浙江理工大学学报(自然科学版),第31卷,第3期,2014年5月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 31, No. 3, May 2014

文章编号: 1673-3851 (2014) 03-0316-04

方程解的存在唯一性定理及其在神经元网络模型研究中的应用

张丽俊,张家豪
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要:研究利用函数的性质研究方程解的存在性和唯一性问题的方法,得到了一个判断方程解唯一性的定理,进而利用该定理证明了神经元网络模型中的一类非线性积微分方程波前解的存在唯一性问题,大大简化了原文献中的证明。

关键词:解的存在性和唯一性;积微分方程;波前解
中图分类号:O175.14 **文献标志码**:A

0 引 言

关于方程 $f(x)=0$ 解,即函数 $y=f(x)$ 零点的存在性和唯一性问题是高等数学中最基本也是最重要的问题之一。微积分学中关于利用函数的连续性或者可微性来证明方程解的存在性和唯一性问题的基本定理有介值定理和中值定理[1],而这两个定理正是微积分学中的基础和重要的定理。本文研究方程解的存在性和唯一性的证明方法,并给出一个利用函数及其导函数的关系判断函数零点唯一性的定理,并利用该定理证明神经元网络模型中的一个模型方程波前解对应的波速方程解的唯一性问题,以期简化文献中的证明。

证明函数 $y=f(x)$ 的零点存在性问题的一个最基本的思路和定理就是介值定理,即若函数 $y=f(x)$ 是一个闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,且 $f(a)f(b)=0$,那么在该区间内至少有该函数的一个零点存在。介值定理已被广泛应用于证明涉及解的存在或者说函数零点的存在性问题上。除此之外,中值定理也可以巧妙地用来证明函数的零点问题,例如可以构造函数 $y=f(x)$ 的原函数 $F(x)$,然后证明函数 $F(x)$ 在某个闭区间上满足中值定理的条件,即:若 $y=F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可导,$F(a)=F(b)$,则至少存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $F'(c)=f(c)=0$。然而对于证明方程解唯一性问题的最基本的一个思路就是若能证明函数是单调的,则函数的零点若存在则必是唯一的。但显然函数单调的要求过于苛刻,一般情况下函数都不能满足。另外还有一个基本的想法,那就是利用反证法证明可微函数零点的唯一性。若假设该函数至少有两个零点,利用函数与其导函数的关系推出矛盾的结论,则可以证明该函数的零点若存在必然是唯一的。本文基于这个思路给出了一个关于函数零点的唯一性定理,结论如下:

定理1 若函数 $f(x)$ 是定义在某个区间 I 上的可微函数,则有下列结论成立:

(A) 若存在非负函数 $g(x)$,使得 $f'(x)>g(x)\cdot f(x)$,则对任何 $A\geqslant 0$,若在区间 I 的内部有点 x_0 使得 $f(x_0)=A$,则 x_0 必是唯一的;

(B) 若存在正值函数 $g(x)$,使得 $f'(x)\geqslant g(x)\cdot f(x)$,则对任何 $A>0$,若在区间 I 的内部有点有 x_0 使得 $f(x_0)=A$,则 x_0 必是唯一的。

1 定理1证明

在本节将给出定理1的证明。

收稿日期:2013-12-20
基金项目:国家自然科学基金项目(11101371)
作者简介:张丽俊(1973-),女,杭州人,副教授,博士,主要从事动力系统理论及其在非线性方程中的应用研究。

证明:本文将对结论(A)进行证明,结论(B)证明类似而省略。

对任何实数 $A\geqslant 0$,若有 x_0 使得 $f(x_0)=A$,则由已知条件可知

$$f'(x_0)>g(x_0)\cdot f(x_0)=Ag(x_0)\geqslant 0,$$

所以函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 的一个包含在区间 I 内的小邻域$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$内是严格单调递增的,从而任意 $x\in(x_0,x_0+\varepsilon]$, $f(x)>A$。若有 $x_1\neq x_0$ 使得 $f(x_1)=f(x_0)=A$,不妨设 $x_1>x_0$,且对于任意 $x\in(x_0,x_1)$都有, $f(x)\neq A$,即取 x_1 为函数 $f(x)$位于 $x=x_0$ 右侧的第一个值达到 A 的点。由已知条件可知 $f(x)$在区间$[x_0+\varepsilon,x_1]$上满足拉格朗日中值定理条件,而 $f(x_0+\varepsilon)>A=f(x_1)$,所以至少存在一个点 $\xi\in[x_0+\varepsilon,x_1]$,使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_0+\varepsilon)}{x_1-(x_0+\varepsilon)}<0$。然而 $f'(\xi)=g(\xi)f(\xi)\geqslant 0$,得到矛盾。所以假设存在 $x_1\neq x_0$ 使得 $f(x_1)=f(x_0)=A$ 不成立,即 x_0 若存在就必是唯一的。

当然关于函数零点的唯一性还有其他的证明方法,例如可以利用函数在零点左右两侧的极值的特点证明函数零点的唯一性,若能够证明函数在某点一侧的最大值小于 0,而另一侧的最小值大于零,则显然该零点是唯一的。下面将利用定理 1 来证明神经元网络的模型方程中一类基本的积微分方程的波前解的对应波速方程解的唯一性问题。

2　神经元网络系统中一类非线性积微分方程波前解的存在唯一性

2.1　模型的背景以及数学假设

神经元网络的模型方程中有一个基本的模型方程[2-3]:

$$u_t+u=\alpha\int_{\boldsymbol{R}}K(x-y)H\left(u\left(y,t-\frac{1}{c}\mid x-y\mid\right)-\theta\right)\mathrm{d}y,\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{R}$ 表示全体实数集,其右侧积分中的函数 $H(x)$常被取为 Heaviside 函数,即:

$$H(U-\theta)=\begin{cases}1 & U>\theta\\ \frac{1}{2} & U=\theta,\\ 0 & U<\theta\end{cases}$$

$K(x)$被称为核函数,往往被理解为是概率密度函数。一般情况下核函数 $K(x)$具有下列基本的性质:核函数 $K(x)$几乎处处光滑,在 $x=0$ 处连续,且有:

$$\int_{-\infty}^{0}K(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2};\quad \int_{R}k(x)\mathrm{d}x=1;$$

$$|K(x)|\leqslant Ce^{-\rho|x|}\quad x\in\boldsymbol{R},$$

其中,C、ρ 是正常数,$\boldsymbol{R}$ 表示全体实数集。一般的模型中的核函数具有下列三类。

第一类:非负的核函数,即,$K(x)\geqslant 0,x\in\boldsymbol{R}$。非负核函数对应了神经元网络中的单纯激励的模型,比如 $K(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$,见图(1)。

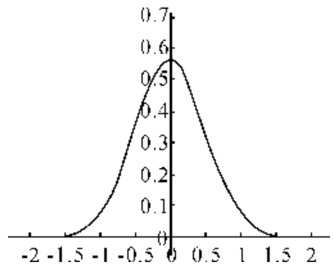

图 1　第一类核函数

第二类:“墨西哥帽”函数,即:存在正常数 M 和 N 使得 $K(x)\geqslant 0,x\in(-M,N)$;$K(x)<0,x\in(-\infty,-M)\cup(N,+\infty)$,而且满足$\int_{-\infty}^{0}|x|K(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$。“墨西哥帽”函数对应了神经元网络中的横向抑制的模型,比如 $K(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}$,见图(2)。

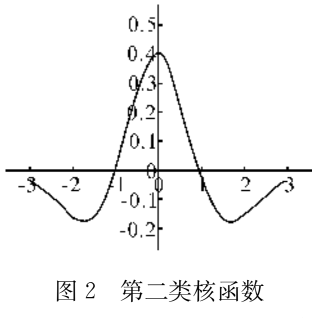

图 2　第二类核函数

第三类:“反墨西哥帽”函数,即,存在正常数 M 和 N 使得 $K(x)\leqslant 0,x\in(-M,N)$;$K(x)\geqslant 0,x\in(-\infty,-M)\cup(N,+\infty)$,而且满足$\int_{-\infty}^{0}|x|K(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$。“反墨西哥帽”函数对应了神经元网络中的横向激励的模型,比如 $K(x)=|x|e^{-\frac{1}{2}x^2}-2|x|e^{-2x^2}$,见图(3)。

对于以上三类核函数,以及其他一些类型的核函数,该方程的波前解的存在性、唯一性以及稳定性在近年来得到了广泛的关注[2-8]。这些研究论文中

最基本的一种方法和思路就是通过证明所谓“波速指标方程”解的存在唯一性来证明的[6-9]。

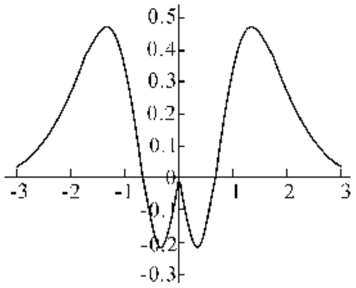

图 3 第三类核函数

2.2 波速指标函数解的存在唯一性研究

行波解是方程的一类形如 $u(x,t)=U(z)=U(x+\mu t)$的解,这类解中的波前解因为具有和神经元传输类似的性质而得到了广泛关注。波前解的典型特征是 $\lim\limits_{z\to\pm\infty}U(z)=U_{\pm}$,$U_{+}>U_{-}$。显然模型方程(1)是一个非线性积微分方程,为了得到其波前解,通过行波变换将该非线性偏微分积分方程化为下列常微分积分方程:

$$\mu U'(z)+U=\alpha\int_{R}K(z-y)H\left(U\left(y-\frac{\mu}{c}\mid z-y\mid\right)-\theta\right)\mathrm{d}y \quad (2)$$

一般来说对于非线性方程(2)我们是无法求出其解的,然而若方程(2)的解能够满足下列条件 $H1$:

$U(z)<\theta,z<0$; $U(0)=\theta$; $U(z)>\theta,z>0$,

若进一步假设 $0<\mu<c$,则非线性方程(1)就可以退化为一个简单的一阶线性微分方程:

$$\mu U'(z)+U=\alpha\int_{-\infty}^{\frac{cz}{c+\mathrm{sgn}(z)\mu}}K(t)\mathrm{d}t \quad (3)$$

利用一阶线性常微分方程求解方法[10]容易求出方程(3)的精确解为:

$$U(z)=\alpha\int_{-\infty}^{\frac{cz}{c+\mathrm{sgn}(z)\mu}}K(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{-\infty}^{z}e^{\frac{s-z}{\mu}}K\left(\frac{c}{c+\mathrm{sgn}(s)\mu}s\right)\frac{c}{c+\mathrm{sgn}(s)\mu}\mathrm{d}s. \quad (4)$$

但注意到函数(4)并不一定是方程(2)的解,除非函数(4)满足条件($H1$),所以为了证明这类解的存在和唯一性,必须证明存在唯一的波速 μ_0 使得函数(4)满足假设条件 $U(z)<\theta,z<0;U(0)=\theta;U(z)>\theta,z>0$。利用条件 $U(0)=\theta$,通过积分的变量代换,得到:

$$\alpha\int_{-\infty}^{0}K(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{s}{\mu}}K\left(\frac{cs}{c-\mu}\right)\frac{c}{c-\mu}\mathrm{d}s=\theta, \quad (5)$$

即:

$$\alpha\int_{-\infty}^{0}K(s)\mathrm{d}s-\alpha\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s=\theta.$$

若令“波速指标方程”

$$\varphi(\mu)=\alpha\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s, \quad (6)$$

则证明存在唯一的波速 μ_0 使得

$$\varphi(\mu_0)=\alpha\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{c-\mu_0}{c\mu_0}s}K(s)\mathrm{d}s-\theta=\frac{\alpha}{2}-\theta \quad (7)$$

成立是证明函数(4)是原模型方程(1)唯一波前解的一个必要条件,显然这个问题就是证明函数零点解的存在性与唯一性问题。对于存在性问题,易见波速指标方程 $\varphi(\mu)$是$(0,c)$上的连续函数,且 $\lim\limits_{\mu\to 0^{+}}\varphi(\mu)=0$,$\lim\limits_{\mu\to c^{-}}\varphi(\mu)=\frac{\alpha}{2}$,补充定义 $\varphi(\mu)$在 0 处值为 0,c 处值为$\frac{\alpha}{2}$,则 $\varphi(\mu)$就是$[0,c]$上的一个连续函数,利用闭区间上连续函数的介值定理可知对任意 $\theta\in\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$则存在 $\mu_0\in(0,c)$使得 $\varphi(\mu_0)=\frac{\alpha}{2}-\theta$。然而对于该方程解唯一性问题的证明就困难了许多。利用式(6),对其求导得到

$$\varphi'(\mu)=-\frac{\alpha}{\mu^{2}}\int_{-\infty}^{0}se^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s. \quad (8)$$

若核函数 $K(x)$ 是属于第一类的,即,$K(x)\geqslant 0$,则显然,$\varphi'(\mu)>0$ 当核函数是属于第二类的,即存在正常数 M 和 N 使得函数 $K(x)\geqslant 0$ 当 $x\in(-M,N)$;而 $K(x)\leqslant 0$ 当 $x\in(-\infty,-M)\cup(N,+\infty)$,在任何区间上不恒为 0 且满足$\int_{-\infty}^{0}\mid x\mid K(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$,则有

$$\varphi'(\mu)=-\frac{\alpha}{\mu^{2}}\int_{-\infty}^{0}se^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s>\frac{\alpha}{\mu^{2}}e^{-\frac{c-\mu}{c\mu}M}\int_{-\infty}^{0}\mid s\mid K(s)\mathrm{d}s\geqslant 0 \quad (9)$$

所以速度指标函数 $y=\varphi(\mu)$是一个单调递增的函数,所以 μ_0 是方程(7)的唯一解。然而对于第三类核函数,文献[8]用了 4 页的篇幅证明了 μ_0 是方程(7)的唯一解。下面我们将利用定理 1 给出一个简单明了的证明。

定理 2 假设 $K(x)$ 是满足条件(H) 的一个核函数,若存在正常数 M 和 N 使得函数 $K(x)$ 满足 $K(x)\leqslant 0,x\in(-M,N)$;$K(x)\geqslant 0,x\in(-\infty,-M)\cup(N,+\infty)$,$\int_{-\infty}^{0}\mid x\mid K(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$,且 $K(x)$

在任何区间上不恒为 0，则存在唯一的 μ_0 使得函数 $\varphi(\mu_0)=\frac{\alpha}{2}-\theta$。

证明：对于 μ_0 的存在性问题如上面所讨论的已经用介值定理证明。下面只需要证明其唯一性问题。由式(8)以及 $K(x)$ 所满足的条件，并结合 $\varphi(\mu)$ 的表达式(6)可知

$$\begin{aligned}\varphi'(\mu)&=-\frac{\alpha}{\mu^2}\int_{-\infty}^{0} s e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s\\&=\frac{\alpha}{\mu^2}\left[\int_{-\infty}^{-M}(-s)e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s+\int_{-M}^{0}(-s)e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s\right]\\&>\frac{\alpha}{\mu^2}\left[M\int_{-\infty}^{-M}e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s+M\int_{-M}^{0}e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s\right]\\&=\frac{M\alpha}{\mu^2}\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{c-\mu}{c\mu}s}K(s)\mathrm{d}s=\frac{M\alpha}{\mu^2}\varphi(\mu).\end{aligned}\tag{10}$$

由于 $\frac{M\alpha}{\mu^2}>0$，所以函数 $\varphi(\mu)$ 满足定理一的条件(B)，由定理 1 可知存在唯一的 μ_0 使得函数 $\varphi(\mu_0)=\frac{\alpha}{2}-\theta$。定理得证。

3　结　论

文献[8]中作者通过构造一个函数列的方法，用了 4 页的篇幅证明了 μ_0 是波速指标方程 $\varphi(\mu)=\frac{\alpha}{2}-\theta$ 的唯一解。显然，定理 2 的证明相对于原来文献的证明简单明了许多。虽然当核函数取第三类核函数时速度指标函数 $y=\varphi(\mu)$ 不再是一个单调递增的函数，但是从定理 2 的证明中可以看出该函数一旦与 x 轴相交后一定是穿过 x 轴之后是单调递增的，该证明方法和思路可以推广到其他类型的核函数的波速方程解的存在唯一性问题的相关证明中，本文为该类问题的证明提供了一条简单的思路和方法。

参考文献：

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析：上册[M]. 3 版，北京：高等教育出版社，2001.

[2] Atay F M，Hutt A. Neural fields with distributed transmission speeds and long-range feedback delays[J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems，2006，5(4)：670-698.

[3] Pinto D J，Ermentrout G B. Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks，I. traveling fronts and pulses，II. Lateral inhibition and standing pulses[J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems，2001，62(1)：I. 206-225，II 226-243.

[4] Atay F M，Hutt A. Stability and bifurcations in neural fields with finite propagation speed and general connectivity[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics，2004，65(2)：644-666.

[5] Hutt A，Longtin A. Effects of the anesthetic agent propofol on neural populations[J]. Cognitive Neurodynamics，2010，4(1)：37-59.

[6] Lv G，Wang M. Traveling waves of some integral-differential equations arising from neuronal networks with oscillatory kernels[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2010，370(1)：82-100.

[7] Magpantay F，Zou X. Wave fronts in neuronal fields with nonlocalpost-synaptic axonal connections and delayed nonlocal feedback connections[J]. Mathematical Biosciences and Engineering，2010，7(2)：421-442.

[8] Zhang L. How do synaptic coupling and spatial temporal delay influence traveling waves in nonlinear nonlocal neuronal networks? [J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems，2007，6(3)：597-644.

[9] Zhang L. Dynamics of neuronal waves[J]. Mathematische Zeitschrift，2007，255(2)：283-321.

[10] 丁同仁，李承治. 常微分方程教程[M]，北京：高等教育出版社，2004：164-167.

A Theorem on Existence and Uniqueness of Solutions to Equations and Its Application in the Study of Neuronal Network Model Equations

ZHANG Li-jun，*ZHANG Jia-hao*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：A theorem on the uniqueness of the solutions to equations by studying the properties of corresponding functions is obtained in this paper. The uniqueness of the wave front solutions to a class of integral-differential model equations in neuronal network is proved by applying this theorem，which greatly simplifies the original proof in literature.

Key words：existence and uniqueness of solution；integral-differential equations；wave front solution

（责任编辑：康　锋）