

一种场强测定的数值计算方法

缪佳佳¹, 周天和²

(1. 浙江省中波发射管理中心, 杭州 310012; 2. 浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘要: 提出了一种场强测定的算法, 利用已知的场强数据, 计算未知区域的场强的函数分布。通过已测定的场强数据的位置去构造相应的三角网格, 在每个三角网格上建立 Bernstein 多项式, 利用最小化能量函数的方法, 确定 Bernstein 基函数的 B 系数, 从而确定整个场强的函数分布。通过浙江省 35 个测定点某一频率覆盖区域内场强的实际接收情况检测及进行模拟计算, 结果表明该算法是可行。它可以为广播频率的设计、发射机功率的确定以及台站位置的规划提供参考。

关键词: Bernstein 基; 能量函数; 样条函数; 场强分布函数

中图分类号: O241.5 **文献标志码:** A

0 引言

场强是描述电场性质的基本物理量, 中波以地面传播为主, 在传播过程中受到传播路径上土壤和障碍物的阻挡、吸收而衰减。要及时了解节目的覆盖效果、收听质量, 场强收测就显得至关重要, 它为广播频率的设计、发射机功率的确定以及台站位置的规划提供真实可靠的数值依据。但事实上, 待测场强的区域分布范围太广或者某些收测点的地理环境不易展开收测, 此时需要通过已知区域的场强数据计算其他区域的场强数据。影响场强分布的因素有很多, 所以本文选择测定那些主要影响场强分布的区域, 如地形变化比较大或者受其它电波干扰较强的区域。一般采用的方法是通过建立预测模型来确定区域内的场强分布^[1-2]。本文提出了一种场强测定算法, 通过已测定的场强数据的位置去构造相应的三角网格, 在每个三角网格上建立 Bernstein 多项式, 利用最小化能量函数的方法, 唯一地确定 Bernstein 基函数的 B 系数, 从而确定整个场强的函数分布。

1 数学基础

假设 T 是一个非退化的三角形, 它的顶点是 $v_i := (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$, 假设三角形的顶点按照逆时针顺序排列, 用 $T := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ 来表示这个三角形。平面上的任何一点 $v := (x, y)$ 都可以写成如下的关系式:

$$\begin{cases} x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \\ y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3, \\ 1 = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases}$$

称 (b_1, b_2, b_3) 是点 v 关于三角形 T 的一个重心坐标。因为 T 是非退化的三角形, 所以这个解是唯一的。根据重心坐标可以定义 T 上的 d 次 Bernstein 多项式:

$$B_{ijk}^d(x, y) = \frac{d!}{i! j! k!} b_1^i b_2^j b_3^k, \quad i + j + k = d,$$

其中 i, j, k 是自然数。在没有歧义的情况下, $B_{ijk}^d(x, y)$ 通常可以记为 $B_{ijk}^d(v)$ 或 B_{ijk}^d 。可以证明集合 $B^d := \{B_{ijk}^d\}_{i+j+k=d}$ 是 d 次多项式空间的一组基^[3], 其个数为 $\binom{d+2}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$, 称之为 Bernstein 基。因

收稿日期: 2013-11-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(11201429)

作者简介: 缪佳佳(1981-), 女, 浙江杭州人, 工程师, 大学本科, 主要从事广播电视技术的研究。

通信作者: 周天和, 电子邮箱: barton@zstu.edu.cn

此,任意的一个 d 次多项式 p 在三角形 T 上可以唯一地表示成以下的形式:

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d$$

这种多项式的表达形式称为 B-形式,同时相应的 c_{ijk} 称为多项式 p 的 B 系数^[4]。为了方便计算,采用字典排列法来对这些系数进行排列,即两个系数 $c_{\nu\mu\kappa}$ 和 c_{ijk} ,如果 $\nu > i$,则 $c_{\nu\mu\kappa}$ 排在 c_{ijk} 前面。如果 $\nu = i$ 且 $\mu > j$,则 $c_{\nu\mu\kappa}$ 排在 c_{ijk} 前面。如果 $\nu = i, \mu = j$ 且 $\kappa > k$,则 $c_{\nu\mu\kappa}$ 排在 c_{ijk} 前面。以 3 次系数为例,它的排列顺序如下:

$$c_{300}, c_{210}, c_{201}, c_{120}, c_{111}, c_{102}, c_{030}, c_{021}, c_{012}, c_{003},$$

通过排列,可以把系数转化成向量 \mathbf{c} ,其中系数 c_{ijk} 是向量 \mathbf{c} 的一个分量。

对于给定的一个三角剖分 Δ 和两个整数 $d \geq 0$ 和 $0 \leq r \leq d$,用

$$S_d^r(\Delta) := \{s \in C^r(\Delta) : s|_T \in \mathbf{P}_d, \forall T \in \Delta\}$$

表示定义在 Δ 上的 d 次 r 阶光滑的样条函数空间,

其中 \mathbf{P}_d 是熟悉的 $\binom{d+2}{2}$ 维的二元 d 次多项式空间。由文献[4-5]可知,当 $d \geq 3r+2$ 时样条函数空间 $S_d^r(\Delta)$ 是存在的(对于特殊的剖分,这个条件可以减弱),本文假定一直满足这个条件。由 $S_d^r(\Delta)$ 的定义,对于 $s \in S_d^r(\Delta)$,则它在任意三角形 T 上可以表示成如下的 B-形式

$$s|_T(v) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk}^T B_{ijk}^d(v), \forall v \in T \in \Delta.$$

因此,在整个剖分 Δ 上样条函数 s 可以写成

$$s = \sum_{T \in \Delta} \sum_{i+j+k=d} c_{ijk}^T B_{ijk}^T,$$

这里相应的 Bernstein 基定义为

$$B_{ijk}^T(v) = \begin{cases} B_{ijk}^d(v), & v \in T, \\ 0, & v \in \Delta \setminus T. \end{cases}$$

此外,样条函数 s 的系数向量 $\mathbf{c} = (c_{ijk}^T, i+j+k=d, T \in \Delta)$ 还应满足 C^r 光滑条件,将其合并到同一个矩阵中可以得到光滑性条件的全局表示: $H\mathbf{c} = \mathbf{0}$ 。

2 场强计算算法

假设测定的那些场强数据地点是一个二维数值 $V = \{v_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ 点集,利用这组地点的点集可以构造一个三角剖分 Δ ,使得点集 V 中的点都在这个三角剖分中的三角形顶点上。关于如何利用点集构造三角剖分,可以参考文献[6]。令 $\{e_i, i=1, \dots, n\}$ 是测定的对应地点上的场强实值。由于场强分布是连续的,要求计算出的场强函数 $s_E \in C^1(\Delta)$ 能满

足一阶连续,同时要求 $s_E(v_i) = z_i, i=1, \dots, n$ 。因为本文要求场强函数 s_E 能够逼近这些给定的实值,即,如果存在某个 $f \in C^1(\Delta)$,有 $z_i = f(x_i, y_i)$,那么希望 s_E 与 f 能够充分的接近。

接下来简单介绍一下能量函数。能量函数 $G(s)$ 是用来表示通过固定数据点 V 的弹性曲面 s 的一种势能量。这种弹性曲面的势能量可以表示为:

$$G = \int_{\Delta} [aH^2 + bK] dx dy$$

其中 H 和 K 分别是曲面 s 的平均曲率和高斯曲率, a 和 b 是与曲面材料有关的常数^[7]。特别的,

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{(1+f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_y^2)f_{xx}}{(1+f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

和

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1+f_x^2 + f_y^2)^2},$$

其中 κ_1 和 κ_2 是曲面的主曲率。如果曲面的扰度非常小,那么假设 $f_x \approx 0$ 以及 $f_y \approx 0$ 。这样能量函数 G 就可以简化成下面的形式:

$$G = \int_{\Delta} [a(f_{xx} + f_{yy})^2 - 2(1-\omega)(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)] dx dy$$

其中参数 ω 也是一个与曲面材料有关的常数^[8]。简单化处理,令 $a=1$ 以及 $\omega=0$ 。这样能量函数就可以表示为:

$$G(s) = \int_{\Delta} [s_{xx}^2 + 2s_{xy}^2 + s_{yy}^2] dx dy$$

而现在这个形式就是文献中常用的能量函数形式^[9],也是本文将要采用的一种形式。

这里使用的样条函数是建立在样条空间 $S_5^1(\Delta)$ 上的,因此任何样条函数在这个空间上都可以表示 $s = \sum_{i=1}^M c_i B_i$,其中 $M = \dim S_5^1(\Delta)$ 。显然, $M \gg N = n$,其中 N 代表给定实值的个数。通过这些给定的实值用以下的方法来确定 $\{c_i\}_{i=1}^M$ 中的部分系数。对于某个 κ ,如果

$$B_j(x_i, y_i) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = \kappa, \\ 0, & \text{另外} \end{cases}$$

对所有的 $i, j=1, \dots, n$ 都成立,那么令 $c_j = z_{\kappa}$ 。假设 $\{c_i\}_{i=1}^N$ 是已经被计算出来的系数,那么还需要确定系数 $\{c_i\}_{i=N+1}^M$ 。

接下来利用最小能量法来计算这些系数。计算场强的问题可以表示成以下的数学形式:寻找一个场强函数 $s_E \in S_5^1(\Delta)$,满足

$$s_E(x_i, y_i) = z_i, \quad i=1, \dots, n,$$

且

$G(s_E) = \min\{G(s) : s(x_i, y_i) = z_i, i=1, \dots, n, s \in S_5^1(\Delta)\}$.

设 $\mathbf{c} = (c'_{ijk}, i+j+k=d, t \in \Delta)$ 是 s 的系数向量, 由于 $s \in S_5^1(\Delta)$, 因此 s 的光滑性条件转化为一个线性系统 $H\mathbf{c} = 0$. 同样能量函数 $G(s)$ 可以转化为系数向量 \mathbf{c} 的形式 $G(s) = \mathbf{c}^T K \mathbf{c}$, 其中 $K = \text{diag}(K_T, T \in \Delta)$ 是一个块对角矩阵

$$K_T = \left[\int_T \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} [B_{ijk}^5 \times B_{pqr}^5] dx dy \right]_{p+q+r=5}^{i+j+k=5}.$$

令 $\mathbf{f} = (z_i, i=1, \dots, n)$ 是给定数据值组成的向量. 根据 Hermite 插值条件表示为另一个线性系统 $I\mathbf{c} = \mathbf{f}$, 那么计算场强的问题就可以转化为以下的带约束的最小化问题:

$$\min\{\mathbf{c}^T K \mathbf{c} : H\mathbf{c} = 0, I\mathbf{c} = \mathbf{f}\}.$$

利用 Lagrange 乘数方法, 令

$$L(\mathbf{c}, \alpha, \beta) := \mathbf{c}^T K \mathbf{c} + \alpha^T H \mathbf{c} + \beta^T D \mathbf{c}$$

为一个拉格朗日函数. 需要找到一个局部最小的解 $L(\mathbf{c}, \alpha, \beta)$, 即:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} L(\mathbf{c}, \alpha, \beta) = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha} L(\mathbf{c}, \alpha, \beta) = 0, \frac{\partial}{\partial \beta} L(\mathbf{c}, \alpha, \beta) = 0.$$

有

$$\begin{bmatrix} 2K & H^T & I^T \\ H & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}.$$

为了解上述奇异的线性系统, 把它写成下面的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} K & L' \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

其中 K 是奇异矩阵. 接下来利用以下迭代算法来解这个系统.

迭代算法: 任意给定小的常数 $\epsilon > 0$ 和 $\lambda^{(0)}$ 的初始值 (一般可以选择 $\lambda^{(0)} = \mathbf{0}$), 那么可以得到 \mathbf{c} 的初始值:

$$\mathbf{c}^{(1)} = \left(K + \frac{1}{\epsilon} L' L \right)^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{1}{\epsilon} L' \mathbf{g} - L' \lambda^{(0)} \right).$$

依次地, 利用如下迭代得到 $\mathbf{c}^{(k)}, k \geq 2$:

$$\mathbf{c}^{(k+1)} = \left(K + \frac{1}{\epsilon} L' L \right)^{-1} \left(K \mathbf{c}^{(k)} + \frac{1}{\epsilon} L' \mathbf{g} \right).$$

关于迭代算法的收敛性分析可以参考文献[10].

计算出了场强函数的系数 \mathbf{c} , 同时就确定了场强函数. 这样任何地方 (x_i, y_i) 处的场强就可以用

$$s_E = \sum_{T \in \Delta} \sum_{i+j+k=d} c'_{ijk} B_{ijk}^T(x_i, y_i) \text{ 公式计算出来.}$$

3 浙江省内的场强计算

本节通过计算模拟还原浙江省内某一频率的场强覆盖情况.

若浙江省拟实现某一频率的同步广播覆盖, 那么全面掌握该频率在省内的覆盖情况至关重要. 准确真实的场强函数分布将为发射点、发射功率的确定及调整提供数值依据. 服务区内, 场强已测定数值越多且越具有代表性, 那么区域内场强分布还原越真实、越准确.

假设 $\{(x_i, y_i, E(x_i, y_i)), i=1, \dots, 35\}$ 是已经测定的浙江省内 35 个主要测试地点的场强数据. 令 Δ 是一个根据这 35 个主要测试地点 $\{(x_i, y_i), i=1, \dots, 35\}$ 来建立的一个三角剖分 (如图 1), 这里运用 $S_5^1(\Delta)$ 这种样条空间. 需要找一个场强函数 $s_E \in S_5^1(\Delta)$ 满足

$$s_E(x_i, y_i) = E(x_i, y_i), \quad i=1, \dots, 35$$

以及

$$G(s_E) = \min\{G(s) | s(x_i, y_i) = E(x_i, y_i), \quad i=1, \dots, 35\},$$

其中 $G(s)$ 为第二节中的能量函数, 可以证明存在一个唯一的解 s_E 属于 $S_5^1(\Delta)$ 样条空间.

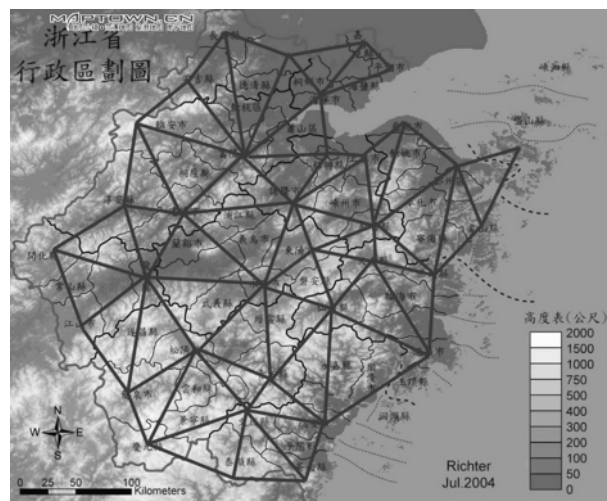


图1 浙江省内的数据点以及相应的三角剖分
最后通过计算得到了省内场强函数 s_E , 并利用了
这个函数还原了浙江省内的场强分布, 如图2所示。

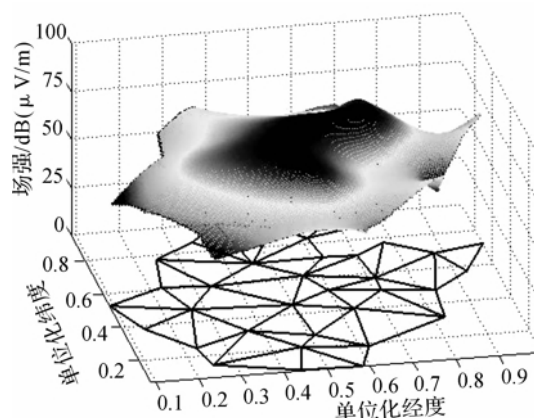


图2 浙江省内场强分布

得到了场强分布函数,对于区域分布内任一点的数值,都可以通过函数的简单计算求得。

4 总 结

本文提出了一种利用样条函数构造场强函数的方法,该方法采用带约束最小能量函数的插值计算。本文不仅从数学理论上分析了该算法,而且也从数值模拟计算上实现了该算法。但由于浙江省内目前无法做到同频覆盖,因此采用了假定数据进行数值模拟计算,但它可以为今后省内同频覆盖提供理论参考。同时也可以为广播频率的设计、发射机功率的确定以及台站位置的规划提供数值计算依据。

由于地球是一个球体,因此采用二元样条函数来进行模拟计算有它的局限性。今后的工作,将在本文的基础上,适当增加构造球面样条函数,进一步提高计算的准确性。

参考文献:

- [1] 吴洪秀. 中短波广播信号场强测量方法在实际中的应用[J]. 中国无线电, 2011(8): 32-33.
- [2] 王贵金, 徐苏显, 吴晋军. 扬州中波广播场强覆盖勘测

- 与分析[J]. 视听界广播电视技术, 2012(3): 47-53.
- [3] 周天和. 二元样条函数方法求数据插值拟合问题[D]. 杭州: 浙江大学, 2008: 2-9.
- [4] Lai M J, Schumaker L L. Spline Functions on Triangulations[M]. Cambridge: United Kingdom at the University Press, 2007.
- [5] Lai M J, Schumaker L L. Approximation power of bivariate splines[J]. Advances in Computational Mathematics, 1998, 9(2): 251-279.
- [6] Schumaker L L. Triangulation methods[C]// Multivariate Approximation. New York, 1987: 219-232.
- [7] Willmore T J. Riemannian Geometry[M]. New York: Oxford University Press, 1997.
- [8] Schumaker L L, Fasshauer G E. Minimal energy surfaces using parametric splines[J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13: 45-76.
- [9] Farmer K, Lai M J. Scattered data interpolation by C^2 quintic splines using energy minimization[C]// Approximation Theory 9. New York, 1998: 47-54.
- [10] Awanou G, Lai M J, Wenston P. The multivariate spline method for scattered data fitting and numerical solutions of partial differential equations[C]// Wavelets and Splines. Tennessee, 2006: 24-76.

A Numerical Calculation Method on Measurement of Field Intensity

MIAO Jia-jia¹, ZHOU Tian-he²

(1. Zhejiang Province AM Transmission Management Center, Hangzhou 310012, China;

2. School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper proposes an algorithm on measurement of field intensity to calculate field intensity distribution function of unknown regions by known field intensity data. Specifically, it constructs corresponding triangular meshes by positions of measured field intensity data, builds Bernstein polynomials on each triangular mesh, and uses the method of minimizing energy function to determine B coefficient of Bernstein basis function, and thus determines the function distribution of the entire field intensity. Through testing and simulation calculation of actual field intensity reception of a frequency coverage area among 35 measuring points in Zhejiang Province, results indicate that this algorithm is feasible, and could provide reference for the design of radio frequency, determination of transmitter power and station location planning.

Key words: Bernstein; energy function; spline function; field intensity distribution function

(责任编辑: 康 锋)