调递增。如果 $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{A}(x_i)\leqslant\boldsymbol{B}(x_i)\leqslant\boldsymbol{C}(x_i)$，$x_i\in\boldsymbol{X}$，那么则有

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{C}(x_i))。$$

故由函数 $f(t)$ 的单调性和 $f(0)=0$ 知，$D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$，同理可证 $D_1(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})\leqslant D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$，即 D_1 满足条件(D3)。又因为 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i d(\boldsymbol{P}(x_i),\boldsymbol{P}^c(x_i))$，则由函数 $f(t)$ 的单调性知，$D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant D_1(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}^c)$，即证 D_1 满足条件(D4)。证毕。

在本文以下的部分中，称由命题 4 给出的差异测度 D_1 为加权差异测度。

由 D_1 的定义可以看出，加权差异测度是差异测度的推广。

又，当 $a=b$ 时，D_1 简化为

$$D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i d(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))。$$

如果 $d_T=1-E_T$，那么 $1-D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{n}\omega_i E_T(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{B}(x_i))$ 为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 加权逻辑相似度，这里逻辑相似度的相关概念见文献[6]。在下文中，$\boldsymbol{A}\approx(\varepsilon)\boldsymbol{B}$ 表示 $D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant\varepsilon$。

2　模糊运算与模糊推理的鲁棒性分析

对于模糊集合之间的运算，有如下结论成立。

定理 5　设 T 是 t-模，R 和 E_T 分别是 T 的剩余和双剩余，d_T 是由 E_T 诱导的不相似函数。假设 d_T 是 DF-度量，D_1 是命题 4 给出的加权差异测度。若 $\boldsymbol{A}$

$\approx(\varepsilon_1)\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{B}\approx(\varepsilon_2)\boldsymbol{B}_1$，则 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}\approx(\lambda)\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1$，这里 $\circ\in\{\cup,\cap,T,R\}$，且

$$\lambda=\min\left(\frac{a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-2a(a-b)\varepsilon_1\varepsilon_2}{a^2-(a-b)^2\varepsilon_1\varepsilon_2},1\right)。$$

证明：由 $\boldsymbol{A}\approx(\varepsilon_1)\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{B}\approx(\varepsilon_2)\boldsymbol{B}_1$ 可得：

$$D_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_1)=\frac{a\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{A}_1(x_i))}{b+(a-b)\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{A}_1(x_i))}\leqslant\varepsilon_1,$$

$$D_1(\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}_1)=\frac{a\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{B}_1(x_i))}{b+(a-b)\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{B}_1(x_i))}\leqslant\varepsilon_2,$$

因此有，

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{A}_1(x_i))\leqslant\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{B}_1(x_i))\leqslant\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}。$$

又因为 $d_T(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1(x_i))\leqslant d_T(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{A}_1(x_i))+d_T(\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{B}_1(x_i))$（见文献[9]），则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1(x_i))\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(d_T(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{A}_1(x_i))+d_T(\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{B}_1(x_i)))\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}(x_i),\boldsymbol{A}_1(x_i))+\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{B}_1(x_i))\leqslant$$
$$\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}.$$

由函数 $f(t)$ 的单调性知，

$$D_1(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1(x_i))=$$
$$\frac{a\sum_{i-1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1(x_i))}{b+(a-b)\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1(x_i))}\leqslant$$
$$\frac{a\left(\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)}{b+(a-b)\left(\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)}\leqslant$$
$$\frac{a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-2a(a-b)\varepsilon_1\varepsilon_2}{a^2-(a-b)^2\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

注意到，$D_1(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1(x_i))\leqslant 1$，故有

$$D_1(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}(x_i),\boldsymbol{A}_1\circ\boldsymbol{B}_1(x_i))\leqslant$$
$$\min\left(\frac{a^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)-2a(a-b)\varepsilon_1\varepsilon_2}{a^2-(a-b)^2\varepsilon_1\varepsilon_2},1\right)。$$

证毕。

关于模糊推理两种算法（CRI 算法和三 I 算法）及其 FMP 型解和 FMT 型解的具体介绍请参阅文献[1-2]。

对于 CRI 算法的鲁棒性分析，有如下结论：

定理 6 设 T 是 t-模，R 和 E_T 分别是 T 的剩余和双剩余，d_T 是 DF-度量，D_1 是命题 4 给出的加权差异测度。如果 $\boldsymbol{A}_1\approx(\varepsilon_1)\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{B}_1\approx(\varepsilon_2)\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{A'}_1\approx(\varepsilon_3)\boldsymbol{A'}_2$，$\boldsymbol{B'}_1$ 和 $\boldsymbol{B'}_2$ 分别是 CRI 算法 FMP 型解，则有 $\boldsymbol{B'}_1\approx\left(\min\left(\frac{am_1}{b+(a-b)m_1},1\right)\right)\boldsymbol{B'}_2$，其中

$$m_1=\sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A'}_1(x_i),\boldsymbol{A'}_2(x_i))+$$
$$\sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}_2(x_i))+\frac{nb\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}。$$

证明：因为 $\boldsymbol{A}_1\approx(\varepsilon_1)\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{B}_1\approx(\varepsilon_2)\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{A'}_1\approx(\varepsilon_3)\boldsymbol{A'}_2$，则有：

$$D_1(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)=\frac{a\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}_2(x_i))}{b+(a-b)\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}_2(x_i))}\leqslant\varepsilon_1,$$

$$D_1(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2)=\frac{a\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_T(\boldsymbol{B}_1(y_j),\boldsymbol{B}_2(y_j))}{b+(a-b)\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_T(\boldsymbol{B}_1(y_j),\boldsymbol{B}_2(y_j))}\leqslant\varepsilon_2,$$

$$D_1(\boldsymbol{A'}_1,\boldsymbol{A'}_2)=\frac{a\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A'}_1(x_i),\boldsymbol{A'}_2(x_i))}{b+(a-b)\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A'}_1(x_i),\boldsymbol{A'}_2(x_i))}\leqslant\varepsilon_3,$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i=1$，$\sum_{j=1}^{m}\beta_j=1$。因此得：

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}_2(x_i))\leqslant\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1},$$

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_T(\boldsymbol{B}_1(y_j),\boldsymbol{B}_2(y_j))\leqslant\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i d_T(\boldsymbol{A'}_1(x_i),\boldsymbol{A'}_2(x_i))\leqslant\frac{b\varepsilon_3}{a-(a-b)\varepsilon_3}.$$

又因为

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_T(\boldsymbol{B'}_1(y_j),\boldsymbol{B'}_2(y_j))=$$
$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_T(\bigvee_{i=1}^{n}T(\boldsymbol{A'}_1(x_i),R(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{B}_1(y_j))),$$
$$\bigvee_{i=1}^{n}T(\boldsymbol{A'}_2(x_i),R(\boldsymbol{A}_2(x_i),\boldsymbol{B}_2(y_j))))\leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\sum_{i=1}^{n}d_T(T(\boldsymbol{A'}_1(x_i),R(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{B}_1(y_j))),$$
$$T(\boldsymbol{A'}_2(x_i),R(\boldsymbol{A}_2(x_i),\boldsymbol{B}_2(y_j))))\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_j[d_T(\boldsymbol{A}'_1(x_i),\boldsymbol{A}'_2(x_i))+ d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}_2(x_i))+d_T(\boldsymbol{B}_1(y_j),\boldsymbol{B}_2(y_j))]\leqslant \sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A}'_1(x_i),\boldsymbol{A}'_2(x_i))+ \sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}_2(x_i))+\frac{nb\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}.$$

再由函数 $f(t)=\dfrac{at}{b+(a-b)t}$ 的单调性得：

$$D_1(\boldsymbol{B}'_1,\boldsymbol{B}'_2)=\frac{a\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_T(\boldsymbol{B}'_1(y_j),\boldsymbol{B}'_2(y_j))}{b+(a-b)\sum_{j=1}^{m}\beta_j d_T(\boldsymbol{B}'_1(y_j),\boldsymbol{B}'_2(y_j))}\leqslant\frac{am_1}{b+(a-b)m_1},$$

其中

$$m_1=\sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A}'_1(x_i),\boldsymbol{A}'_2(x_i))+ \sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}_2(x_i))+\frac{nb\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}。$$

证毕。

仿照定理 6 的证明过程，对于 CRI 算法的 FMT 型解的鲁棒性，可得如下结论。

定理 7　设 T 是 t- 模，R 和 E_T 分别是 T 的剩余和双剩余，d_T 是 DF- 度量，D_1 是命题 4 定义的加权差异测度。如果 $\boldsymbol{A}_1\approx(\varepsilon_1)\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{B}_1\approx(\varepsilon_2)\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}'_1\approx(\varepsilon_3)\boldsymbol{B}'_2$，$\boldsymbol{A}'_1$ 和 $\boldsymbol{A}'_2$ 分别为 CRI 算法 FMT 型的解，则有 $\boldsymbol{A}'_1\approx\left(\min\left(\dfrac{am_2}{b+(a-b)m_2},1\right)\right)\boldsymbol{A}'_2$，其中

$$m_2=\sum_{j=1}^{m}d_T(\boldsymbol{B}'_1(y_j),\boldsymbol{B}'_2(y_j))+ \sum_{j=1}^{m}d_T(\boldsymbol{B}_1(y_j),\boldsymbol{B}_2(y_j))+\frac{mb\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}。$$

可以看出，定理 5 中扰动参数 λ 的值与文献[9]中命题 7 的扰动参数值相等，定理 6 和定理 7 是[9]中相应结论的推广。

三 I 算法作为 CRI 算法的改进，其鲁棒性分析有如下结论。

定理 8　设 T 是左连续 t- 模，R 是 T 诱导的剩余蕴涵，E_T 是 T 的双剩余，d_T 是 DF- 度量，D_1 是命题 4 定义的加权差异测度。如果 $\boldsymbol{A}_1\approx(\varepsilon_1)\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{B}_1\approx(\varepsilon_2)\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{A}'_1\approx(\varepsilon_3)\boldsymbol{A}'_2$，$\boldsymbol{B}'_1$ 和 $\boldsymbol{B}'_2$ 分别为三 I 算法 FMP 型的解，则有 $\boldsymbol{B}'_1\approx\left(\min\left(\dfrac{am_3}{b+(a-b)m_3},1\right)\right)\boldsymbol{B}'_2$，其中

$$m_3=\sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A}'_1(x_i),\boldsymbol{A}'_2(x_i))+ \sum_{i=1}^{n}d_T(\boldsymbol{A}_1(x_i),\boldsymbol{A}(x_i))+\frac{nb\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}。$$

定理 9　设 T 是左连续 t- 模，R 是由 T 诱导的剩余蕴涵，E_T 是 T 的双剩余，d_T 是 DF- 度量，D_1 是命题 4 定义的加权差异测度。如果 $\boldsymbol{A}_1\approx(\varepsilon_1)\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{B}_1\approx(\varepsilon_2)\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}'_1\approx(\varepsilon_3)\boldsymbol{B}'_2$，$\boldsymbol{A}'_1$ 和 $\boldsymbol{A}'_2$ 分别为三 I 算法 FMT 型的解，则有 $\boldsymbol{A}'_1\approx\left(\min\left(\dfrac{am_4}{b+(a-b)m_4},1\right)\right)\boldsymbol{A}'_2$，其中

$$m_4=\sum_{j=1}^{m}d_T(\boldsymbol{B}'_1(y_j),\boldsymbol{B}'_2(y_j))+ \sum_{j=1}^{m}d_T(\boldsymbol{B}_1(y_j),\boldsymbol{B}_2(y_j))+\frac{mb\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}。$$

由于定理 7—9 的证明和定理 6 的证明类似，所以略去定理 7—9 的证明过程。

3　结　论

本文在差异测度的基础上，提出了加权差异测度的概念，以满足解决实际问题的需要。然后，从模糊集之间运算的扰动和模糊推理的鲁棒性这两个方面，分析了基于加权差异测度产生的模糊集运算的扰动性态和模糊推理的鲁棒性。本文的研究结果推广了文献[9]中的对应结论，使得人们在应用这些结论时具有更多的合理选择。

在未来的工作中，我们将对加权差异测度的概念和相似度等概念进行统一处理，并从加权差异测度入手，讨论其他模糊推理算法的鲁棒性。

参考文献：

[1] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Transactions on Systems，1973，3(1)：28-44.

[2] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学(E)，1999，29(1)：43-53.

[3] Ying M S. Perturbation of fuzzy reasoning[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，1999，7(5)：625-629.

[4] 戴松松，裴道武. 模糊集的相对扰动[J]. 模糊系统与数

学,2011,25(5):1-6.
[5] Wang G J, Duan J Y. On robustness of the full implication triple I inference method with respect to finer measurement [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014,55(3):787-796.
[6] Jin J H, Li Y M, Li C Q. Robustness of fuzzy reasoning via logically equivalence measure[J]. Information Sciences, 2007,177(22):5103-5117.
[7] Montes S, Couso I, Gil P, et al. Divergence measure between fuzzy sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2002,30(2):91-105.
[8] Li Y F, Qin K Y, He X X. Dissimilarity functions and divergence measures between fuzzy sets[J]. Information Sciences,2014,288(288):15-26.
[9] Li Y F, Qin K Y, He X X, et al. Robustness of fuzzy connectives and fuzzy reasoning with respect to general divergence measures[J]. Fuzzy Sets and Systems,2016, 294:63-78.

Weighted difference measure and robustness analysis of fuzzy reasoning

WANG Long, *PEI Daowu*

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: For the defect of difference measure concept, the concept of weighted difference measure is proposed. Based on the weighted difference measure, perturbations of fuzzy set operations are analyzed, and the corresponding perturbation parameters are given. Furthermore, the robustness of two important methods in fuzzy reasoning is analyzed by using the weighted difference measure. These conclusions generalize the conclusions based on the difference measure and provide a basis for the robustness analysis of fuzzy reasoning.

Key words: fuzzy reasoning; difference measure; robustness; CRI algorithm; triple I algorithm

(责任编辑:康 锋)