浙江理工大学学报(自然科学版),第37卷,第6期,2017年11月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 37, No. 6, Nov. 2017

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2017.11.019

# 带有线性饱和治疗函数的 *SIR* 模型动力学研究

周 康,路秋英
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

**摘 要**:推广了一类具有双线性发生率函数和饱和治疗函数的 *SIR* 传染病模型,研究了其地方性平衡点的存在性、稳定性及后向分支现象。研究表明:当基本再生数小于1时,若饱和治疗率较小,则系统发生后向分支。同时证明了系统至多存在4个平衡点。

**关键词**:治疗函数;*SIR* 传染病模型;后向分支;基本再生数

**中图分类号**:O193　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2017) 06-0874-07

## 0 引 言

传染病模型的研究有助于人们发现疾病的传染规律并对其加以控制。早在1927年,Kermack等[1]提出了著名的 *SIRS* 疾病传染模型,其中 $S$ 代表易感染人群,$I$ 代表可将疾病传染给易感者的感染者人群,$R$ 代表获得临时免疫的恢复人群。自此,诸多此类研究集中在探索更加符合现实规律的传染病模型及其动力学行为分析,提出了各种形式的发生率函数,如双线性发生率函数 $\lambda SI$[2-3]、饱和发生率函数[4-8]及其他特殊的非线性发生率函数[9]。其他更为一般形式的发生率函数,如 $kI^pS/(1+\alpha I^q)$[10]或 $\lambda I^pS^q$[11-12]也已被提出并大量研究。通常地,与经典的双线性发生率相比较,非线性发生率函数更能反映感染者的行为改变和拥挤效应,同时也导致了更加丰富和复杂的动力学行为,如后向分支的发生。基本再生数 $R_0$ 是经典传染病模型判断疾病是否灭绝的一个重要变量。当基本再生数大于1时,疾病可持久存在;当基本再生数小于或等于1时,疾病灭绝。此时系统从无病平衡点到地方性平衡点的分支是向前的。而当后向分支发生时,即使基本再生数 $R_0$ 小于1,模型仍表现出多个地方性平衡点,基本再生数是否小于1不再直接决定疾病可否被消除。

对于疾病传染模型,研究的目的不仅是掌握疾病的发生机制和发展规律,更需要提出有效方案达到控制疾病快速传播进而消除疾病,所以需要在模型中考虑治疗函数。Wang[4]分析了带有如下治疗函数的 *SIR* 模型,即

$$h(I)=\min(rI,rI_0)=\begin{cases} rI, 0\leqslant I\leqslant I_0 \\ rI_0, I>I_0 \end{cases},$$

其中:$r>0$,表示感染者的治疗能力。该治疗函数意味着治疗率与感染者的数量成正比当且仅当治疗能力还未达到最大时,否则将采取最大治疗能力。

本文建立并研究的传染病模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-dS-\lambda SI \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\lambda SI-(d+\gamma+\varepsilon)I-h(I), \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I+h(I)-dR \end{cases}$$

其中:$A>0$ 为人口的补充率,$d>0$ 为自然死亡率,$\gamma>0$ 为自然恢复率,$\varepsilon>0$ 表示疾病致死率。$h(I)$ 为如下改进的治疗函数:

$$h(I)=\begin{cases} rI+k, 0\leqslant I\leqslant I_0 \\ m, I>I_0 \end{cases},$$

收稿日期:2017-06-25　　网络出版日期:2017-10-10
基金项目:国家自然科学基金项目(11101370);浙江理工大学"521"人才培养计划(11430132521304)
作者简介:周 康(1993-),男,江苏宿迁人,硕士研究生,主要从事常微分方程与动力系统方面的研究。
通信作者:路秋英,E-mail:qiuyinglu@163.com

其中:$m=rI_0+k$,代表饱和治疗率;$k$ 表示常态下的正常预防能力。

由于第一个和第二个方程与 $R$ 是独立的,所以此处可以对系统进行降维处理,简化为如下的二维系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-dS-\lambda SI\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\lambda SI-(d+\gamma+\varepsilon)I-h(I)\end{cases}\tag{1}$$

本文主要研究系统(1)的后向分支及全局动力学性质,得到了其地方性平衡点的存在性,稳定性及后向分支现象。研究证明:当基本再生数小于 1 时,若饱和治疗率较小,则系统可发生后向分支;同时证明了系统至多可存在 4 个平衡点。

当 $r=k=I_0=0$ 时,即文献[13]的情况;当 $k=0$ 时,即文献[4]的情况。

## 1　平衡点及后向存在性

首先考虑系统(1)的平衡点。当感染者数量 $I=0$ 时,系统(1)存在唯一的无病平衡点 $E_0=(A/d,0)$。对于地方性平衡点,满足:

$$\begin{cases}A-dS-\lambda SI=0\\ \lambda SI-(d+\gamma+\varepsilon)I-h(I)=0\end{cases}\tag{2}$$

记基本再生数

$$R_0=\frac{\lambda A}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}。$$

**情况 1:** 当 $0<I\leqslant I_0$ 时,方程(2)可化为:

$$\begin{cases}A-dS-\lambda SI=0\\ \lambda SI-(d+\gamma+\varepsilon+r)I-k=0\end{cases}\tag{3}$$

由式(3)的第一个方程中求出 $S=A/(d+\lambda I)$,将其带入式(3)的第二个方程并化简可得:

$$aI^2+bI+c=0\tag{4}$$

其中:

$$\begin{cases}a=\lambda(d+\gamma+\varepsilon+r)>0\\ b=d(1-R_0)(d+\gamma+\varepsilon+r)+\lambda k,\\ c=kd>0\end{cases}$$

则这个方程可能存在正解:

$$\begin{cases}I_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\ I_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\tag{5}$$

其中

$$\Delta=b^2-4ac=[d(1-R_0)(d+\gamma+\varepsilon+r)+\lambda k]^2-4\lambda kd(d+\gamma+\varepsilon+r)\tag{6}$$

从 $I_i(i=1,2)$ 的表达式可以看出,当 $b\geqslant 0$ 时,显然有 $I_i<0$,故只需考虑 $b<0$ 的情况。$b<0$ 等价于

$$R_0>1+\frac{\lambda k}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}\tag{7}$$

容易求得 $\Delta\geqslant 0$ 等价于:

$$R_0\geqslant 1+\frac{\lambda k}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}+\frac{2\sqrt{\lambda kd(d+\gamma+\varepsilon+r)}}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}\doteq\hat{P}_0\tag{8}$$

或:

$$R_0\leqslant 1+\frac{\lambda k}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}-\frac{2\sqrt{\lambda kd(d+\gamma+\varepsilon+r)}}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}。$$

容易判断若使式(7)和式(8)同时成立的前提即为 $R_0\geqslant\hat{P}_0$,即式(8)成立。此时方程(4)有两个正解 $I_i$ $(i=1,2)$。设 $S_i=A/(d+\lambda I_i)$ 且 $E_i=(S_i,I_i)(i=1,2)$,若 $I_i\leqslant I_0$,则 $E_i$ 就为系统(1)的地方性平衡点。

现在考虑 $I_1>I_0$ 时的情况,一方面,由 $I_1$ 的定义,$I_1>I_0$ 等价于 $-b-\sqrt{\Delta}>2\lambda(d+\gamma+\varepsilon+r)I_0$,即:

$$-b-2\lambda(d+\gamma+\varepsilon+r)I_0>\sqrt{\Delta}>0。$$

可以得到:

$$R_0>1+\frac{\lambda k}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}+\frac{2\lambda I_0}{d}\doteq\hat{P}_1\tag{9}$$

另一方面,对 $-b-2\lambda(d+\gamma+\varepsilon+r)I_0>\sqrt{\Delta}$ 两边平方并化简即可得到:

$$R_0<1+\frac{k(d+\lambda I_0)}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)I_0}+\frac{\lambda I_0}{d}\doteq\hat{P}_2\tag{10}$$

因此,$I_1>I_0$ 当且仅当式(9)和式(10)同时成立,从而当 $R_0\leqslant\hat{P}_1$ 或 $R_0\geqslant\hat{P}_2$ 时,$I_1\leqslant I_0$ 成立。

类似的,对 $I_2>I_0$ 进行讨论,可得当式(9)成立或者 $\hat{P}_2<R_0\leqslant\hat{P}_1$ 时,$I_2>I_0$ 成立。从而当 $R_0\leqslant\min(\hat{P}_1,\hat{P}_2)$ 时,$I_2\leqslant I_0$。

由于

$$\hat{P}_1-\hat{P}_2=\frac{\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)-kd}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)I_0},$$

故 $\hat{P}_1<\hat{P}_2$ 等价于 $dk>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$。因此有如下定理:

**定理 1**　当 $R_0\geqslant\hat{P}_0$ 时,对于系统(1)的两个地方性平衡点 $E_1$,$E_2$,

a) 若 $dk\leqslant\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$,$E_1$ 始终存在。当 $R_0\leqslant\hat{P}_2$ 时 $E_2$ 存在,当 $R_0>\hat{P}_2$ 时 $E_2$ 不存在。

b) 若 $dk>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$,当 $R_0\leqslant\hat{P}_1$ 时 $E_1$ 与 $E_2$ 均存在。

c) 若 $dk>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$，当$\hat{P}_1<R_0<\hat{P}_2$时 $E_1$ 与 $E_2$ 均不存在，当 $R_0\geqslant\hat{P}_2$ 时 $E_1$ 存在，$E_2$ 不存在。

**情况 2:**当 $I>I_0$ 时，方程(2)可化为：

$$\begin{cases}A-dS-\lambda SI=0\\ \lambda SI-(d+\gamma+\varepsilon)I-m=0\end{cases}\tag{11}$$

对方程(11)的正的地方性平衡点的讨论与方程(3)类似。设方程(11)的两个正的地方性平衡点为 $E_3$，$E_4$，可得如下定理：

**定理 2** 当 $R_0\geqslant\widetilde{P_0}$时，对于系统(1)的两个地方性平衡点 $E_3$，$E_4$，

a) 若 $dm\leqslant\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)$，$E_3$ 不存在，且当 $R_0\leqslant\hat{P}_2$时 $E_4$ 不存在，当 $R_0>\hat{P}_2$时 $E_4$ 存在。

b) 若 $dm>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)$，当$\hat{P}_3<R_0<\hat{P}_2$时 $E_3$ 与 $E_4$ 均存在。

c) 若 $dm>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)$，当 $R_0\leqslant\hat{P}_3$时 $E_3$ 与 $E_4$ 均不存在，当 $R_0\geqslant\hat{P}_2$时 $E_3$ 不存在，$E_4$ 存在。

其中：

$$\widetilde{P_0}=1+\frac{\lambda m-dr}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}+\frac{2\sqrt{\lambda md(d+\gamma+\varepsilon)}}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)},$$

$$\hat{P}_3=1+\frac{\lambda m-dr}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}+\frac{2\lambda(d+\gamma+\varepsilon)I_0}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)}.$$

**推论 1** 当 $R_0<1$ 时，若 $dm>\lambda I_0^2(d)+\gamma+\varepsilon$ 且 $\widetilde{P_0}<1$，系统(1)将会产生一个后向分支。

**证明** 由定理 2 的 *b*)即可得到此推论。

**推论 2** 若 $\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)<dk<dm\leqslant\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$，当 $\max\{\widetilde{P_0},\hat{P}_0\}<R_0<\hat{P}_2$时，系统(1)存在三个地方性平衡点 $E_1$，$E_3$，$E_4$。

**证明** 由定理 1 的 a)、定理 2 的 b)以及 $m=rI_0+k>k$ 可知，若 $\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)<dm\leqslant\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$，当 $\max\{\widetilde{P_0},\hat{P}_0,\hat{P}_3\}<R_0<\hat{P}_2$时，$E_1$，$E_3$，$E_4$ 都存在。若 $dm>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)$，显然有$\widetilde{P_0}>\hat{P}_3$成立。注意到：

$$\hat{P}_0-\widetilde{P_0}=\frac{r(d-\lambda I_0)+2\sqrt{\lambda kd(d+\gamma+\varepsilon+r)}-2\sqrt{\lambda kd(d+\gamma+\varepsilon+r)+\lambda dr(I_0(d+\gamma+\varepsilon)-k)}}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)},$$

故 $d<\lambda I_0$ 且 $k<I_0(d+\gamma+\varepsilon)$时有$\hat{P}_0<\widetilde{P_0}$，将 $m=rI_0+k$ 代入 $dm\leqslant\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$中可得 $d<\lambda I_0$，若 $k<I_0(d+\gamma+\varepsilon)$此时必有 $\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)>dk$，与题设矛盾，故得证。

**注 1** 系统(1)至多存在 4 个平衡点。

**注 2** 系统(1)不可能存在 4 个地方病平衡点。

这是因为若 $dk>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$，由式(8)和式(9)可看出$\hat{P}_0>\hat{P}_1$，由定理 1 的 *b*)可知此时 $E_1$ 与 $E_2$ 均不存在。若 $dk\leqslant\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon+r)$，由推论 2 可知系统(1)至多存在 3 个地方性平衡点。

## 2 平衡点局部稳定性

首先，讨论 $E_1$ 与 $E_2$ 的稳定性。

令

$$\begin{cases}\varphi(S,I)=A-dS-\lambda SI\\ \psi(S,I)=\lambda SI-(d+\gamma+\varepsilon+r)I-k\end{cases},$$

可得方程(2)的 Jaccobi 矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\varphi_S & \varphi_I\\ \psi_S & \psi_I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d-\lambda I & -\lambda S\\ \lambda I & \lambda S-(d+\gamma+\varepsilon+r)\end{pmatrix}\tag{12}$$

**定理 3** 当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 $E_0$ 是局部渐近稳定的。若 $R_0>1$，则 $E_0$ 是不稳定的。

**证明** 在 $E_0$ 点处，把 $S=A/d$，$I=0$ 代入式(12)中可得

$$\boldsymbol{J}(E_0)=\begin{pmatrix}-d & -\dfrac{\lambda A}{d}\\ 0 & \dfrac{\lambda A}{d}-(d+\gamma+\varepsilon+r)\end{pmatrix},$$

求得：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(E_0))&=-d+\frac{\lambda A}{d}-(d+\gamma+\varepsilon+r)\\&=-d+(R_0-1)(d+\gamma+\varepsilon+r),\\ \det(\boldsymbol{J}(E_0))&=-d(\frac{\lambda A}{d}-(d+\gamma+\varepsilon+r))\\&=-d(R_0-1)(d+\gamma+\varepsilon+r).\end{aligned}$$

显然当$R_0<1$时，有 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{J}(E_0))<0$，$\det(\boldsymbol{J}(E_0))>0$，此时 $E_0$ 是局部渐近稳定的。相反，若 $R_0>1$，则 $E_0$ 是不稳定的。证毕。

**定理 4** 若系统(1)的地方病平衡点 $E_1=(S_1,I_1)$存在，则其为一个鞍点。

**证明** 由于 $S_i$，$I_i(i=1,2)$为$\begin{cases}\varphi(S,I)=0\\ \psi(S,I)=0\end{cases}$的解，所以 $A-dS_i=\lambda S_iI_i=(d+\gamma+\varepsilon+r)I_i+k$，可以得到：

$$S_i=\frac{A-(d+\gamma+\varepsilon+r)I_i-k}{d}。$$

将其代入式(12)计算得:

$$\det(J(E_1))=-\sqrt{\Delta},\qquad \det(\boldsymbol{J}(E_2))=\sqrt{\Delta}。$$

由 $\det(J(E_1))=-\sqrt{\Delta}<0$ 知 $E_1$ 为一个鞍点。证毕。

由定理 4 可知 $\det(J(E_2))=\sqrt{\Delta}>0$,为了探究 $E_2$ 的稳定性,定义

$$\Lambda=\frac{\lambda k}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)},$$

$$Q_1=-\frac{d(2d+\gamma+\varepsilon+r)-\lambda(A-k)}{\lambda(2d+\gamma+\varepsilon+r)},$$

$$Q_2=-\frac{2d}{2d+\gamma+\varepsilon+r}+\frac{\gamma+\varepsilon+r}{2d+\gamma+\varepsilon+r}(R_0-\Lambda-1),$$

$$Q_3=\lambda k^2-[(d+\varepsilon+\gamma+r)(2d+\varepsilon+\gamma+r)+2\lambda A]k+\lambda A^2-Ad^2-Ad(d+\varepsilon+\gamma+r)。$$

**定理 5**　假定 $E_2$ 存在,

a) 若 $\lambda k>\lambda A-3d^2-d(\varepsilon+\gamma+r)-2d^3/(\varepsilon+\gamma+r)$,或

$$\begin{cases}\lambda k<\lambda A-3d^2-d(\varepsilon+\gamma+r)-\dfrac{2d^3}{\varepsilon+\gamma+r}\\ \lambda k<\lambda A+\dfrac{1}{2}\left[(d+\gamma+\varepsilon+r)(2d+\gamma+\varepsilon+r)\left(1-\sqrt{1+\dfrac{4\lambda A}{(d+\gamma+\varepsilon+r)^2}}\right)\right]\end{cases}\tag{13}$$

则 $E_2$ 局部渐近稳定;

b) 若

$$\begin{cases}\lambda k<\lambda A-3d^2-d(\varepsilon+\gamma+r)-\dfrac{2d^3}{\varepsilon+\gamma+r}\\ \lambda k>\lambda A+\dfrac{1}{2}\left[(d+\gamma+\varepsilon+r)(2d+\gamma+\varepsilon+r)\left(1-\sqrt{1+\dfrac{4\lambda A}{(d+\gamma+\varepsilon+r)^2}}\right)\right]\end{cases}\tag{14}$$

则 $E_2$ 不稳定。

**证明**　可以计算出

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))&=-d-\lambda I_2+\lambda S_2-(d+\gamma+\varepsilon+r)=\\&-\frac{\lambda(2d+\gamma+\varepsilon+r)}{d}I_2-\\&\frac{d(2d+\gamma+\varepsilon+r)-\lambda(A-k)}{d}\end{aligned}\tag{15}$$

由式(15),当 $d(2d+\gamma+\varepsilon+r)-\lambda(A-k)\geqslant 0$ 时,$\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))<0$。假设

$$d(2d+\gamma+\varepsilon+r)-\lambda(A-k)<0\tag{16}$$

当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))=0$ 时,可得

$$I_2=Q_1\tag{17}$$

由式(5)及 $Q_1$ 的定义可得:

$$\frac{-d(d+\varepsilon+\gamma+r)-\lambda k+\lambda A+\sqrt{\Delta}}{2\lambda(d+\varepsilon+\gamma+r)}=-\frac{d(2d+\gamma+\varepsilon+r)-\lambda(A-k)}{\lambda(2d+\gamma+\varepsilon+r)}。$$

由式(6)知 $\Delta=d^2(d+\gamma+\varepsilon+r)^2[(R_0-1-\Lambda)^2-4\Lambda]$。将 $\lambda A-\lambda k=d(d+\varepsilon+\gamma+r)(R_0-\Lambda)$ 以及 $\Delta$ 代入化简可得

$$\sqrt{(R_0-\Lambda-1)^2-4\Lambda}=Q_2\tag{18}$$

若 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))=0$ 不可能,则必有 $Q_2<0$,化简可得

$$\Lambda>R_0-1-\frac{2d}{\gamma+\varepsilon+r}\tag{19}$$

假设:

$$\Lambda\leqslant R_0-1-\frac{2d}{\gamma+\varepsilon+r}\tag{20}$$

对方程(17)两边平方并化简可得:

$$\lambda k^2-[(d+\varepsilon+\gamma+r)(2d+\varepsilon+\gamma+r)+2\lambda A]r+\lambda A^2-Ad^2-Ad(d+\varepsilon+\gamma+r)=0\tag{21}$$

即 $Q_3=0$。由此解得:

$$k=A+\frac{1}{2\lambda}\left[(d+\gamma+\varepsilon+r)(2d+\gamma+\varepsilon+r)\left(1\pm\sqrt{1+\frac{4\lambda A}{(d+\gamma+\varepsilon+r)^2}}\right)\right]。$$

由不等式(16)可知:

$$0<\frac{d(2d+\gamma+\varepsilon+r)}{\lambda}<A-k=$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\left[(d+\gamma+\varepsilon+r)(2d+\gamma+\varepsilon+r)\left(1\pm\sqrt{1+\frac{4\lambda A}{(d+\gamma+\varepsilon+r)^2}}\right)\right].$$

所以

$$k=A+\frac{1}{2\lambda}\left[(d+\gamma+\varepsilon+r)(2d+\gamma+\varepsilon+r)\left(1-\sqrt{1+\frac{4\lambda A}{(d+\gamma+\varepsilon+r)^2}}\right)\right]\tag{22}$$

因此,$\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))=0$ 的充要条件为 $E_2$ 存在且条件(20)和(22)均成立。

进一步可以发现:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))=-\frac{\lambda(2d+\gamma+\varepsilon+r)}{d}(I_2-Q_1)。$$

利用 $I_2$ 与 $Q_1$ 的定义可以得到:

$$I_2-Q_1=-\frac{d(\varepsilon+\gamma+r)}{2\lambda(2d+\gamma+\varepsilon+r)}(R_0-\Lambda-1)+\frac{d}{2\lambda}\sqrt{(R_0-\Lambda-1)^2-4\Lambda}+\frac{d^2}{\lambda(2d+\gamma+\varepsilon+r)},$$

因此,

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))=\frac{2d+\gamma+\varepsilon+r}{2}\left(Q_2-\sqrt{(R_0-\Lambda-1)^2-4\Lambda}\right)。$$

由条件(19)可知 $Q_2<0$,故 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))<0$,此时 $E_2$ 是渐近稳定的。

经计算,不等式(19)等价于 $\lambda k>\lambda A-3d^2-d(\varepsilon+\gamma+r)-2d^3/(\varepsilon+\gamma+r)$。注意到

$$[(R_0-\Lambda-1)^2-4\Lambda]-Q_2^2=\frac{4\lambda}{d(d+\gamma+\varepsilon+r)(2d+\gamma+\varepsilon+r)^2}Q_3,$$

故当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))<0$ 时有式(13)成立,此时 $E_2$ 是稳定的。当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}(E_2))>0$ 时有式(14)成立,此时 $E_2$ 是不稳定的。证毕。

类似地，可得 $E_3$，$E_4$ 的稳定性：

**定理 6** 若 $E_3$ 存在，则其为一个鞍点。

**定理 7** 假定 $E_4$ 存在，

a) 若 $\lambda m>\lambda A-3d^2-d(\varepsilon+\gamma)-2d^3/(\varepsilon+\gamma)$，或

$$\begin{cases}\lambda m<\lambda A-3d^2-d(\varepsilon+\gamma)-\dfrac{2d^3}{\varepsilon+\gamma}\\ \lambda m<\lambda A+\dfrac{1}{2}\left[(d+\gamma+\varepsilon)(2d+\gamma+\varepsilon)\left(1-\sqrt{1+\dfrac{4\lambda A}{(d+\gamma+\varepsilon)^2}}\right)\right]\end{cases}\tag{23}$$

则 $E_4$ 局部渐近稳定；

b) 若

$$\begin{cases}\lambda m<\lambda A-3d^2-d(\varepsilon+\gamma)-\dfrac{2d^3}{\varepsilon+\gamma}\\ \lambda m>\lambda A+\dfrac{1}{2}\left[(d+\gamma+\varepsilon)(2d+\gamma+\varepsilon)\left(1-\sqrt{1+\dfrac{4\lambda A}{(d+\gamma+\varepsilon)^2}}\right)\right]\end{cases}\tag{24}$$

则 $E_4$ 不稳定。

## 3 平衡点全局动力学

**定理 8** 无病平衡点 $E_0$ 是全局渐近稳定的当且仅当下列两个条件之一成立：

a) $R_0<1$ 且 $\widetilde{P_0}\geqslant 1$。

b) $R_0<1$，$\widetilde{P_0}<1$ 且 $\hat{P}_3\geqslant 1$。

**证明**

a) 由于 $\hat{P}_0>1$，故由定理 1 可知当 $R_0<1$ 时 $E_1$，$E_2$ 不存在。假设 $\widetilde{P_0}\geqslant 1$，由定理 2 可知当 $R_0<1$ 时 $E_3$，$E_4$ 不存在。

b) 由 a)可知当 $R_0<1$ 时 $E_1$，$E_2$ 不存在。若 $dm>\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)$，此时 $\hat{P}_3<\hat{P}_2$，故由定理 2 的 b)和 c)可知当 $R_0>\hat{P}_3$ 时 $E_3$，$E_4$ 存在。由于 $\hat{P}_3\geqslant 1$，所以 $R_0>\hat{P}_3$ 不可能成立，所以此时 $E_3$，$E_4$ 不存在。

从而，在定理 8 的条件下，地方病平衡点不存在。进一步，注意到关于总人口的微分方程为：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=A-dN-\varepsilon I,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\leqslant A-dN。$$

解得：

$$N(t)\leqslant N(0)\frac{A-\mathrm{e}^{-dt}}{d}\leqslant N(0)\frac{A}{d}\tag{25}$$

定义

$$\boldsymbol{\Omega}=\left\{(S,I,R)\,\middle|\,S,I,R\geqslant 0,S+I+R\leqslant N(0)\frac{A}{d}\right\},$$

则 $\boldsymbol{\Omega}$ 为该模型的一个正向不变集。因此，此模型的动力学行为都在 $\boldsymbol{\Omega}$ 里。由式(25)可知系统(1)的一切正解都是有界的，且非负 $S$ 轴关于系统(1)是正向不变的，非负 $I$ 轴排斥系统(1)的正解。由定理 3 可知当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 $E_0$ 是局部渐近稳定的。故通过 Poincaré-Bendixson 定理的推论，始于 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的每一个正解最终将趋于 $E_0$。证毕。

**引理 9**[4] 如果在单连通区域 $\boldsymbol{R}_+^2$ 内存在一个函数 $D$，在 $I\neq I_0$ 时 $D$ 满足

a) $D$ 连续可微；

b) $\dfrac{\partial(D\xi)}{\partial S}+\dfrac{\partial(D\zeta)}{\partial I}<0$。

则系统(1)不存在极限环。其中：

$$\begin{cases}\xi=A-dS-\lambda SI\\ \zeta=\lambda SI-(d+\gamma+\varepsilon)I-h(I)\end{cases}.$$

下面利用引理 9 的 Dulac 函数来分析系统(1)的极限环的存在性。

**定理 10** 当 $\lambda k<\lambda A<d(2d+\gamma+\varepsilon)$ 时，系统(1)无极限环。

**证明** 通过系统(1)的第一个方程我们可以看出系统(1)的所有正解都在区域 $\boldsymbol{\Gamma}$ 内，其中：

$$\boldsymbol{\Gamma}\doteq\left\{(S,I)\,\middle|\,0\leqslant S\leqslant\frac{A}{d}\right\}.$$

因此，假若系统(1)存在极限环，此极限环也必在 $\boldsymbol{\Gamma}$ 中。

取 Dulac 函数如下：

$$D=\begin{cases}\dfrac{1}{SI},I\leqslant I_0\\ \dfrac{1}{SI_0},I>I_0\end{cases}.$$

当 $0<I<I_0$ 时，

$$\frac{\partial(D\xi)}{\partial S}+\frac{\partial(D\zeta)}{\partial I}=\frac{k-A}{S^2I}\tag{26}$$

故当 $k<A$ 即 $\lambda k<\lambda A$ 时，式(26)为负。

当 $I>I_0$ 时，

$$\frac{\partial(D\xi)}{\partial S}+\frac{\partial(D\zeta)}{\partial I}=\frac{1}{S^2I_0}[-A+\lambda S^2-(d+\gamma+\varepsilon)S]\tag{27}$$

注意到当 $S=A/d$ 时，有 $-A+\lambda S^2-(d+\gamma+\varepsilon)S=-\dfrac{A[d(2d+\gamma+\varepsilon)-\lambda A]}{d^2}<0$，故当 $\lambda A<d(2d+\gamma+\varepsilon)$ 时，式(27)为负，从而系统(1)无极限环。证毕。

## 4 数值模拟

本节主要借助 Matlab 数值模拟验证了系统(1)后向分支发生的正确性。

**例 1**　取 $A=500, d=1, \varepsilon=0.01, \gamma=0.01, \lambda=0.01, r=4, m=25, I_0=6$，计算得

$R_0\approx 0.9960<1, \widetilde{P_0}\approx 0.4542<1, dm-\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)\approx 24.6328>0$，因此，系统(1)发生了一个后向分支(图 1)。

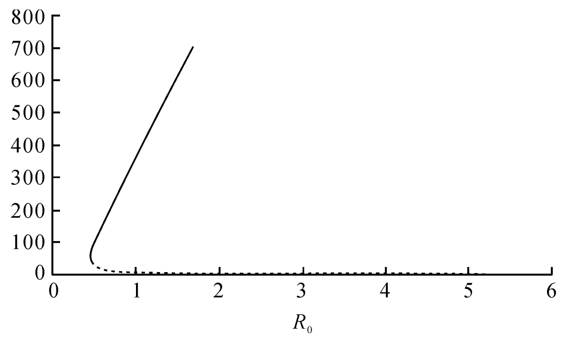


图 1　当 $A=500, d=1, \varepsilon=0.01, \gamma=0.01, \lambda=0.01, r=4, m=25, I_0=6$ 时的 $R_0$-$I$ 图

**例 2**　取 $A=500, d=1, \varepsilon=0.01, \gamma=0.01, \lambda=0.01, r=15, m=120, I_0=6$，计算得 $R_0\approx 0.3121<1, \widetilde{P_0}\approx 0.2767<1, dm-\lambda I_0^2(d+\gamma+\varepsilon)\approx 119.6328>0$，此时 $R_0<1$，那么由定理 1 可知 $E_1, E_2$ 均不存在。由推论 1 可知，存在不稳定鞍点 $E_3$。进一步，由 $\lambda m-\lambda A+3d^2+d(\varepsilon+\gamma)+\dfrac{2d^3}{(\varepsilon+\gamma)}\approx 99.22>0$，

根据定理 7 $a$)，$R_0\geqslant \hat{P}_2$，$E_4$ 为系统(1)的唯一稳定地方性平衡点。不稳定鞍点 $E_3$ 与稳定平衡点 $E_4$ 见图 2，唯一稳定地方性平衡点 $E_4$ 见图 3。

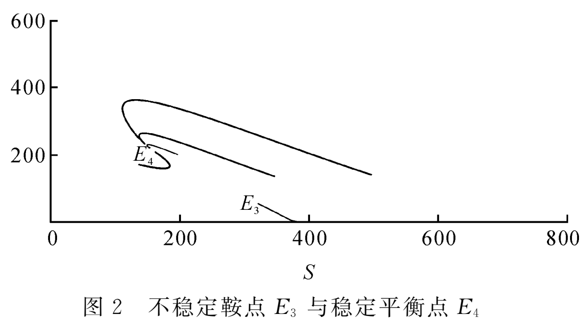


图 2　不稳定鞍点 $E_3$ 与稳定平衡点 $E_4$

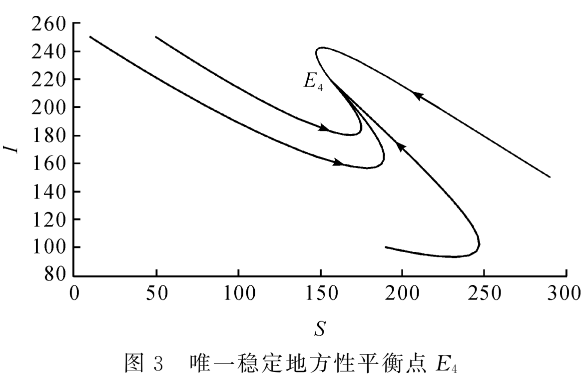


图 3　唯一稳定地方性平衡点 $E_4$

## 5　结　语

现代社会，预料某种疾病的诞生并进行有效预防非常重要，例如肝炎、流行性出血热等传染疾病一旦爆发，人们不仅需要掌握疾病的传染规律，同时需要对疾病开展有效的控制和预防。本文研究了一类带有双线性发生率函数以及饱和治疗函数的 $SIR$ 传染病模型。该模型提出了常态预防的概念，即在某种疾病还未发生感染的情况下，同样保持固定的治疗率以保证对疾病的有效预防。研究表明，模型至多存在 4 个平衡点，并给出了各平衡点的稳定性分析。同时，研究发现，当基本再生数小于 1 且饱和治疗率较小时，模型发生后向分支。因此，通过调整参数控制基本再生数小于 1，并不能像其他经典的传染病模型一样消除疾病。此种情况下，需要调整特定的参数使疾病稳定在一个较低的感染者水平。

**参考文献：**

[1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1927, 115a: 700-721.

[2] WEI J J, CUI J A. Dynamic of SIS epidemic model with the standard incidence rate and saturated treatment function[J]. International Journal of Biomathematics, 2012, 5(3): 1-18.

[3] HU Z X, LIU S, WANG H. Backward bifurcation of an epidemic model with standard incidence rate and treatment rate[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2008, 9(5): 2302-2312.

[4] WANG W D. Backward bifurcation of an epidemic model with treatment[J]. Mathematical Biosciences, 2006, 201(1/2): 58-71.

[5] ZHANG X, LIU X N. Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2008, 348(1): 433-443.

[6] ECKALBAR J C, ECKALBAR W L. Dynamics of an epidemic model with quadratic treatment[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2011, 12(1): 320-332.

[7] XIAO Y J, ZHANG W P, DENG G F, et al. Stability and bogdanov-takens bifurcation of an sis epidemic model with saturated treatment function [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(1): 1-14.

[8] ZHOU T T, ZHANG W P, LU Q Y. Bifurcation

analysis of an SIS epidemic model with saturated incidence rate and saturated treatment function[J]. Applied Mathematics & Computation, 2014, 226(1): 288-305.
[9] XIAO D M, RUAN S G. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate[J]. Mathematical Biosciences, 2007, 208(2): 419-429.
[10] RUAN S G, WANG W D. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. Journal of Differential Equations, 2003, 188(1): 135-163.
[11] LIU W M, LEVIN S A, IWASA Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models[J]. Journal of Mathematical Biology, 1986, 23(2): 187-204.
[12] LIU W M, HETHCOTE H W, LEVIN S A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates[J]. Journal of Mathematical Biology, 1987, 25(4): 359-380.
[13] WANG W D, RUAN S G. Bifurcation in an epidemic model with constant removal rate of the infectives[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2015, 291(2): 775-793.

# Research on Dynamical Behaviors of *SIR* Epidemic Model with Linear Saturation Therapy Function

*ZHOU Kang*, *LU Qiuying*
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract**: This paper generalizes an *SIR* epidemic model with bilinear incidence rate function and saturation therapy function. The existence, stability and backward bifurcation of the local equilibrium point were studied. The results showed that when the basic reproduction number is less than 1 and the saturation treatment rate is small, backward bifurcation will happen to the system. Meanwhile, the results proved that four equilibrium points exist at most.

**Key words**: therapy function; *SIR* epidemic model; backward bifurcation; the basic reproduction number

(责任编辑：康　锋)