浙江理工大学学报(自然科学版),第 35 卷,第 1 期,2016 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 35, No. 1, Jan. 2016

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2016.01.025

一个 Hilbert 型积分不等式的推广

有名辉

(浙江机电职业技术学院数学教研室,杭州 310053)

摘　要: 通过引进参数,借助实分析的技巧,建立了一个新的具有最佳常数因子的 Hilbert 型积分不等式,并考虑其等价形式,推广了相关文献的结果。

关键词: Hilbert 型不等式;等价形式;Hölder 不等式;Riemann Zeta 函数;Gamma 函数

中图分类号: O178　**文献标志码:** A　**文章编号:** 1673-3851 (2016) 01-0150-04　**引用页码:** 010805

0　引　言

设 $f(x),g(x)\geqslant 0$, 满足 $0<\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$, $0<\int_0^\infty g^2(x)\mathrm{d}x<\infty$, 则

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{x-y}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y< \pi^2\left(\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

其中 π^2 是满足(1)式的最佳常数因子[1]。不等式(1)通常被称为 Hilbert 型不等式。Hilbert 型不等式在分析学领域有着重要的作用[2]。近来,通过引进参数,研究者们给出了式(1)及其对应的级数形式的一些推广和改进,建立了一些深刻且有价值的成果[3-8]。最近,和炳[9]又证明了一个类似于(1)式的零齐次核 Hilbert 型不等式,即:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|}{x^\lambda+y^\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y< \frac{\pi^2}{6\lambda^2}\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \quad (2)$$

本文研究的目的是建立式(2)的推广形式。首先给出以下一些定义及引理。

定义 1[10]　对于 $a>0$,定义

$$\Gamma(a):=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

为第二型欧拉积分,即 Γ 函数。特别地,当 $a\in\mathbf{Z}_+$ 时,$\Gamma(a)=(a-1)!$。

定义 2[10]　对于 $s>1$,定义 $\zeta(s):=\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^s}$ 为 Riemann Zeta 函数。

为行文方便,作以下约定:

$$k(x,y)=\frac{\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|^\beta}{x^\lambda+y^\lambda}\min\{x^\lambda,y^\lambda\}.$$

1　主要结果

引理 1　设 $\lambda>0,\beta\geqslant 0$,则:

$$\int_0^\infty k(1,t)t^{-1}\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}},$$

其中:当 $\beta=0$ 时,$C(\beta)=C(0)=2\ln2$;当 $\beta>0$ 时,$C(\beta)=\left(2-\frac{1}{2^{\beta-1}}\right)\zeta(\beta+1)$.

证明　当 $t\in[0,1)$ 时,$\frac{1}{1+t^\lambda}=\sum_{k=0}^\infty(-1)^k t^{\lambda k}$,故:

$$\int_0^1 k(1,t)t^{-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{|\ln t|^\beta}{1+t^\lambda}t^{\lambda-1}\mathrm{d}t= \int_0^1\sum_{k=0}^\infty(-1)^k t^{\lambda k+\lambda-1}|\ln t|^\beta\mathrm{d}t= \sum_{k=0}^\infty(-1)^k\int_0^1 t^{\lambda k+\lambda-1}|\ln t|^\beta\mathrm{d}t.$$

收稿日期:2015-04-19

作者简介:有名辉(1982-),男,浙江安吉人,讲师,硕士,主要从事解析不等式方面的研究。

作变量替换 $\ln t = \dfrac{-u}{\lambda k + \lambda}$，有：

$$\int_0^1 t^{\lambda k+\lambda-1} \mid \ln t \mid^{\beta} \mathrm{d}t = \frac{1}{(\lambda k+\lambda)^{\beta+1}}\int_0^{\infty} u^{\beta} e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\lambda k+\lambda)^{\beta+1}}.$$

因此，

$$\int_0^1 k(1,t)t^{-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mid \ln t \mid^{\beta}}{1+t^{\lambda}} t^{\lambda-1}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{\beta+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta+1}} \tag{3}$$

令 $t = \dfrac{1}{u}$，根据式(3)，可得：

$$\int_1^{\infty} k(1,t)\, t^{-1}\mathrm{d}t = \int_1^{\infty}\frac{|\ln t|^{\beta}}{1+t^{\lambda}}t^{-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{|\ln u|^{\beta}}{1+u^{\lambda}}u^{\lambda-1}\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{\beta+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta+1}} \tag{4}$$

结合式(3) 和式(4)，可得：

$$\int_0^{\infty} k(1,t)t^{-1}\mathrm{d}t = \frac{2\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{\beta+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta+1}} \tag{5}$$

若 $\beta = 0$，显然有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \tag{6}$$

若 $\beta > 0$，则有：

$$\zeta(\beta+1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{\beta+1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{\beta+1}} = \frac{1}{2^{\beta+1}}\zeta(\beta+1) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{\beta+1}}.$$

故有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{\beta+1}} = (1-\frac{1}{2^{\beta+1}})\zeta(\beta+1).$$

因此，当 $\beta > 0$ 时，有：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta+1}} = (1-\frac{1}{2^{\beta+1}})\zeta(\beta+1) - \frac{1}{2^{\beta+1}}\zeta(\beta+1) = (1-\frac{1}{2^{\beta}})\zeta(\beta+1) \tag{7}$$

结合式(5)—(7)，即得引理 1。

引理 2　设 $p>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, \lambda, \varepsilon>0, \beta \geqslant 0$，则 $\varepsilon \to 0^+$ 时，有：

$$\varepsilon I := \varepsilon\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} k(x,y)x^{-1-\frac{\varepsilon}{p}}y^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}} + o(1).$$

证明　作变量替换 $y = ux$，由 Fubini 定理，可知：

$$\begin{aligned}\varepsilon I &= \varepsilon\int_1^{\infty}\int_1^{\infty} k(x,y)x^{-1-\frac{\varepsilon}{p}}y^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &\varepsilon\int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon}\Big[\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} k(1,u)u^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x = \\ &\varepsilon\int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon}\Big[\int_1^{\infty} k(1,u)u^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x + \\ &\varepsilon\int_1^{\infty} x^{-1-\varepsilon}\Big[\int_{\frac{1}{x}}^{1} k(1,u)u^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}x = \\ &\int_1^{\infty} k(1,u)u^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u + \varepsilon\int_0^1 k(1,u)u^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\Big[\int_{\frac{1}{u}}^{\infty} x^{-1-\varepsilon}\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}u = \\ &\int_1^{\infty} k(1,u)u^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u + \int_0^1 k(1,u)u^{-1+\frac{\varepsilon}{p}}\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{8}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，由引理 1，可得：

$$\int_1^{\infty} k(1,u)u^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}u + \int_0^1 k(1,u)u^{-1+\frac{\varepsilon}{p}}\mathrm{d}u = \int_0^{\infty} k(1,u)u^{-1}\mathrm{d}u + o(1) = \frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}} + o(1) \tag{9}$$

由式(8) 和式(9)，即得引理 2。

定理 1　设 $p>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, \lambda>0, \beta\geqslant 0$，$f(x), g(x) \geqslant 0, 0 < \int_0^{\infty} x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x < \infty$，且 $0 < \int_0^{\infty} x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x < \infty$，则：

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|^{\beta}}{x^{\lambda}+y^{\lambda}}\min\{x^{\lambda}, y^{\lambda}\}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\Big(\int_0^{\infty} x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_0^{\infty} x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{10}$$

其中：当 $\beta=0$ 时，$C(\beta)=C(0)=2\ln 2$；当 $\beta>0$ 时，$C(\beta) = \left(2-\dfrac{1}{2^{\beta-1}}\right)\zeta(\beta+1)$，并且 $\dfrac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}$ 是满足(10) 式的最佳常数因子。

证明　由 Hölder 不等式，可知：

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ &\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\{[k(x,y)]^{\frac{1}{p}}\frac{x^{\frac{1}{q}}}{y^{\frac{1}{p}}}f(x)\}\{[k(x,y)]^{\frac{1}{q}}\frac{y^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{q}}}g(y)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(x,y)\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}^{\frac{1}{p}} \\ &\{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(x,y)\frac{y^{q-1}}{x}g^q(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{11}$$

若式(11) 取等号，则有不全为零的实数 A 与 B，使得：

$$Ak(x,y)\frac{x^{p-1}}{y}f^p(x) = Bk(x,y)\frac{y^{q-1}}{x}g^q(y),$$

$a.e.$ 于 $(0,\infty)\times(0,\infty)$(参见[11]),即 $Ax^p f^p(x) = By^q g^q(y)$ $a.e.$ 于 $(0,\infty)\times(0,\infty)$。

于是,有常数 C,使得:

$$Ax^p f^p(x) = C, a.e. \text{于}(0,\infty);$$
$$By^q g^q(y) = C, a.e. \text{于}(0,\infty).$$

不妨设 $A\neq 0$,则 $x^{p-1}f^p(x)=\frac{C}{Ax}$ $a.e.$ 于 $(0,\infty)$,与 $0<\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$ 矛盾。故式(11)不取等号。

通过变量替换,根据引理 1,不难算得:

$$\omega(x):=\int_0^\infty k(x,y)y^{-1}\mathrm{d}y=\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}.$$

类似地,可算得:

$$\bar{\omega}(y):=\int_0^\infty k(x,y)x^{-1}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}.$$

因此式(11)可写成:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$
$$\left(\int_0^\infty \omega(x)x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \bar{\omega}(y)y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

以下将证明式(10)中的常数因子 $\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}$ 为最佳值。事实上,若此常数因子不为最佳,则存在实数 $k\left(0<k<\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\right)$,使得式(10)中的常数因子换成 k 后式(10)仍成立。即:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$
$$k\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \quad (12)$$

定义函数 $f_\varepsilon(x)$ 和 $g_\varepsilon(x)$(其中 ε 充分小)如下:

若 $x\in(0,1)$,令

$$f_\varepsilon(x)=g_\varepsilon(x)=0;$$

若 $x\in[1,\infty)$,令

$$f_\varepsilon(x)=x^{-1-\frac{\varepsilon}{p}},\ g_\varepsilon(x)=x^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}.$$

用 f_ε 和 g_ε 分别取代式(12)中的 f 和 g,则:

$$\varepsilon\int_1^\infty\int_1^\infty k(x,y)x^{-1-\frac{\varepsilon}{p}}y^{-1-\frac{\varepsilon}{q}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<$$
$$\varepsilon k\left(\int_1^\infty x^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_1^\infty x^{-\varepsilon-1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}=k.$$

把引理 2 的结果代入,可得:

$$\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}+o(1)<k.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$,则 $k\geqslant\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}$,这与 $k<\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}$ 矛盾。故式(10)中的常数因子为最佳值。定理 1 证毕。

定理 2 设 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\lambda>0,\beta\geqslant 0$,$f(x)\geqslant 0,0<\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$,则

$$\int_0^\infty y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<$$
$$\left[\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\right]^p\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x \quad (13)$$

其中 $\left[\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\right]^p$ 是满足式(13)的最佳常数因子,且式(13)和式(10)等价。

证明 令 $g(y)=y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^{p-1}$,则由式(10)可得:

$$0<\left(\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^p=$$
$$\left\{\int_0^\infty y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y\right\}^p=$$
$$\left[\int_0^\infty\int_0^\infty k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^p\leqslant$$
$$\left[\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\right]^p\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$\left(\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right)^{p-1} \quad (14)$$

故:

$$0<\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y=$$
$$\int_0^\infty y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<$$
$$\left[\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\right]^p\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)<\infty \quad (15)$$

结合定理 2 的条件和式(15)可知应用定理 1 的条件是充分的。因此式(14)和式(15)都取严格不等号。故式(13)成立。

以上从式(10)证得了式(13)。要说明式(10)和式(13)等价,以下只需从式(13)证得式(10)。事实上,由 Hölder 不等式,可知:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty k(x,y)f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$
$$\int_0^\infty\left[y^{\frac{1-q}{q}}\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]\left[y^{\frac{q-1}{q}}g(y)\right]\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\left\{\int_0^\infty y^{-1}\left[\int_0^\infty k(x,y)f(x)\mathrm{d}x\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty y^{q-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}$$
$$(16)$$

把式(13) 代入到式(16)，可知式(10) 成立。若式(13) 中的常数因子$\left[\frac{\Gamma(\beta+1)C(\beta)}{\lambda^{\beta+1}}\right]^{p}$不是最佳值，则由式(13) 和式(16) 证得的式(10) 的常数因子也不是最佳的，这显然矛盾。故式(13) 中的常数因子是最佳值。定理 2 证毕。

说明：赋予定理 1 中参数不同的值，可以得到一些特殊的结果。由于 $\zeta(2n), n\in \mathbf{Z}_{+}$ 的值早有文献给出(见文献[10] 413 页)，故在定理 1 中，令 $\beta=1$，注意到 $C(2)=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，由此可得式(2)，因此定理 1 是式(2) 的推广。

若在定理 1 中，令 $\beta=3$，注意到 $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$，于是有推论 1。

推论 1　设 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \lambda>0, f(x), g(x)\geqslant 0, 0<\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，且 $0<\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|^3}{x^\lambda+y^\lambda}\min\{x^\lambda, y^\lambda\}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{7\pi^4}{60\lambda^4}\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

若在定理 1 中，令 $\beta=0, \lambda=1$，则有推论 2。

推论 2　设 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, f, g\geqslant 0, 0<\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty, 0<\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\min\{x,y\}}{x+y}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<2\ln 2\left(\int_0^\infty x^{p-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2　结　语

通过引入参数，借助分析的技巧，本文建立了一个混合核的 Hilbert 型积分不等式，在一定程度上推广了前人已有的结果，这具有一定的价值。另外，本文研究的仍然是零齐次核的 Hilbert 型积分不等式，能否将积分核推广到负齐次核或者是非齐次核的情形，仍然是值得研究的问题。

参考文献：

[1] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, Polya G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge university press, 1952: 255.

[2] MINTRINOVIC D S, PECARIC J E, FINK A M. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives[M]. Boston: Kluwer Academic, 1991: 79-135.

[3] 刘琼，龙顺潮. 一个推广的 Hilbert 型积分不等式[J]. 数学物理学报：A 辑，2014，34(1)：179-185.

[4] 陈小雨，高明哲，黄政. 具有 Catalan 常数的 Hilbert 型积分不等式[J]. 南京大学学报：数学半年刊，2013，30(1)：95-103.

[5] KUANG J, DEBNATH L. On new generalizations of Hilbert's inequality and their applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 245(1): 248-265.

[6] JIN J J. A new generalization of Hardy-Hilbert type inequality with multi-parameters [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2009, 29(6): 1131-1136.

[7] JIN J J. On Hilbert's type inequalities[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 340(2): 932-942.

[8] 杨必成. 一个较为精密的 Hardy-Hilbert 型不等式及其应用[J]. 数学学报，2006，49(2)：363-368.

[9] 和炳. 一个含零齐次核的 Hardy-Hilbert 型积分不等式[J]. 浙江大学学报(理学版)，2011，38(4)：380-383.

[10] 菲赫金哥尔茨 T M. 微积分学教程：第二卷[M]. 徐献瑜，冷生明，梁文骐，译. 2 版. 北京：高等教育出版社，2006：625-639.

[11] 匡继昌. 常用不等式[M]. 3 版. 济南：山东科学技术出版社，2003：5.

On Generalization of A Hilbert-type Integral Inequality

YOU Minghui

(Mathematics Teaching and Research Section, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou 310053, China)

Abstract: By introducing parameters, and using the method of real analysis, we establish a Hilbert-type integral inequality with the optimal constant factor and consider its equivalent form. Moreover, we also generalize the results of relevant literatures.

Key words: Hilbert-type inequality; equivalent form; Hölder inequality; Riemann Zeta function; Gamma function

(责任编辑：康　锋)