浙江理工大学学报(自然科学版),第31卷,第5期,2014年9月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 31, No. 5, Sept. 2014

文章编号:1673-3851(2014)05-0576-04

Γ-函数的几个性质及其应用

王　飞[1],周培桂[2a],马晓艳[2b]
(1. 浙江机电职业技术学院,杭州 310053;2. 浙江理工大学,a. 科技与艺术学院;b. 理学院,杭州 310018)

摘　要:运用单调性 l'Hospital 法则获得了 Γ-函数的一些单调性质,根据这些性质主要获得运用几何凸性准则解决了 Γ-函数的一个猜测,利用等价转化方法改进了拟共形映射中常数 B_n 的精确估计。

关键词:精确估计;Γ-函数;单调性;拟共形映射;几何凸性
中图分类号:O174　　**文献标志码**:A

0　引　言

在本文中,记 Euler 常数为 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(1/k)-\log n\right]=0.577\,215\,664\,9\cdots$,双阶 $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots1$。其中,$n\in N^{+}=\{k:k$ 是自然数$\}$[1-2]。

对于正实数 x 和 y,Γ-函数、B-函数以及 ψ-函数分别定义为:

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t,B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\tag{1}$$

众所周知,在经典的特殊函数、拟共形映射理论中,经常出现如下定义的"常数"[3-4]:

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2-n}{n-1}}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2(n-1)},\frac{1}{2}\right),$$

$$b_n=\frac{J_n}{n-1},B_n=b_n^{n-1}。$$

上述定义"常数"b_n、B_n、J_n 的许多不等式对特殊函数界的估计有很重要作用[4],同时在数学的很多领域有着广泛应用,如格拉斯曼流形的几何子空间[5]、优化理论[6]、几何函数论[7-9]。

在过去的半个世纪里,Γ-函数和 B-函数出现在数学的概率论、几何、分析等许多领域中,是表达某些重要量的便利工具,在数学、物理和工程技术中有着广泛且重要的应用[2-3,10-13]。因此,研究 Γ-函数、ψ-函数、B-函数的性质既具有理论意义,又具有应用价值。

近年来,多位学者研究了关于上述函数的许多性质以及不等式[3-4,8-14]。在文献[10]的 TheoremA 及 Theorem1.17(4)中,作者得到并改进了一系列不等式。如对 $n\geqslant2$,

$$\frac{\pi}{2}\leqslant B_n<2\tag{2}$$

当且仅当 $n=2$ 时等号成立。

在文献[13]的 Theorem 1.1 中,当 $x>0$ 时,作者证明了函数 $g(x)=\dfrac{e^x\Gamma(x)}{x^x}$ 是几何上凸的,此函数被许多数学家研究[15]。

在文献[15]中,作者提出了如下猜测:对 $x>0$,令

$$F(x)=\frac{\Gamma(x)}{x^x}\tag{3}$$

则 $F(x)$ 为几何下凸函数。

本文的目的是通过研究 Γ-函数的一些单调性质,应用几何凸性准则给出(3)有关 Γ-函数猜测的完整结论。此外,利用等价转化方法改进拟共形映射中常数 B_n 的精确估计。

收稿日期:2014-03-05
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11171307);浙江省教育厅科研项目基金(Y201328799);浙江机电职业技术学院科研项目(A027114018)
作者简介:王　飞(1985-),男,陕西渭南人,硕士,助教,主要从事 Ramanujan 模方程及特殊函数研究。

在本文中，我们获得了如下主要结果。

定理 1　对 $a\in(0,1)$，$C_1=1/\Gamma(a)$，函数

$$G(x)=\frac{\Gamma(x+1)/\Gamma(x+a)-C_1}{x^2}$$

在 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 上严格递减。

定理 2　对 $a\in(0,1)$，$C_2=[\psi'(1)-\psi'(a)]/2$ 及 $C_3=e^{-\gamma-\psi(a)}$，函数

$$H(x)=\frac{C_3-[\Gamma(x+1)/(C_1\Gamma(x+a))]^{1/x}}{x}$$

在 $(0,\infty)$ 到 $(0,-C_2C_3)$ 上严格递减。特别地，对 $a\in(0,1)$ 及 $x\in(0,\infty)$，双向不等式

$$\mathrm{e}^{-\gamma-\psi(a)}\left(1-\frac{\psi'(1)-\psi'(a)}{2}x\right)<\left[\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(a)\Gamma(x+a)}\right]^{1/x}<e^{-\gamma-\psi(a)} \tag{4}$$

成立。

定理 3　对任意 $x>0$，定义函数 $F(x)=\frac{\Gamma(x)}{x^x}$，则存在唯一的 $x_0\in(0.103,0.104)$，使得函数 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上是几何上凸的，而在 (x_0,∞) 上是几何下凸的。其中 x_0 是方程 $x\psi'(x)+\psi(x)-logx-2=0$ 的唯一正根。

1　引　理

在本文中，为了证明结论和引用方便，我们需要下面的公式及几个引理，具体内容如下所述。

下面熟知的 ψ 函数公式[3]：

$$\psi(x)=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k(x+k)},$$

$$\psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x} \tag{5}$$

$$\psi^{(n)}(x)=(-1)^{(n+1)}n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{n+1}},n\in N \tag{6}$$

$$\psi(1)=-\gamma,\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-\log4 \tag{7}$$

其中 $x\in R^+$，γ 为 Euler 常数。

如下的引理 1.1 参见文献[4]Theorem 1.25，引理 1.2(1)参见文献[16]，引理 1.2(2)参见文献[3]，引理 1.2(3)参见文献[13]lemma 2.2。

引理 1.1　对 $-\infty<a<b<+\infty$，设 f 和 g 是两个实值函数，并都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微且在 (a,b) 上 $g'(x)\neq0$，如果 f'/g' 在 (a,b) 上单调上升(下降)，那么函数

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\text{和 }G(x)=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$$

也在 (a,b) 上单调上升(下降)。而且，若 f'/g' 的单调性是严格的，则 F 和 G 的单调性也是严格的。

引理 1.2　(1)设区间 $I\subseteq R^+$，函数 $f:I\rightarrow R^+$ 为一阶可导，则 f 为几何上凸(下凸)函数当且仅当 $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ 在 I 上单调增加(减少)。

(2)当 $x\rightarrow\infty$ 时，且 x 为正实数，那么

$$\psi(x)\sim\log x-\frac{1}{2x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2nx^{2n}},$$

$$\psi^{(n)}(x)\sim(-1)^{n-1}\left[\frac{(n-1)!}{x^n}+\frac{n!}{2x^{n+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}B_{2k}\frac{(2k+n-1)!}{(2k)!x^{2k+n}}\right],$$

其中 B_{2n} 为 Bernoulli 数。

(3)对 $x\in(0,\infty)$，

$$2\psi'(x)+x\psi''(x)<\frac{1}{x}。$$

引理 1.3　对 $a\in(0,1)$，函数 $g_1(x)=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}$ 从 $(0,\infty)$ 到 $(0,\infty)$ 上严格递减。

证明　对 $g_1(x)$ 对数求导得

$$g'_1(x)/g_1(x)=g_2(x)=\psi(x)-\psi(x+a)。$$

由(6)知 $\psi(x)$ 是严格递增的，则 $g_2(x)<0$。因此，$g_1(x)$ 的单调性可证。

显然，$g_1(0^+)=\lim\limits_{x\rightarrow0^+}\{x\Gamma(x)/[x\Gamma(x+a)]\}=\infty$。根据 Γ-函数的渐近公式[3]，得到

$$g_1(+\infty)=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=\lim_{x\rightarrow\infty}x^{-a}=0。$$

引理 1.4　对 $a\in(0,1)$，$C_1=1/\Gamma(a)$，函数 $g_3(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+a)}$ 从 $(0,\infty)$ 到 (C_1,∞) 上严格递增。

证明　对数求导得

$$g'_3(x)/g_3(x)=g_4(x)=\psi(x+1)-\psi(x+a)。$$

由式(1)、(6)知 $g_4(x)>0$，可得 $g_3(x)$ 的单调性。由式(1)及引理 1.3 可得 $g_3(x)$ 的极限值。

引理 1.5　对 $a\in(0,1)$，$C_1=1/\Gamma(a)$ 及 $C_2=[\psi'(1)-\psi'(a)]/2$，函数

$$h_1(x)=\frac{x[\psi(x+1)-\psi(x+a)]-log(\Gamma(x+1)/(C_1\Gamma(x+a)))}{x^2}$$

从 $(0,\infty)$ 到 $(C_2,0)$ 上严格递增。

证明　令 $h_2(x)=x[\psi(x+1)-\psi(x+a)]-\log(\Gamma(x+1)/(C_1\Gamma(x+a)))$，$h_3(x)=x^2$，则 $h_2(0)=h_3(0)=0$，$h_1(x)=h_2(x)/h_3(x)$，$\frac{h'_2(x)}{h'_3(x)}=h_4(x)=\frac{1}{2}[\psi'(x+1)-\psi'(x+a)]$。

由(6)知,$\psi''(x)$在$(0,\infty)$上严格递增,故$h'_4(x)>0$。因此,根据引理1.1知,h_1在$(0,\infty)$上严格递增。

由 l'Hospital 法则和(5)可得

$$h_1(0^+)=\lim_{x\to 0}\frac{h'_2(x)}{h'_3(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}h_4(x)=\frac{1}{2}[\psi'(1)-\psi'(a)]=C_2$$

和

$$\lim_{x\to\infty}h_1(x)=\lim_{x\to\infty}h_4(x)=0。$$

引理 1.6 对 $a\in(0,1)$,$C_1=1/\Gamma(a)$及$C_3=e^{-\gamma-\psi(a)}$,函数$h_5(x)=\left[\frac{\Gamma(x+1)}{C_1\Gamma(x+a)}\right]^{1/x}$从$(0,\infty)$到$(1,C_3)$上严格递减且向下凸的。

证明 对数求导得

$$h'_5(x)=h_5(x)h_1(x)=-\{h_5(x)[-h_1(x)]\}$$

其中$h_1(x)$由引理1.5定义。由引理1.5可知,$h'_5(x)<0$,故得$h_5(x)$的单调性。由引理1.5得知,h'_5在$(0,\infty)$上严格递增,$h_5(x)$的凹凸性可证。

由 l'Hospital 法则及式(5)、(7)可知

$$h_5(0^+)=$$

$$\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\log\Gamma(x+1)-\log\Gamma(x+a)-\log C_1}{x}\right\}=$$

$$\exp(\psi(1)-\psi(a))=C_3$$

和

$$\lim_{x\to\infty}h_5(x)=\exp\{\lim_{x\to\infty}[\psi(x+1)-\psi(x+a)]\}=1。$$

2 主要结果的证明

在本节中,将证明本文中的主要结果,同时也将证明拟共形映射中的一个"常数"B_n的结论,进而得到其满足的精确不等式。

定理 1 的证明 令$g_5(x)=\Gamma(x+1)/\Gamma(x+a)-C_1$,$g_6(x)=x^2$。则$g_5(0)=g_6(0)=0$,$G(x)=g_5(x)/g_6(x)$,且

$$\frac{g'_5(x)}{g'_6(x)}=\frac{\Gamma(x)}{2\Gamma(x+a)}$$

$$[\psi(x+1)-\psi(x+a)]=\frac{g_1(x)g_4(x)}{2} \quad (8)$$

其中$g_1(x)$和$g_4(x)$分别由引理1.3和引理1.4的证明中定义。从引理1.3、引理1.4、(8)可知:$g_1(x)$和$g_4(x)$在$(0,\infty)$上是严格递减的正函数。由引理1.1可得$G(x)$的单调性。

定理 2 的证明 令$h_6(x)=C_4-[\Gamma(x+1)/(C_1\Gamma(x+a))]^{1/x}$和$h_7(x)=x$,则$h_6(0)=h_7(0)=0$,$H(x)=h_6(x)/h_7(x)$,且

$$\frac{h'_6(x)}{h'_7(x)}=h_8(x)=[-h_1(x)]h_5(x),$$

由引理1.5、1.6知,$h_8(x)$在$(0,\infty)$上严格递减。根据引理1.1,易得$H(x)$的单调性。

运用 l'Hospital 法则及引理1.5、1.6,函数$H(x)$极限分别为

$$H(0^+)=\lim_{x\to 0}\frac{h'_6(x)}{h'_7(x)}=-\lim_{x\to 0}h_1(x)h_5(x)=-C_2C_3$$

和

$$\lim_{x\to\infty}H(x)=\lim_{x\to\infty}h_8(x)=0。$$

显然,双向不等式(4)成立。

定理 3 的证明 对数求导得

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\psi(x)-\log x-1。$$

令$f_1(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{xF'(x)}{F(x)}\right]$,$f_1(x)=x\psi'(x)+\psi(x)-\log x-2$,$f'_1(x)=2\psi'(x)+x\psi''(x)-\frac{1}{x}$。

根据引理1.2(3)可知,$f'_1(x)<0$,故$f_1(x)$在$(0,\infty)$上严格递减。

根据引理1.2(2)和等(5)、(6)、(7),函数$f_1(x)$的极限值分别为

$$\lim_{x\to 0^+}f_1(x)=\lim_{x\to 0^+}[x\psi'(x)+\psi(x)-\log x-2]=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left\{x\left[\frac{1}{x^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\right]+\psi(x+1)-\frac{1}{x}-\log x-2\right\}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{(x+k)^2}-\log x\right]+\psi(1)-2=\infty$$

和

$$\lim_{x\to\infty}f_1(x)=\lim_{x\to\infty}[x\psi'(x)+\psi(x)-\log x-2]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{x^{2k+1}}\right)-\frac{1}{2x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2nx^{2n}}-2\right]=-1。$$

根据$f_1(x)$的单调性知:存在唯一的$x_0\in(0,\infty)$,使得函数$f_1(x)$在$(0,x_0)$上为正,而在(x_0,∞)上为负。此处,x_0为$f_1(x)=0$即$x\psi'(x)+\psi(x)-\log x-2=0$的唯一正根。由于$f_1(0.103)=0.006\ 19\cdots$,$f_1(0.104)=-0.006\ 37\cdots$,故$x_0\in(0.103,0.104)$。

综上,可知:函数$x\mapsto\frac{xF'(x)}{F(x)}$在$(0,x_0)$上严格递增而在$(x_0,\infty)$上严格递减。最后,由引理1.2(1)结论可证。

推论 2.1 函数$H_1(n)=2(4-B_n^2)(n-1)$关于n在$(1,\infty)$上严格递增。特别地,对$n\geqslant 2$,有

$$2\sqrt{1-\frac{\alpha_1}{n-1}}<B_n\leqslant 2\sqrt{1-\frac{\beta_1}{n-1}} \qquad (9)$$

等号成立当且仅当 $n=2$。其中 $\alpha_1=\pi^2/12$ 和 $\beta_1=1-\pi^2/16$ 为最佳常数。

证明　令 $x=1/[2(n-1)]$，则当 $a=1/2$ 时，函数

$$H_1(n)=2(n-1)\left(4-\left[\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2(n-1)}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2}\right)}\right]^{2(n-1)}\right)=H(x),$$

其中 $H(x)$见定理 2。由定理 2 得 $H_1(n)$的单调性。

其次，取 $a=1/2$，由(7)知 $C_3=4$，$C_2=[\psi'(1)-\psi'(1/2)]/2=-\zeta(2)=-\pi^2/6$，这里 $\zeta(x)$是 Riemannζ 函数。故

$$H_1(2)=H(1/2)=(16-\pi^2)/2,$$

$$\lim_{n\to\infty}H_1(n)=H(0^+)=\frac{2\pi^2}{3}。$$

显然，双向不等式(9)成立。

注：(1)因 B_n 与 b_n、J_n 均相关，由上面的结论也可以得到 b_n 和 J_n 相应的结果。

(2)不等式(9)改进了文中不等式(2)的上下界。

参考文献：

[1] Alzer H. A characterization of Euler's constant[J]. Expositiones Mathematicae, 2013, 31(4): 385-391.

[2] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables[M]. New York: Dover Publications, 1965: 253-294.

[3] Qiu S L, Vuorinen M. Handbook of Complex Analysis: Special Function in Geometric Function Theory[M]. Elsevier B V, 2005: 621-659.

[4] Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Mappings[M]. New York: John Wiley & Sons, 1997: 32-47.

[5] Klain D A, Rota G C. A continuous analogue of Sperner's theorem[J]. Communications Pure Appl Math, 1997: 205-223.

[6] Borgwardt K H. The Simplex Method, a Probabilistic Analysis[M]. New York: Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[7] Ma X Y, Chu Y M, Wang F. Monotonicity and inequalities for the generalized distortion function[J]. Acta Mathematica Scientia, 2013, 33B(6): 1759-1766.

[8] Ma X Y, Qiu S L, Zhong G H, et al. Some inequalities for the generalized linear distortion function[J]. Appl Math J Chinese Univ, 2012, 27(1): 87-93.

[9] Ma X Y, Wang M K, Zhong G H, et al. Some inequalities for the generalized distortion functions[J/OL]. Math Ineq Appl, 2012, 24(4): 941-954.

[10] Qiu S L, Vuorinen M. Some properties of the gamma and psi functions with applications[J]. Mathematics of Computation, 2004, 74(250): 723-742.

[11] Qi F. Bounds for the ratio of two gamma functions[J/OL]. Journal of Inequalities and Applications. 2010. [2014-03-05]. http://downloaols.hindawi.com/journals/jia/2010/493058.pdf.

[12] Aderson G D, Qiu S L. A monotoneity property of the Gamma function[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125(11): 3355-3362.

[13] Zhang X M, Xu T G, Situ L B. Geomeric convexity of a function involving Gamma function and applications to inequality theory[J]. J Inequal Pure and Appl Math, 2007, 8(1): 1-9.

[14] Batir N. Inequalities for the gamma function[J]. Archiv der Mathematik, 2008, 91(6): 554-563.

[15] 张小明，褚玉明. 解析不等式新论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.

[16] Niculescu C P. Convexity according to the geometric mean[J]. Math Inequal Appl, 2000, 2(2): 155-167.

Some Properties of Gamma Function and Its Applications

WANG Fei[1], *ZHOU Pei-gui*[2a], *MA Xiao-yan*[2b]

(1. Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou 310053, China; 2. Zhejiang Sci-Tech University, a. College of Science and Art; b. School of Science, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In this paper, some monotonicity properties of Gamma function are obtained by monotony L'Hospital Rule. A conjecture of Gamma function is solved by applying the rule of geometric convexity according to these properties. Precise estimate of the constant B_n in quasiconformal mapping is improved by using the method of equivalent transformation.

Key words: precise estimate; Γ-function; monotonicity; quasiconformal mapping; geometric convexity

(责任编辑：康　锋)