浙江理工大学学报(自然科学版),第39卷,第1期,2018年1月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol.39, No.1, Jan. 2018

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2018.01.019

有限群的 $P_{\mathscr{F}}$-可补充子群

汪昊燃,肖玲玲,易小兰

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要: 设 A 是 G 的子群,称 A 在 G 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的,如果存在 G 的子群 T 和 $C\leqslant A$ 使得 $G=AT$ 且 $T\cap A=T\cap C$,其中 C 在 G 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。运用极小阶反例法,研究 $P_{\mathscr{F}}$-可补充子群对有限群超可解性、幂零性的影响。利用 G_p(p 为奇数)的每个极小子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的,得到 G 是 2'-超可解的充分条件。

关键词: 有限群;$P_{\mathscr{F}}$-可补充子群;饱和群系;超可解群;p-幂零群

中图分类号: O152.1　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673-3851 (2018) 01-0113-07

0　引　言

本文所有的群都是有限群。群论研究者利用子群的各种性质(置换性质、可补充性质、嵌入性质等),已经得到了有限群结构的一系列结果。Buckley[1] 证明:如果奇数阶群 G 的每一个极小子群在 G 中正规,则 G 为超可解群。Ballester-Bolinches 等[2] 证明:如果群 G 的每一个极小子群在 G 中可补或者 G 的每一个素数阶(或者 4 阶子群)在 G 中 c-可补,则 G 为超可解群。有限群 G 的一个子群 H 称为在 G 中拟正规的[3] 或者置换的[4],如果对 G 的所有子群 E 都有 $HE=EH$。Ore[3] 证明:有限群的任一拟正规子群为次正规子群。若 A 是 G 的子群,且 $K\leqslant H\leqslant G$,如果 $AH=AK$,则称 A 覆盖 (K,H);如果 $A\cap H=A\cap K$,则称 A 避开 (K,H)。由此 Guo 等[5] 引入子群嵌入的概念:有限群 G 的子群 A 称为在 G 中是几乎 m-嵌入的,如果存在 G 的子群 T 和 $C\leqslant A$ 使得 $G=AT$ 且 $T\cap A=T\cap C$,其中 C 在 G 中是 $\mathscr{N}$-拟置换的。Guo 等[5] 利用该概念证明:如果 G 的每一个极小子群在 G 中是几乎 m-嵌入的,则 G 为 2'-超可解群。

本文考虑 $\mathscr{F}$-拟置换子群的一些应用,由 $\mathscr{F}$-拟置换子群获得 $P_{\mathscr{F}}$-可补充子群的定义,并进一步研究 $P_{\mathscr{F}}$-可补充子群与有限群幂零性、超可解性的关系,得到有限群 2-幂零性等一些充分条件。运用本文定理的结论,可以推广和统一 Buckley[1] 和 Ballester-Bolinches 等[2] 提出的有限群结构和性质的部分结论。

1　预备知识

本文中 G 表示一个有限群,p 表示一个素数,G_p 表示群 G 的西洛 p-子群,$\mathscr{F}$ 表示一个群类。如果 $1\in\mathscr{F}$,则用 $G^{\mathscr{F}}$ 表示 G 的所有使 $G/N\in\mathscr{F}$ 的正规子群 N 的交;群类 $\mathscr{F}$ 称为群系,如果 $1\in\mathscr{F}$,并且对所有的群 G,$G/G^{\mathscr{F}}$ 的同态像总是属于 $\mathscr{F}$ 或者 $\mathscr{F}=\varnothing$。群系 $\mathscr{F}$ 称为饱和的,如果当 $G/\Phi(G)\in\mathscr{F}$ 时总有 $G\in\mathscr{F}$;群系 $\mathscr{F}$ 称为继承的,如果对于 G 的每一个子群 H,当 $G\in\mathscr{F}$ 时总有 $H\in\mathscr{F}$。本文用 $\mathscr{N}$ 表示幂零群系,用 $\mathscr{U}$ 表示超可解群系。群 G 的极大子群 M 称为 $\mathscr{F}$-伪正规的,如果 $G/M_G\notin\mathscr{F}$。设 $K<H$ 是 G 的子群,如果 K 是 H 的一个极大 $\mathscr{F}$-伪正规子群,则称 (K,H) 是 G 的一个 $\mathscr{F}$-伪正规对。对于群 G 的子群 M,K,H,如果 $K\leqslant H$,则 $M\cap H=M\cap K$ 等价于 $M\cap H\leqslant K$;$MH=MK$ 等价于 $H=(M\cap H)K$。

收稿日期:2017-07-02　　网络出版日期:2017-12-11

基金项目:国家自然科学基金项目(11471055);浙江省自然科学基金项目(LY18A010028)

作者简介:汪昊燃(1991-),男,安徽六安人,硕士研究生,主要从事有限群方面的研究。

通信作者:易小兰,E-mail:yixiaolan2005@126.com

本文所用符号和概念皆为标准的，未说明的概念与符号参见文献[6]。

定义 1 设 A 是 G 的子群，如果 A 覆盖或者避开 G 的每一个 $\mathscr{F}$-伪正规对 (K,H)，则称 A 在 G 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。

例 1 设 A 是 G 的拟正规子群，(K,H) 是 G 的一个极大对，则 $AK=KA$ 是 G 的一个子群，$H\cap KA=K(H\cap A)=(H\cap A)K$ 是 H 的一个子群。因为 K 是 H 的极大子群，所以 $H\cap A\leqslant K$ 或者 $H=(H\cap A)K$，因此 G 的每一个拟正规子群覆盖或者避开 G 的每一个极大子群对。

例 2 群 G 的子群 A 称为在 G 中 $\{1\leqslant G\}$-嵌入的[5]，如果 A 覆盖或者避开 G 的每一个极大子群对。因为幂零群的极大子群都是正规的，所以 G 的所有 $\{1\leqslant G\}$-嵌入子群的集合就是 G 的所有 $\mathscr{N}$-拟置换子群的集合。

如果群类 $\mathscr{F}\subseteq\mathscr{M}$，则每一个 $\mathscr{F}$-拟置换子群也是 $\mathscr{M}$-拟置换子群，因此 $\mathscr{N}$-拟置换子群是包含所有幂零群的群类 $\mathscr{F}$ 的 $\mathscr{F}$-拟置换子群。

定义 2 设 H 是 G 的一个子群，如果 $H=G$ 或者存在一个子群链：

$$H=H_0<H_1<\cdots<H_t=G,$$

对于 $i=1,\cdots,t$，要么 H_{i-1} 在 H_i 中正规，要么 $H_i/(H_{i-1})_{H_i}\in\mathscr{F}$，则 H 在 G 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的[6]或者是 $\mathscr{F}$-次正规的[7]。

定义 3 设 A 是 G 的子群，称 A 在 G 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的，如果存在 G 的子群 T 和 $C\leqslant A$，使得 $G=AT$ 且 $T\cap A=T\cap C$，其中 C 在 G 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。

显然，每一个 $\mathscr{F}$-拟置换子群是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。

定义 4 如果 G 不属于 $\mathscr{F}$，但是它的所有真子群属于 $\mathscr{F}$，则称 G 为 $\mathscr{F}$-临界的。一个 $\mathscr{N}$-临界群被称为斯米特群。

引理 1[5] 设 $M\leqslant G$，N 是 G 的正规子群，(K,H) 是 G 的一个极大对，其中 M 覆盖或者避开 (K,H)。则下列结论成立：

a) 如果 N 避开 (K,H)，则 (KN,HN) 是 G 的一个极大对，且 $|HN:KN|=|H:K|$；

b) 如果 M 覆盖(避开)(KN,HN)，则 MN 覆盖(避开)(K,H)；

c) 如果 $H\leqslant V$，且 M 覆盖(避开)(K,H)，则 $M\cap V$ 覆盖(避开)(K,H)；

d) 如果 M 覆盖(避开)(K,H)，且 $N\leqslant K$，则 MN 覆盖(避开)(K,H)；

e) 如果 $A\leqslant B\leqslant C\leqslant D$，且 M 覆盖(避开)(A,D)，则 M 覆盖(避开)(B,C)。

引理 2 设 M,V 是 G 的子群，N 是 G 的正规子群，如果 M 在 G 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。则下述断言成立：

a) $M\cap V$ 在 V 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的；

b) NM/N 在 G/N 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。

证明：a) 由假设知，M 覆盖或者避开 (K,H)，令 (K,H) 是 V 的 $\mathscr{F}$-伪正规对，则 $M\cap V$ 覆盖(避开)(K,H)，因此 $(M\cap V)$ 在 V 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。

b) 令 $(K/N,H/N)$ 是 G/N 的 $\mathscr{F}$-伪正规对，则由 $(K/N)_{H/N}=K_H/N$ 和 $(H/N)/(K/N)_{H/N}=(H/N)/(K_H/N)\simeq H/K_H$ 知，(K,H) 是 G 的一个 $\mathscr{F}$-伪正规对。由假设知，M 覆盖或者避开 (K,H)，如果 M 覆盖 (K,H)，则 $NMH=NMK$，于是 NM/N 覆盖 $(K/N,H/N)$；如果 M 避开 (K,H)，则 $(MN/N)\cap(H/N)=(MN\cap H)/N=N(M\cap H)/N\leqslant NK/N=K/N$，于是 NM/N 避开 $(K/N,H/N)$，因此 NM/N 在 G/N 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。

引理 3[5] 设 $\mathscr{F}$ 是一个群系，H 和 E 是 G 的子群，其中 H 在 G 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的。则：

a) 如果 $\mathscr{F}$ 是继承的，则 $H\cap E$ 在 E 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的；

b) 如果 E 是 G 的正规子群，则 HE/E 在 G/E 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的。

引理 4 设 $N=N_1\times\cdots\times N_t$ 是 G 的正规子群，其中 N_i 是非交换单群，$i=1,\cdots,t$。如果 $\mathscr{F}$ 是一个包含所有可解群的继承群系且 C 是 G 的 K-$\mathscr{F}$-次正规子群，若 $C_G(N)=1$，则 C 在 CN 中是次正规的。

证明：假设引理不真，并设 G 为极小阶反例，则 $C\neq1$。因为 C 是 G 的 K-$\mathscr{F}$-次正规子群，所以存在 G 的子群 $M\neq1$，使得 $C\leqslant M$，且要么 M 在 G 中正规，要么 $G/M_G\in\mathscr{F}$。由引理 3，C 在 M 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的。由 G 的选择知，当 $N\leqslant M$ 时，C 在 CN 中次正规，因此 $N\not\leqslant M$。由于 N 的每一个合成因子都是非交换的，所以 G/M_G 是非可解群，因此 M 在 G 中正规。

由假设知，$C_G(N)=1$，$D=M\cap N\neq1$。令 $C_0=C_G(D)$，则 $N=D\times(C_0\cap N)$，其中 $C_0\cap N$ 在 G 中正规，因此 $C_0\cap N\cap M=C_0\cap D=1$ 且 $C_0\cap N\leqslant C_G(M)$。这表明 CD 在 CN 中正规，且 $M\leqslant C_G(C_0\cap N)$，于是 $C_M(D)\leqslant C_G(D)\cap C_G(C_0\cap N)=C_G(N)=1$。因为假设的条件对 (M,D,C) 成立，所以由 G 的选择知，C 在 CN 中次正规，矛盾。

引理 5　设 K，H 是 G 的子群，假设 K 在 G 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的，而 H 正规于 G。则下列结论成立：

a）若 $K\leqslant E\leqslant G$，则 K 在 E 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的；

b）若 $H\leqslant K$，则 K/H 在 G/H 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的；

c）若$(|H|, |K|)=1$，则 HK/H 在 G/H 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。

证明：令 T 和 $C\leqslant K$ 是 G 的子群，满足 $KT=G$，$T\cap K=T\cap C$，且 C 在 G 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。

a）显然 $E=E\cap KT=K(E\cap T)$，由引理 2a）知，C 在 E 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。因为$(E\cap T)\cap K=T\cap K\leqslant C$，所以 K 在 E 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。

b）显然$(HT/H)(K/H)=G/H$，由引理 2b）知，$(HT/H)\cap(K/H)=(HT\cap K)/H=H(T\cap K)/H\leqslant HC/H\leqslant K/H$，其中 HC/H 在 G/H 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的，所以 K/H 在 G/H 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。

c）因为 $KT=G$，且$(|H|, |K|)=1$，$H\leqslant T$，所以 $T\cap HK=H(T\cap K)\leqslant HC\leqslant HK$，于是由引理 2b）知，$HK/H$ 在 G/H 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。

引理 6[8]　设 E 是 G 的一个非单位的正规拟幂零子群，若 $\Phi(G)\cap E=1$，则 E 是 G 的一些极小正规子群的直积。

引理 7　设 P 是 G 的一个非单位的正规 p-子群，且 $P\cap\Phi(G)=1$，如果 P 的每一个极大子群或者极小子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的，则 P 的某个极大子群在 G 中是正规的。

证明：假设引理不真，并设 G 为极小阶反例。因为 $P\cap\Phi(G)=1$，由引理 6，$P=N_1\times\cdots\times N_t$，其中 N_i 是 G 的极小正规子群，$i=1,\cdots,t$。

这里令 $|N_1|>p$，假设 N_1 有一个非单位的真子群 H 在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的。令 T 和 $C\leqslant H$ 是 G 的子群，满足 $HT=G$，$T\cap H=T\cap C$，且 C 在 G 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的，则 $N_1=N_1\cap HT=H(N_1\cap T)$，其中 $N_1\cap T$ 在 G 中是正规的，于是 $T=G$，且 $H=C$ 在 G 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的。因为 $P\cap\Phi(G)=1$，所以存在 G 的极大子群 M 使得 $G=N_1\rtimes M$。又因为 $|N_1|=|G:M|>p$，所以(M,G)是 $\mathscr{U}$-伪正规的，因此 H 覆盖或者避开(M,G)。由 $1<|H|<|N_1|$ 知，这是不可能的，矛盾表明 N_1 的每一个非单位的真子群在 G 中不是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的，从而 $t>1$，所以 $N=N_2\cdots N_t\neq 1$ 且 P 的每一个极大子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的。因为假设的条件对$(G/N, P/N)$成立，由 G 的选择，存在 P/N 的某一个极大子群 V/N 在 G/N 中是正规的，矛盾表明引理成立。

引理 8[9]　设 $\mathscr{F}$ 是一个饱和群系，G 是一个有限群，假设 G 的 $\mathscr{F}$-上根 $G^{\mathscr{F}}$ 是可解的，且 G 的每一个不包含 $G^{\mathscr{F}}$ 的极大子群都属于 $\mathscr{F}$。则下列结论成立：

a）对某个素数 p，$P=G^{\mathscr{F}}$ 是一个 p-群且 P 的指数为 p 或者 4（P 为非交换 2-群）；

b）$P/\Phi(P)$是 G 的 $\mathscr{F}$-离中心的主因子；

c）若 P 是交换的，则 $\Phi(P)=1$。

引理 9　设 $\mathscr{F}$ 是一个包含所有幂零群的饱和群系，G 是一个 $\mathscr{F}$-临界群[10]且 $\mathscr{F}$-剩余群 $P=G^{\mathscr{F}}\leqslant O_p(G)$。如果 P 的每一个素数阶或者 4 阶（$p=2$ 且 P 非交换）循环子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的，则 $|P|=p$ 且$(|G|, p-1)\neq 1$。

证明：由引理 8 知，$P/\Phi(P)$是 G 的 $\mathscr{F}$-离中心的主因子；对某个素数 p，P 是指数为 p 或者 4（$p=2$ 且 P 非交换）的群。

首先证明 $|P|=p$。假设结论不成立，由引理 7，存在 $P/\Phi(P)$ 的极小子群 $X/\Phi(P)$，满足 $X/\Phi(P)$在 $G/\Phi(P)$中不是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的。令 $x\in X\backslash\Phi(P)$，$L=<x>$，则 $|L|=p$ 或者 $L=|4|$。由假设，L 在 G 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。令 T 和 $C\leqslant L$ 是 G 的子群，满足 $LT=G$，$L\cap T=C\cap T$，其中 C 在 G 中是 $\mathscr{U}$-拟置换的。若 $T=G$，则 $L=C$ 在 G 中是 $\mathscr{U}$-拟置换的。由引理 2，$X/\Phi(P)=L\Phi(P)/\Phi(P)$在 $G/\Phi(P)$中是 $\mathscr{U}$-拟置换的，因此 $X/\Phi(P)$在 $G/\Phi(P)$中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的，矛盾表明 $T\neq G$，因此 $|G:\Phi(P)T|=p$ 且 $P\Phi(P)T=PT=G$，于是 $|G:\Phi(P)T|=|P|=p$。

最后假设$(|G|, p-1)=1$。因为 $|P|=p$，群 $G/C_G(P)$的阶整除 $p-1$，所以 $G=C_G(P)$，这说明$(P/\Phi(P))\rtimes(G/C_G(P/\Phi(P)))\simeq P$ 属于 $\mathscr{F}$，矛盾。

命题 1　G 的每一个 $\mathscr{F}$-拟置换子群是 K-$\mathscr{F}$-次正规的。

证明：假设命题 1 不成立，并设 G 为极小阶反例。令 E 是 G 的 $\mathscr{F}$-拟置换子群，则对 G 的某个极大子群 M，有 $E\leqslant M$。由引理 2a），E 在 M 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的，又由 G 的选择知，E 在 M 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的。若 $G/M_G\in\mathscr{F}$，则 E 在 G 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的，这与 G 的选择矛盾，因此对任意的 $x\in G$，都有 $G/M_G\notin\mathscr{F}$，于是 E 覆盖或者避开极大对(M^x, G)。假设对某个 $x\in G$，有 $EM^x=G$，则 $MM^x=G$ 且 $G=MM=M$，矛盾。这表明对任一 $x\in G$，都有 $EM^x\neq G$ 且 $E\leqslant M^x$，因此 $E\leqslant M_G$。显然，E 在 M_G 中是 $\mathscr{F}$-拟置换的，由 G 的选择知，E 在 M_G 中是 K-$\mathscr{F}$-次正规的，因此 E 在 G 中也是 K-$\mathscr{F}$-次正规的，矛盾。

2 主要定理

定理1 设 p 是一个整除 $|G|$ 的奇数，如果 G_p 的每一个极小子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的，则 G 是 2’-超可解的。

证明：假设定理1不成立，并设 G 为极小阶反例。令 $\mathscr{F}$ 为包含所有 2’-超可解群的群类，显然 $\mathscr{F}$ 中的每一个群都是可解的。由引理5知，假设的条件对 G 的每一个子群成立，因此 G 的每一个真子群是 2’-超可解的。

首先证明 G 是可解的。假设 G 是不可解的，则有：

a) G 的每一个正规真子群 N 都包含于 $\Phi(G)$ 中，于是 $G'=G$，$F(G)=\Phi(G)$，且 $G/F(G)$ 是非交换单群。

显然 N 是可解群。假设 $N\not\leqslant\Phi(G)$，令 M 为 G 的极大子群使得 $N\not\leqslant M$，易知 M 是可解的，于是 $G/N\simeq M/M\cap N$ 是可解的，因此 G 是可解的且 $N\leqslant\Phi(G)$，所以 $F(G)=\Phi(G)$ 且 $G/F(G)$ 是非交换单群。

b) 如果 L 是 G 的 K-$\mathscr{U}$-次正规真子群，则 $L\leqslant F(G)$。

由定义2知，存在 G 的真子群 M 使得 $L\leqslant M$，且要么 M 在 G 中正规，要么 G/M_G 是超可解群。由a)知，$M\leqslant\Phi(G)=F(G)$，于是 $L\leqslant F(G)$。假设 M 不正规于 G，则 $M\neq M_G$ 且 G/M_G 是超可解的。但是 $M_G\leqslant F(G)$，因此 $G/F(G)$ 是交换的，矛盾。

设 p 是整除 $|G/F(G)|$ 的最大素数，G_p 是 G 的西洛 p-子群。令 $\pi=\pi(G/F(G))$，由 Burnside's p^aq^b-定理知，$|\pi|>2$ 且存在一个素数 $q\in\pi\backslash\{2,p\}$。设 Gq 是 G 的西洛 q-子群，$Q=Gq\cap F(G)$ 是 $F(G)$ 的西洛 q-子群，则有：

c) $Q\neq 1$.

假设 $Q=1$，令 L 为 G_q 的极小子群。由a)知，L 在 G 中是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的。首先假设 L 在 G 中是 $\mathscr{U}$-拟置换的，由命题1知，L 在 G 中是 K-$\mathscr{U}$-次正规的，因此 $L\leqslant F(G)$，所以 $L\leqslant G_q\cap F(G)=Q$，这表明 L 在 G 中不是 $\mathscr{U}$-拟置换的，故对 G 的某个极大子群 M，有 $G=LM$。考虑 G/M_G 在 M/M_G 的右陪集上的置换表示可知，G/M_G 同构于对称群 S_q 的某个阶为 q 的子群，因此 q 为整除 $|G/M_G|$ 的最大素数。又因为 $M_G\leqslant F(G)$，p 整除 $|G/M_G|$，所以 $p<q$，矛盾。

d) $E=QG_p$ 是幂零群。

假设 E 不是幂零的，令 $H=H_q\rtimes H_p$ 是 E 的斯米特子群，则由引理5a)和引理9知，$q>p$，矛盾，因此 E 是幂零的。

e) $Q\leqslant Z_\infty(G)$.

令 $C=C_G(Q)$，因为 Q 是 $F(G)$ 的特征子群，所以 Q 和 C 都在 G 中正规。设 H/K 为 G 的包含于 Q 的主因子，由d)知，$G_p\leqslant C\leqslant C_G(H/K)$，又由文献[10]第A章10.6(b)知，$F(G)\leqslant C_G(H/K)$。因为 p 整除 $|G/F(G)|$，所以 $F(G)<C_G(H/K)$。但是 $G/F(G)$ 是一个单群，所以 $G=C_G(H/K)$，于是 $Q\leqslant Z_\infty(G)$。

f) 最后的矛盾。因为 $G/F(G)$ 不是 q-幂零的，由文献[11]第四章5.4知，$G/F(G)$ 有一个 q-闭的斯米特子群 $H/F(G)$，这里 q 整除 $|H/F(G)|$。令 E 为 $F(G)$ 在 H 中的极小补充，则 $E\cap F(G)\leqslant\Phi(E)$。因为包含所有 q-闭的群的群类是饱和的群系[8]，所以由文献[8]推论1.6知，E 是 q-闭的。令 $V=V_q\rtimes V_r$ 是 E 的斯米特子群，由引理5a)，$|V_q|=q$，因此 V_q 在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的。若 $V_q\not\leqslant F(G)$，则 V_q 在 G 中不是 $\mathscr{U}$-拟置换的，故对 G 的某个极大子群 M，有 $V_qM=G$，矛盾。因此 $V_q\leqslant F(G)$ 且 $V_q\leqslant Q$，由e)，$V_q\leqslant Z_\infty(G)\cap V\leqslant Z_\infty(V)$，所以 V 是幂零的，矛盾表明 G 是可解的。

最后证明 G 是 2’-超可解群。

显然 G 为可解的 $\mathscr{F}$-临界群。假设 G 不是 2’-超可解群，则由引理8，对某个素数 $r>2$，$G^{\mathscr{F}}$ 是一个 r-群。又由引理9知，$|G^{\mathscr{F}}|=r$，所以 G 是 2’-超可解群。

定理2 如果 G_2 的每一个极小子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的，且 $G'\cap G_2$ 是交换的或者 G_2 的每一个4阶循环子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的，则 G 是 2-幂零群。

证明：假设定理2不成立，并设 G 为极小阶反例。由引理5a)，假设的条件对 G 的每一个子群成立，因此 G 的每一个真子群是 2-幂零群。又由文献[11]第Ⅳ章5.3知，G 是一个 2-闭的斯米特群，于是由斯米特定理[9]，$G_2=G^{\mathscr{N}}=G'$ 是 G 的西洛 2-子群，因此 G_2 的每一个阶为素数或者阶为4($G'\cap G_2=G_2$ 是非交换的)的循环子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的。由引理9，$|G_2|=2$，因此 G 为幂零群，矛盾。

定理3 设 $X\leqslant E$ 是 G 的正规子群，p 是整除 $|X|$ 的素数且 $(|X|,p-1)=1$，令 P 为 X 的西洛 p-子群。如果 P 的每一个极大子群在 G 中是 $P_{\mathscr{U}}$-可补充的，则 X 是 p-幂零的，且 $X/O_{p'}(X)\leqslant Z_{\Phi\mathscr{U}}(G/O_{p'}(X))$。

证明：假设定理3不成立，令 (G,X) 是满足 $|G|+|X|$ 最小的极小阶反例。则有：

a) $O_{p'}(X)=1$.

假设 $O_{p'}(X)\neq 1$，因为 $O_{p'}(X)$ 为 X 的特征子群，所以 $O_{p'}(X)$ 正规于 G。令 N 为包含于 $O_{p'}(X)$ 的 G 的极小正规子群，则由引理 5c)知，假设的条件对 $(G/N, X/N)$ 成立。因为 $X/O_{p'}(X)\simeq(X/N)/(O_{p'}(X)/N)=(X/N)/O_{p'}(X/N)$ 是 p-幂零的，且 $(X/N)/O_{p'}(X/N)\leqslant Z_{\Phi\mathscr{U}}((G/N)/O_{p'}(X/N))$，所以 X 是 p-幂零的，且 $X/O_{p'}(X)\leqslant Z_{\Phi\mathscr{U}}(G/O_{p'}(X))$，矛盾。

b) $X\neq P$.

假设 $X=P$，令 N 为包含于 X 的 G 的极小正规子群，则由引理 5b)知，假设的条件对 $(G/N, X/N)$ 成立。于是由 (G, X) 的选择知，$X/N\leqslant Z_{\Phi\mathscr{U}}(G/N)$，所以 $N\not\leqslant\Phi(G)$ 且 $|N|>p$，因此 $\Phi(G)\cap X=1$。由引理 6 知，对 G 的某些非循环的极小正规子群 $N_1,\cdots,N_t$，有 $X=N_1\times\cdots\times N_t$，但是 X 的某个极大子群在 N 中正规，因此由文献[10]A 章 3.2 知，对某个整数 i，有 $|N_i|=p$，矛盾表明 b)成立。

c) 由 a)和 b)直接可知，X 不是 p-幂零群。

d) $O_p(X)=1$.

假设 $O_p(X)\neq 1$，令 N 为 G 的包含于 $O_p(X)$ 的极小正规子群，则 $N\leqslant P$。

Ⅰ) X/N 是 p-幂零的，因此 X 为 p-可解群，$N\not\leqslant\Phi(G)$ 且对 X 的某个包含于 N 的主因子 H/K，有 $|H/K|>p$。

若 $N=P$，则 X/N 为 p'-群，所以 X/N 为 p-幂零群。若 $N\neq P$，则假设的条件对 $(G/N, X/N)$ 成立，由 (G, X) 的选择知，X/N 为 p-幂零群。假设 $N\leqslant\Phi(G)$，由文献[8]推论 1.6 知，X 为 p-幂零群，这与 c)矛盾，因此 $N\leqslant\Phi(G)$ 不成立。如果对 X 的每一个包含于 N 的主因子 H/K，有 $|H/K|=p$，则由 $(|X|, p-1)=1$ 知，$C_X(H/K)=X$，所以 $N\leqslant Z_\infty(X)$，这说明 X 是一个 p-幂零群，矛盾。

Ⅱ) $N=N_1\times\cdots\times N_t$，这里 $N_1,\cdots,N_t$ 是 X 的极小正规子群，且对所有的 i,j，$|N_i|=|N_j|>p$（文献[10]A 章命题 4.13）。

Ⅲ) $N=C_X(N)=O_p(X)$ 且 $G=N\rtimes M$，其中 M 是 G 的极大子群，满足 $M_G\cap X=1$ 且 G/M_G 是非超可解群。

由Ⅰ)和 a)知，对 G 的包含于 X 的极小正规子群 R，有 $R\leqslant O_p(X)$ 且 X/R 是 p-幂零群。因为所有 p-幂零群组成的群类是饱和的群系[8]，所以 N 为 G 的包含于 X 的唯一的极小正规子群，且由 I)知，$N\not\leqslant\Phi(G)$，于是存在 G 的极大子群 M 使得 $G=N\rtimes M$，$M_G\cap X=1$。从而：

$$C_X(N)=X\cap C_G(N)=X\cap N(C_G(N)\cap M)=N(X\cap C_G(N)\cap M),$$

这里 $X\cap C_G(N)\cap M$ 正规于 M，且 $N\leqslant C_G(X\cap C_G(N)\cap M)$。因此 $X\cap C_G(N)\cap M$ 正规于 G，这说明 $X\cap C_G(N)\cap M\leqslant X\cap M_G=1$，于是由文献[10]A 章 10.6 知，$N=C_X(N)=O_p(X)$。又由 I)知，$|N|>p$，所以 G/M_G 为非超可解的。

令 $B=M\cap X$，V 为 P 的极大子群，且对 B 的某个西洛 p-子群 B_p，有 $B_p\leqslant V$。设 W 和 $C\leqslant V$ 是 G 的子群，满足 $VW=G$，$V\cap W=C\cap W$，其中 C 在 G 中是 $\mathscr{U}$-拟置换的。令 $T=W\cap X$，则有：

Ⅳ) $V\cap T\neq 1$。

假设 $V\cap T=1$，则对 T 的某个西洛 p-子群 T_p，有 $|T_p|=p$。因为 $(|X|, p-1)=1=(|T|, p-1)$，所以 T 是 p-幂零的，因此 $T\leqslant N_G(T_{p'})$，其中 $T_{p'}$ 是 T 的霍尔 p'-子群。由 I)知，$X/N\simeq B$ 是 p-幂零的，且对 B 的某个霍尔 p'-子群 $B_{p'}$，有 $B\leqslant N_G(B_{p'})$，显然 $B_{p'}$ 和 $T_{p'}$ 都是 X 的霍尔 p'-子群。因为 X 是 p-可解的，所以由文献[11]第六章 1.7 知，$B_{p'}$ 和 $T_{p'}$ 在 X 中共轭。令 $x\in X$ 且 $B_{p'}=(T_{p'})^x$，如果 $T^x\leqslant B$，则 $X=VT=VT^x=VB$。但是因为 $B_p\leqslant V$，所以这是不可能的。因此 $T^x\not\leqslant B$，$B<Y=\langle T^x, B\rangle\leqslant N_G(B_{p'})$，从而 $N_0=Y\cap N\neq 1$，显然 N_0 正规于 Y 且 $B_{p'}\leqslant C_G(N_0)$，于是对 N_0 的某个极小子群 L，有 $B\leqslant N_X(L)$，所以 L 正规于 X，由文献[10]A 章 3.2 知，$|N_i|=p=|L|$，$i=1,\cdots,t$，这与Ⅱ)矛盾。

Ⅴ) 最后的矛盾。由Ⅲ)知，对所有的 $x\in G$，对 (M^x, G) 在 G 中是 $\mathscr{U}$-伪正规的，所以 C 覆盖或者避开 (M^x, G)。如果对某个 x，有 $CM^x=G$，则 $CM=G$，且 $X=CB=VB=N\rtimes B$，但是因为 $B_p\leqslant V$，所以这是不可能的。因此对每一个 $x\in G$ 都有 $C\leqslant M^x$，于是 $C\leqslant M_G$，又因为 $V\cap T\neq 1$，所以 $C\neq 1$，因此 $X\cap M_G\neq 1$，这与Ⅲ)矛盾。

e) 由 a)和 d)直接可得 G 是非 p-可解群。

f) $X=G$，如果 N 是 G 的极小正规子群，则 N 是非交换的，且 $G=NP$，N 是 G 唯一的极小正规子群，因此 $C_G(N)=1$。

由引理 5a)知，假设的条件对 (X, X) 仍然成立，所以当 $X\neq G$ 时，由 (G, X) 的选择知，X 是 p-幂零的，这与 c)矛盾，所以 $X=G$。类似的，当 $NP\neq G$ 时，NP 是 p-幂零的，因此 $N\leqslant O_p(G)$ 或者 $N\leqslant O_{p'}(G)$，由 a)和 d)可知这是不可能的，因此 $G=NP$，故 G/N 是 p-群，于是 N 是 G 唯一的极小正规

子群，显然 N 是非交换的，所以 $C_G(N)=1$。

g) 最后的矛盾。假设 $X=G$ 有非单位的 K-$\mathcal{U}$-次正规 p-子群 C，则由 f)和引理4知，C 在 CN 中次正规，因此 $C\leqslant O_p(CN)$，这表明 $C\cap N=1$。由文献[10]A 章 14.3 知，$N\leqslant N_{CN}(C)$，$NC=N\times C$，于是 $C\leqslant C_G(N)$，这与 f)矛盾，所以 G 没有非单位的 K-$\mathcal{U}$-次正规 p-子群，因此 P 的每一个极大子群 V 在 G 中有补充 T，且对 T 的西洛 p-子群 T_p，总有 $|T_p|=p$。因为$(|T|,p-1)=1$，所以 T 是 p-幂零的，因此 P 的每一个极大子群在 G 中都有一个 p-幂零的补充，由引理9知，G 是 p-幂零的，矛盾完成了定理3的证明。

定理4 设 $X\leqslant E$ 是 G 的正规子群，p 为整除 $|X|$ 的素数且$(|X|,p-1)=1$，令 P 为 X 的西洛 p-子群。如果 X 的每一个西洛子群的极大子群在 G 中是 $P_{\mathcal{U}}$-可补充的，且 $X=E$ 或者 $X=F^*(E)$，则 $E\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，其中 $F^*(E)$是 E 的所有正规拟幂零子群的直积[12]。

证明：假设定理4不成立，设 G 为满足 $|G|+|E|$ 最小的极小阶反例。令 $F=F(E)$，$F^*=F^*(E)$，p 为整除 $|F|$ 的素数，P 为 F 的西洛 p-子群。则有：

a) 如果 L 是 G 的极小正规子群且 $L\leqslant F$，则 L 是非循环的。

假设 $|L|=q$ 为一个素数，则 $G/C_G(L)$是循环的，令 $C_0=C_E(L)=C_G(L)\cap E$，则假设的条件对 $(G/L,C_0/L)$成立。事实上，由文献[13]引理2.11知，$L\leqslant Z(C_0)$ 且 $L\leqslant F^*\leqslant C_0$，又由文献[12]第十章13.6知，$F^*(C_0/L)=F^*(C_0)/L=F^*/L$，因此由引理5b)和 c)知假设的条件对$(G/L,C_0/L)$仍然成立，这表明 $C_0/L\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G/L)$。另一方面，由 G-同构 $E/C_0=E/E\cap C_G(L)\simeq C_G(L)E/C_G(L)$，可得 $E/C_0\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G/C_0)$，从而 $E\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，矛盾。

b) 若 $X\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，则 $X=F^*$。

假设 $X\not\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，令 q 为整除 $|X|$ 的最小素数，则由定理3知，X 是 q-幂零的。设 $W=O_{q'}(X)$ 是 X 的霍尔 q'-子群，由引理5a)和 c)知，假设的条件对(W,W)和$(G/W,X/W)$都成立。当 $W\neq 1$ 时，$W\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$且 $X/W\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G/W)$，因此由文献[10]A 章 9.13 知，$X\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，矛盾。因此 $W=1$，易知 X 是 q-群，又由定理3，$X\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，所以由 G 的选择知，$X=F^*$。

c) $F^*=F$ 且 $C_G(F)=C_G(F^*)\leqslant F$。

由 b)知，F^* 是可解的，且 $F^*=F$，从而 $C_G(F)=C_G(F^*)\leqslant F$。

d) E 不可解且 $E=G$。

假设 E 是可解的，则由 b)和文献[8]定理A知，$E\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，这与$(G,E)$的选择矛盾，因此 E 不可解。若 $E\neq G$，则由(G,E)的选择知，$E\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(E)$且 E 是可解的，矛盾。

e) G 的每一个包含 F 的正规真子群 K 都是可解的。

由文献[12]第十章知，$F^*=F\leqslant F^*(K)\leqslant F^*(E)$，这说明 $F^*(K)=F^*$。由引理5，假设的条件对(K,K)成立，因此$(G,G)=(G,E)$的极小选择说明 $K\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G)$，从而 K 是可解的。

f) $\Phi(G)\cap P\neq 1$ 且对于 G 的每一个包含于 $\Phi(G)\cap P$的极小正规子群 L，$F^*(E/L)\neq F^*/L$。

假设 $\Phi(G)\cap P=1$。由引理6知，P 是 G 的一些极小正规子群的直积，因此由引理7，P 有一个正规于 G 的极大子群 M。又由文献[10]A 章 9.13 知，G 有一个包含于 P 的 p 阶极小正规子群 L，这与 a)矛盾，因此 $\Phi(G)\cap P\neq 1$。令 $L\leqslant\Phi(G)\cap P$，这里 L 是 G 的极小正规子群。假定 $F^*(E/L)=F^*/L$，则假设的条件对 G/L 成立，由 G 的选择知，$E/L\leqslant Z_{\Phi\mathcal{U}}(G/L)$，这表明 $L\leqslant\Phi(G)$，所以 $E\leqslant Z_{\Phi\mathrm{U}}(G)$，矛盾表明 $F^*(E/L)\neq F^*/L$。

g) 由 d)和 e)知，G 有唯一的包含 F 的极大子群 M，且 M 是可解的，G/M 为非交换单群。

h) G/F 为非交换单群，且对于 G 的某个包含于 $\Phi(G)\cap P$ 的极小正规子群 L，G/L 为拟幂零群。

由 f)知，$F^*(G/L)=F^*(E/L)\neq F^*/L$，于是 $F/L=F^*/L$ 是 $F^*(G/L)$的真子群，且 $F^*(G/L)=F(G/L)E(G/L)$，这里 $E(G/L)$是 G/L 的 layer。又由 g)知，G 的每一个主序列都只有一个非交换的因子，但是因为 $E(G/L)/Z(E(G/L))$是一些非交换单群的直积，所以 $F^*(G/L)=G/L$ 是一个拟幂零群。因为 $F(G/L)\cap E(G/L)=Z(E(G/L))$，所以 $G/F\simeq(G/L)/(F/L)$是非交换单群。

i) $F^*=P$.

假设 $P\neq F$，令 Q 为 F 的西洛 q-子群，其中 $q\neq p$，则由 G-同构 $PQ/P\simeq Q$ 和断言 h)知，$Q\leqslant Z_\infty(G)$，这与 a)矛盾。

j) 设 p 是 $|G|$ 的极大素因子，则 G 的每一个西洛 q-子群 $Q(q\neq p)$是交换的。

令 $D=PQ$，由 d)知，$D<G$，又由定理3知，$D=PQ$ 是超可解群。因为 $O_q(D)\leqslant C_G(P)$且 $C_G(P)\leqslant P$，所以 $O_q(D)=1$。因此 $p>q$ 且 $F(D)=P$，所以 p 是 $|G|$ 的极大素因子且 $D/F(D)\simeq Q$ 是交换的。

k）最后的矛盾。由 d）和 Feit-Thompson's 定理知，$2\|G|$。由 j），G/P 的西洛 2-子群是交换的。由文献[12]第Ⅺ章 13.7 知，G/P 同构于下列几种群之一：$PSL(2,2^f)$；$PSL(2,q)$，当 8 整除 $q-3$ 或者 $q-5$；Janko 群 J_1；Ree 群。此时 G/P 有一个非交换的超可解子群 V/P，且 p 不整除 $|V/P|$。于是由 c）和 i），$C_V(P)\leqslant P$，$P=F(V)$。另一方面，由定理 3 知，V 是超可解的，因此 V/P 是交换的，矛盾。

3 结　语

本文利用有限群的 $P_{\mathscr{F}}$-可补充子群的性质证明几个定理，即定理 1 和定理 2 等，得到有限群 G 的 2'-超可解的、2-幂零性的一些充分条件。在后续研究中，将定理中的某些条件加以改进，观察能否得到有限群 G 的幂零性的一些结论，如考虑将定理 3 中的条件改为有限群 G 的正规子群的 Sylow-子群的极大子群在 G 中的是 $P_{\mathscr{F}}$-可补充的，在此条件下研究子群的 $P_{\mathscr{F}}$-可补充性与有限群幂零性的关系。

参考文献：

[1] Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal[J]. Mathematische Zeitschrift，1970，116(1)：15-17.

[2] Ballester-bolinches A，Guo X. On complemented subgroups of finite groups[J]. Chinese Annals of Mathematic，2001，22(2)：161-166.

[3] Ore O. Contributions to the theory of groups of finite order[J]. Duke Mathematical Journal，1939，5(2)：431-460.

[4] Stonehewer S E. Permutable subgroups of infinite groups[J]. Mathematische Zeitschrift，1972，125(1)：1-16.

[5] Guo W B，Skiba A N. Finite groups with systems of Σ-embedded subgroups[J]. Science China Mathematics，2011，54(9)：1909-1926.

[6] Ballester-bolinches A，Ezquerro L M. Classes of Finite Groups[M]. Netherlands：Springer，2006.

[7] Kegel O H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen，die den Subnormalteilerverband echt enthalten[J]. Archiv Der Mathematik，1978，30(1)：225-228.

[8] Guo W，Skiba A N. On FΦ^*-hypercentral subgroups of finite groups[J]. Journal of Algebra，2012，372：275-292.

[9] Shemetkov L A. Formations of Finite Groups[M]. Moscow：Nauka，1978.

[10] Doerk K，Hawkes T. Finite Soluble Groups[M]. Berlin：Walter de Gruyter，1992：517-597.

[11] Huppert B. Endliche Gruppen：Ⅰ[M]. Berlin-Heidelberg：Springer-Verlag，1967.

[12] Huppert B，Blackburn N. Finite Groups：Ⅲ[M]. Berlin：Springer-Verlag，1982.

[13] Skiba A N. On two questions of L. A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups[J]. Journal of Group Theory，2010，13(6)：841-850.

On $P_{\mathscr{F}}$-supplemented subgroups of finite groups

WANG Haoran，*XIAO Lingling*，*YI Xiaolan*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：Let A be a subgroup of G. Then we say A is $P_{\mathscr{F}}$-supplemented in G. If G has subgroups T and C ($G=AT$，$T\cap A=T\cap C$)，C is $\mathscr{F}$-quasipermutable in G. The influence of $P_{\mathscr{F}}$-supplemented subgroups on supersolvability and nipotency of finite group is investigated by using the method of minimal counterexample. Since every minimal subgroup of G_p (p is an odd) is $P_{\mathscr{F}}$-supplemented in G，G is the sufficient condition for 2'-super solvable.

Key words：finite group；$P_{\mathscr{F}}$-supplemented subgroup；saturated formation；super solvable group；p-nilpotent group

（责任编辑：康　锋）