浙江理工大学学报(自然科学版),第 35 卷,第 1 期,2016 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 35, No. 1, Jan. 2016

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2016.01.025

关于两个(p,q)型 Fibonacci 多项式乘积的研究

王 慧,王伟平
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要:利用组合数学的方法研究了两个(p,q)型 Fibonacci 多项式的乘积满足的恒等式、递推关系及生成函数,建立了两个(p,q)型 Fibonacci 多项式的乘积之和满足的递推关系及显式表达式,推广了 Falcon 的结论。此外,通过将所得的关于(p,q)型 Fibonacci 多项式序列的一般性结果应用到经典的 Fibonacci 多项式及 Chebyshev 多项式上,得到了很多新的组合恒等式。

关键词:(p,q)型 Fibonacci 多项式;(p,q)型 Lucas 多项式;生成函数;递推关系;组合恒等式
中图分类号:O157.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-3851 (2016) 01-0145-05 **引用页码**:010804

0 引 言

在组合数学中,很多特殊的组合序列都可以通过二阶的递推关系定义,例如 Fibonacci 数、Lucas 数、Pell 数、Fibonacci 多项式、Lucas 多项式等。这些序列在组合数学、数论、数值分析等学科中都有重要的应用。

定义(p,q)型 Fibonacci 多项式序列$(u_n(x))$和(p,q)型 Lucas 多项式序列$(v_n(x))$为:

$$u_0(x)=0,u_1(x)=1,u_n(x)=p(x)u_{n-1}(x)+q(x)u_{n-2}(x),(n\geqslant 2),$$

$$v_0(x)=2,v_1(x)=p(x),v_n(x)=p(x)v_{n-1}(x)+q(x)v_{n-2}(x),(n\geqslant 2).$$

很多特殊的多项式序列都是(p,q)型 Fibonacci 多项式序列以及(p,q)型 Lucas 多项式序列的特例(见表 1)[1-4]。此外,若 $p(x)$ 与 $q(x)$ 都取非零实数,就得到著名的 Lucas 序列。例如,Fibonacci 数、Lucas 数等构成的二阶递推序列都是特殊的 Lucas 序列。

表 1 特殊的(p,q)型 Fibonacci 多项式和(p,q)型 Lucas 多项式

$p(x)$	$q(x)$	$u_n(x)$	$v_n(x)$
x	1	Fibonacci 多项式 $F_n(x)$	Lucas 多项式 $L_n(x)$
$2x$	1	Pell 多项式 $P_n(x)$	Pell-Lucas 多项式 $Q_n(x)$
$2x$	-1	第二类 Chebyshev 多项式 $U_{n-1}(x)$	第一类 Chebyshev 多项式 $2T_n(x)$
1	$2x$	Jacobsthal 多项式 $J_n(x)$	Jacobsthal-Lucas 多项式 $j_n(x)$
$3x$	-2	Fermat 多项式 $F_n(x)$	Fermat-Lucas 多项式 $f_n(x)$
$x+1$	x	Delannoy 多项式 $D_{n-1}(x)$	Corona 多项式 $C_n(x)$

由定义可以得到(p,q)型 Fibonacci 多项式序列$(u_n(x))$以及(p,q)型 Lucas 多项式序列$(v_n(x))$的前几项:

$$u_0(x)=0,u_1(x)=1,u_2(x)=p,$$
$$u_3(x)=p^2+q,u_4(x)=p^3+2pq,$$
$$v_0(x)=2,v_1(x)=p,v_2(x)=p^2+2q,$$
$$v_3(x)=p^3+3pq,v_4(x)=p^4+4p^2q+2q^2,$$

收稿日期:2015-04-03
基金项目:浙江省自然科学基金项目(ZY13A010016)
作者简介:王 慧(1988-),女,湖北黄梅人,硕士研究生,主要从事组合数学方面的研究。
通信作者:王伟平,E-mail:wpingwang@zstu.edu.cn

为简洁起见，本文将多项式 $p(x)$ 简写成 p，$q(x)$ 简写成 q。如果令 α 和 β 为特征方程 $t^2-pt-q=0$ 的根，则：

$$\alpha=\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2},\beta=\frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2},$$

且 $\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=-q$，利用特征根 α 和 β 可以给出 $(u_n(x))$ 和 $(v_n(x))$ 满足的 Binet 公式：

$$u_n(x)=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},v_n(x)=\alpha^n+\beta^n.$$

近年来，有关 (p,q) 型 Fibonacci 多项式序列和 (p,q) 型 Lucas 多项式序列的研究很多。例如：Lee 等[1] 研究了这些序列的一些基本性质及相关的矩阵；Wang[2] 研究了这些序列满足的组合恒等式；He 等[3] 研究了更一般形式的满足二阶线性递推关系的数列与多项式序列，并且利用这些序列研究了某些代数方程和常微分方程的解的问题。其他研究可以参见一些相关的论文[4-6]。

Falcon[7] 研究了两个 k-Fibonacci 数的乘积之和，其中 k-Fibonacci 数实际上也是 (p,q) 型 Fibonacci 多项式序列的特例，只要令 $p(x)=k$，$q(x)=1$ 即可。本文将在 Falcon[7] 的工作的基础上，将数列推广到多项式序列，研究两个 (p,q) 型 Fibonacci 多项式的乘积满足的恒等式、递推关系及生成函数，并进一步研究两个 (p,q) 型 Fibonacci 多项式的乘积之和满足的递推关系及显式表达式，最后本文将所得的一般性结果应用到经典的 Fibonacci 多项式以及 Chebyshev 多项式上，建立了很多含 Fibonacci 多项式、Lucas 多项式、第一类与第二类 Chebyshev 多项式的恒等式。

1 两个 (p,q) 型 Fibonacci 多项式的乘积

下面将研究两个 Fibonacci 多项式的乘积满足的恒等式和递推关系。

定理 1 (p,q) 型 Fibonacci 多项式序列 $(u_n(x))$ 满足如下恒等式：

$$u_m(x)u_{n+1}(x)-u_{m+1}(x)u_n(x)=-(-q)^m u_{n-m}(x),(n\geqslant m)\tag{1}$$

$$u_{n-1}(x)u_{n+1}(x)-(u_n(x))^2=-(-q)^{n-1}\tag{2}$$

$$u_{n+r}(x)u_{n+r+h}(x)-(-q)^{2r+h}u_{n-r}(x)u_{n-r-h}(x)=u_{2n}(x)u_{2r+h}(x)\tag{3}$$

证明 利用 Binet 公式即可证得式(1) 与式(3)，在式(1) 中令 $m=n-1$ 可得式(2)。注意式(1) 为 D'Ocagne 恒等式的推广，式(2) 为 Simson 恒等式的推广，且式(2) 在文献[1] 的定理 2.21 中已经给出。此外，式(3) 推广了文献[7] 的定理 2.1。

引理 1 设 $w_n(x)=u_n(x)u_{n+h}(x)$，则序列 $(w_n(x))$ 满足如下递推关系：

$$w_n(x)=(p^2+q)w_{n-1}(x)+(p^2q+q^2)w_{n-2}(x)-q^3w_{n-3}(x),(n\geqslant 3).$$

证明 利用序列 $(u_n(x))$ 的递推公式，有：

$$\begin{aligned}w_n(x)=&u_n(x)u_{n+h}(x)=(pu_{n-1}(x)+\\&qu_{n-2}(x))(pu_{n+h-1}(x)+qu_{n+h-2}(x))=\\&p^2w_{n-1}(x)+qu_{n+h-1}(x)(u_{n-1}(x)-\\&qu_{n-3}(x))+pqu_{n+h-2}(x)(pu_{n-2}(x)+\\&qu_{n-3}(x))+q^2w_{n-2}(x)=\\&(p^2+q)w_{n-1}(x)+(p^2q+q^2)w_{n-2}(x)-\\&q^2u_{n-3}(x)(u_{n+h-1}(x)-pu_{n+h-2}(x))=\\&(p^2+q)w_{n-1}(x)+(p^2q+q^2)w_{n-2}(x)-\\&q^3w_{n-3}(x),\end{aligned}$$

故得证。

利用引理 1 可进一步得到序列 $(w_n(x))$ 的生成函数。

引理 2 序列 $(w_n(x))$ 的生成函数为：

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n(x)t^n=\frac{u_{1+h}(x)t+[pu_{2+h}(x)-(p^2+q)u_{1+h}(x)]t^2}{1-(p^2+q)t-(p^2q+q^2)t^2+q^3t^3}.$$

证明 利用 $(w_n(x))$ 的递推关系，可得：

$$\begin{aligned}f(x,t)=&\sum_{n=0}^{\infty}w_n(x)t^n=w_0(x)+w_1(x)t+\\&w_2(x)t^2+\sum_{n=3}^{\infty}w_n(x)t^n=w_1(x)t+w_2(x)t^2+\\&\sum_{n=3}^{\infty}[(p^2+q)w_{n-1}(x)+(p^2q+\\&q^2)w_{n-2}(x)-q^3w_{n-3}(x)]t^n=w_1(x)t+\\&w_2(x)t^2+(p^2+q)t\sum_{n=2}^{\infty}w_n(x)t^n+(p^2q+\\&q^2)t^2\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x)t^n-q^3t^3\sum_{n=0}^{\infty}w_n(x)t^n=\\&w_1(x)t+w_2(x)t^2-(p^2+q)w_1(x)t^2+\\&(p^2+q)tf(x,t)+(p^2q+q^2)t^2f(x,t)-\\&q^3t^3f(x,t),\end{aligned}$$

由上述方程解出 $f(x,t)$ 即可。

设 $S_n(x)$ 为序列 $(w_n(x))$ 的部分和，即 $S_n(x)=\sum_{j=0}^{n}u_j(x)u_{j+h}(x)$，则有如下定理成立。

定理 2 序列 $(S_n(x))$ 满足如下递推关系：

$$\begin{aligned}S_n(x)=&(p^2+q+1)S_{n-1}(x)+(p^2q+q^2-p^2-\\&q)S_{n-2}(x)-(q^3+q^2+p^2q)S_{n-3}(x)+\end{aligned}$$

$q^3S_{n-4}(x),(n\geqslant 4)$.

证明　序列$(S_n(x))$的生成函数为:

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)t^n=\frac{u_{1+h}(x)t+[pu_{2+h}(x)-(p^2+q)u_{1+h}(x)]t^2}{(1-t)[1-(p^2+q)t-(p^2q+q^2)t^2+q^3t^3]}.$$

由此可得:

$$u_{1+h}(x)t+[pu_{2+h}(x)-(p^2+q)u_{1+h}(x)]t^2=(1-t)[1-(p^2+q)t-(p^2q+q^2)t^2+q^3t^3]\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)t^n-(p^2+q+1)\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)t^{n+1}-(p^2q+q^2-p^2-q)\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)t^{n+2}+(q^3+q^2+p^2q)\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)t^{n+3}-q^3\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)t^{n+4},$$

对等式两边取 t^n 的系数,即可得证。

引理 2 及定理 2 推广了文献[7] 中 3.3 节的结论。利用定理 2 及初始条件

$S_0(x)=0,S_1(x)=u_{1+h}(x)$,

$S_2(x)=u_{1+h}(x)+pu_{2+h}(x)$,

$S_3(x)=u_{1+h}(x)+pu_{2+h}(x)+(p^2+q)u_{3+h}(x)$,

可以递推地计算:

$$S_n(x)=\sum_{j=0}^{n}u_j(x)u_{j+h}(x)=\sum_{j=1}^{n}u_j(x)u_{j+h}(x).$$

下面将进一步给出更一般的和式 $\sum_{j=1}^{n}u_{kj+h}(x)u_{lj+i}(x)$ 的显式表达式。

定理 3　设 $k\geqslant l\geqslant 1$, $h\geqslant i$, 则(p,q) 型 Fibonacci 多项式序列$(u_n(x))$满足如下恒等式:

$$\sum_{j=1}^{n}u_{kj+h}(x)u_{lj+i}(x)=\frac{1}{v_2(x)+2q}\left\{\frac{A(x)}{1-v_{k+l}(x)+(-q)^{k+l}}+\frac{B(x)}{1-(-q)^lv_{k-l}(x)+(-q)^{k+l}}\right\},$$

其中:

$$A(x)=v_{k+l+h+i}(x)-v_{(n+1)(k+l)+h+i}(x)-(-q)^{k+l}v_{h+i}(x)+(-q)^{k+l}v_{n(k+l)+h+i}(x),$$

$$B(x)=(-q)^{(n+1)l+i}v_{(n+1)(k-l)+h-i}(x)-(-q)^{l+i}(x)v_{k+h-l-i}(x)+(-q)^{k+l+i}v_{h-i}(x)-(-q)^{(n+1)l+k+i}v_{n(k-l)+h-i}(x).$$

证明　将 Binet 公式代入和式并整理得:

$$\sum_{j=1}^{n}u_{kj+h}(x)u_{lj+i}(x)=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha^{(k+l)j+h+i}-\sum_{j=1}^{n}\alpha^{kj+h}\beta^{lj+i}-\sum_{j=1}^{n}\beta^{kj+h}\alpha^{lj+i}+\sum_{j=1}^{n}\beta^{(k+l)j+h+i}\right\},$$

利用等比数列求和公式,并将所得结果中的第 1 项和第 4 项通分合并,第 2 项和第 3 项通分合并,利用 $\alpha\beta=-q$ 以及 $v_n(x)=\alpha^n+\beta^n$,即可得到所求结果。

推论 1　当 $k=l=1,i=0$ 时,有:

$$\sum_{j=1}^{n}u_j(x)u_{j+h}(x)=\frac{1}{v_2(x)+2q}\left\{\frac{v_{h+2}(x)-v_{2n+h+2}(x)-q^2v_h(x)+q^2v_{2n+h}(x)}{1+q^2-v_2(x)}-\left(\sum_{j=1}^{n}(-q)^j\right)v_h(x)\right\}\tag{4}$$

推论 2　当 $k=l\geqslant 1,h=i=0$ 时,有:

$$\sum_{j=1}^{n}u_{kj}^2(x)=\frac{1}{v_2(x)+2q}\left\{\frac{v_{2k}(x)-v_{2k(n+1)}(x)-2q^{2k}+q^{2k}v_{2kn}(x)}{1+q^{2k}-v_{2k}(x)}-2\sum_{j=1}^{n}(-q)^{kj}\right\}\tag{5}$$

对式(4)和(5)中的 k、l、h、i 取不同的值,还能得到一些特殊形式的乘积之和的封闭形式。

2　一些应用

下面将两个(p,q) 型 Fibonacci 多项式的乘积之和的结果应用到经典的 Fibonacci 多项式及 Chebyshev 多项式上。

例 1　当 $p(x)=x$, $q(x)=1$ 时,$u_n(x)$ 为 Fibonacci 多项式 $F_n(x)$, $v_n(x)$ 为 Lucas 多项式 $L_n(x)$,这时有:

$$\sum_{j=1}^{n}F_j(x)F_{j+h}(x)=\frac{1}{x^2+4}\left\{\frac{L_{2n+h+1}(x)-L_{h+1}(x)}{x}+\frac{1-(-1)^n}{2}L_h(x)\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}F_{kj}^2(x)=\frac{1}{x^2+4}\left\{\frac{L_{2k(n+1)}(x)-L_{2kn}(x)}{L_{2k}(x)-2}-2\sum_{j=1}^{n}(-1)^{kj}-1\right\}.$$

进一步,当 $h=0,1,2$ 时,有:

$$\sum_{j=1}^{n}F_j^2(x)=\frac{1}{x^2+4}\left\{\frac{L_{2n+1}(x)}{x}-(-1)^n\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}F_j(x)F_{j+1}(x)=\frac{1}{x^2+4}\left\{\frac{L_{2n+2}(x)-x^2-2}{x}+\frac{1-(-1)^n}{2}x\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}F_j(x)F_{j+2}(x)=\frac{1}{x^2+4}$$

$$\left\{\frac{L_{2n+3}(x)-x^3-3x}{x}+\frac{1-(-1)^n}{2}(x^2+2)\right\}.$$

当 $k=2,3$ 时,有:

$$\sum_{j=1}^{n}F_{2j}^2(x)=\frac{1}{x^2+4}\left\{\frac{L_{4(n+1)}(x)-L_{4n}(x)}{x^4+4x^2}-2n-1\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}F_{3j}^2(x)=\frac{1}{x^2+4}\left\{\frac{L_{6(n+1)}(x)-L_{6n}(x)}{x^6+6x^4+9x^2}-(-1)^n\right\}.$$

例2 当 $p(x)=2x$, $q(x)=-1$ 时,$u_n(x)$ 为第二类Chebyshev多项式 $U_{n-1}(x)$, $v_n(x)$ 为第一类Chebyshev多项式 $2T_n(x)$,这时有:

$$\sum_{j=0}^{n}U_j(x)U_{j+h}(x)=\frac{1}{4x^2-4}\left\{\frac{T_{2n+h+4}(x)-T_{2n+h+2}(x)-T_{h+2}(x)+T_h(x)}{2x^2-2}-2(n+1)T_h(x)\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}U_{kj-1}^2(x)=\frac{1}{4x^2-4}\left\{\frac{T_{2k(n+1)}(x)-T_{2kn}(x)}{T_{2k}(x)-1}-2n-1\right\}.$$

于是,当 $h=0,1,2$ 时,有:

$$\sum_{j=0}^{n}U_j^2(x)=\frac{1}{4x^2-4}\left\{\frac{T_{2n+4}(x)-T_{2n+2}(x)}{2x^2-2}-2n-3\right\},$$

$$\sum_{j=0}^{n}U_j(x)U_{j+1}(x)=\frac{1}{4x^2-4}\left\{\frac{T_{2n+5}(x)-T_{2n+3}(x)}{2x^2-2}-2(n+2)x\right\},$$

$$\sum_{j=0}^{n}U_j(x)U_{j+2}(x)=\frac{1}{4x^2-4}\left\{\frac{T_{2n+6}(x)-T_{2n+4}(x)}{2x^2-2}-4(n+2)x^2+2n+3\right\}.$$

当 $k=2,3$ 时,有:

$$\sum_{j=1}^{n}U_{2j-1}^2(x)=\frac{1}{4x^2-4}\left\{\frac{T_{4n+4}(x)-T_{4n}(x)}{8x^4-8x^2}-2n-1\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}U_{3j-1}^2(x)=\frac{1}{4x^2-4}\left\{\frac{T_{6n+6}(x)-T_{6n}(x)}{32x^6-48x^4+18x^2-2}-2n-1\right\}.$$

3 结 论

本文研究了两个(p,q)型Fibonacci多项式的乘积与乘积之和的递推关系及表达式,并将其应用到经典的Fibonacci多项式以及Chebyshev多项式上。用类似的方法也可以得到其他特殊的多项式满足的递推关系与恒等式。

参考文献:

[1] LEE G Y, ASCI M. Some properties of the (p,q)-Fibonacci and (p,q)-Lucas polynomials[J/OL]. Journal of Applied Mathematics, 2012: 1-18. http://dx.doi.org/10.1155/2012/264842.

[2] WANG J Z. Some new results for the (p,q)-Fibonacci and Lucas polynomials[J]. Andvances in Difference Equations. 2014, 64: 1-15.

[3] HE T X, SHIUE P J S. On sequences of numbers and polynomials defined by linear recurrence relations of order 2[J/OL]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2009: 1-12. http://dx.doi.org/10.1155//2009/709386.

[4] CHEON G S, KIM H, SHAPIRO L W. A generalization of Lucas polynomial sequence[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157(5): 920-927.

[5] MA S M. Identities involving generalized Fibonacci-type polynomials [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(22): 9297-9301.

[6] NALLI A, HAUKKANEN P. On generalized Fibonacci and Lucas polynomials[J]. Chaos Solitons Fractals, 2009, 42(5): 3179-3186.

[7] FALCON S. On the sequences of products of two k-Fibonacci numbers [J]. American Review of Mathematics and Statistics, 2014, 1(2): 111-120.

Studies on Products of Two (p, q)-Fibonacci Polynomials

WANG Hui, *WANG Weiping*

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: By combinatorial method, the identities, recurrence relation and generating function of the products of two (p, q)-Fibonacci polynomials are studied, and the recurrence relation and explicit expressions of the sums of such products are established. These results generalize those of Faclon. Moreover, many new combinatorial identities are established by applying the general results on the sequence of (p, q)-Fibonacci polynomials to the classical Fibonacci polynomials and Chebyshev polynomials.

Key words: (p,q)-Fibonacci polynomials; (p,q)-Lucas polynomials; generating functions; recurrence relations; combinatorial identities

(责任编辑: 康　锋)

(上接第 121 页)

Identification of Telomerase RNA Candidate Sequence in Rice (*Oryza Sativa L.*)

ZHU Lianlian, *LIN Gaoqiang*, *YE Congying*, *HUANG Qian*, *LIU Xiaochuan*

(Institute of Bioengineering, College of Life Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Telomerase is composed of telomerase inverse transcription and telomerase RNA. Except template sequence which is conservative in telomerase RNA, conservation degree in olther zones is very low, so it is very hard to clone based on homologous sequence. Currently, only Arabidopsis thaliana RNA has been cloned in plants. To identify a candidate telomerase with the characteristic of telomerase RNA, the activity of the transgenic callus telomerase after site-directed mutagenesis T/A of the template sequence (5'-AAACCCTAA-3') was compared. The result shows the activity of mutant telomerase is significantly higher than that of non-mutant telomerase in the absence of dATP during the TRAP approach. Furthermore, a sequencing result from the ssDNA extended in vitro by the transgenic telomerase shows that all of the 10 fragments contain mutant feature sequence. Then, telomere detection of transgenic plants was conducted. The results show that among 8 telomere sequences, 2 contain mutant feature sequence. Therefore, we can preliminarily judge the candidate sequence is telomerase RNA gene in rice.

Key words: rice; telomerase; telomerase RNA; TRAP; site-directed mutation

(责任编辑: 许惠儿)