浙江理工大学学报(自然科学版),第 31 卷,第 1 期,2014 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 31, No. 1, Jan. 2014

文章编号:1673-3851 (2014) 01-0094-04

具有分段有界变差系数的三角级数的一个性质

何基龙
(浙江理工大学数学研究所,杭州 310018)

摘 要: 将 Leindler 定理的条件推广到分段有界变差数列(PBVS)中。当正弦级数的 Fourier 系数满足分段有界变差条件时,结合最佳逼近的定义,运用分段讨论方法,在 $L_{2\pi}^{p}$ 范数下研究得到正弦级数的最佳逼近与 Fourier 系数之间的关系式,并对关系式进行了证明。

关键词: 三角级数;分段有界变差数列;Fourier 系数;最佳逼近

中图分类号: O174.2 **文献标志码:** A

0 引 言

本文中记 $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, $S_n(f,x)$ 为级数的 n 阶部分和,$E_n(f,p)$ 为 f 在 $L_{2\pi}^{p}$ 中的 n 次多项式逼近的最佳逼近。

在三角级数的一致收敛性与 Fourier 级数的 L_1 收敛中,单调性条件的推广得到了如下的结果,详细定义可见文献[1]:

$$RBVS \subseteq NBVS \subseteq MVBVS$$

在 $L_{2\pi}^{p}$ 空间中三角级数的最佳逼近与 Fourier 系数的关系,Leindler 得到了如下的结论:

对于 $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$,当 $\{a_n\} \in RBVS$,如果 $1 < p < \infty$ 并且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < \infty$,则 $E(f,p) \leqslant C\left(a_{n+1}(n+1)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p k^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$, $n=0,1,2\cdots$ 这里 $q=\dfrac{p}{p-1}$。

上面结果最近被推广到了 $NBVS$ 中并且得到了与上面一样的结果,但无论是 $RBVS$ 还是 $NBVS$ 都要求系数是非负的[2]。一些研究者也研究了系数不一定是非负时的收敛问题,Telyakovskii[3] 考虑了具有罕变系数的级数收敛问题。周颂平教授等最先使用有界变差的概念,得到了许多的结果,例如在三角级数的一致收敛与可积性方面的研究[4]。

下面给出分段有界变差数列的定义(piecewise bounded variation sequence),简记 $PBVS$。

定义[4] 设 $\{n_k\}$ 是一个满足 Hadamard 条件以及 $n_1=1$ 的缺项级数,即存在一个正常数 δ,使得

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geqslant \delta > 1, k=1,2\cdots,$$

一个数列 $\lambda=\{\lambda_n\}$ 被称为分段有界变差数列($PBVS$),以记号 $\lambda \in PBVS$ 表示,如果它满足 $n_0=0$ 并且对于 $n_{m-1} < n \leqslant n_m$, $m=1,2,\cdots$ 满足下列条件(A)或(B)之一:

(A) 存在一个仅依赖于 λ 的正常数 $C(\lambda)$,使得

$$\sum_{k=n_{m-1}+1}^{n-1} |\Delta\lambda_k| \leqslant C(\lambda)|\lambda_n|, n_{m-1}+1 < n \leqslant n_m;$$

进一步,对应于 $n_{m-1}+1 < n \leqslant n_m$, λ_n 保持符号并且有 δ_0, $1<\delta_0<\delta$ 使得

$$|\lambda_{n_m}| \leqslant C(\lambda)\left|\lambda_{\left[\frac{n_m}{\delta_0}\right]-1}\right|.$$

(B) 存在一个仅依赖于 λ 的正常数 $C(\lambda)$,使得

$$\sum_{k=n}^{n_m-1} |\Delta\lambda_k| \leqslant C(\lambda)|\lambda_n|, n_{m-1}+1 < n \leqslant n_m;$$

进一步,对于 $n_{m-1}+1 < n \leqslant n_m$, λ_n 保持符号并且有 δ_0, $1<\delta_0<\delta$,使得

$$|\lambda_{n_{m-1}+1}| \leqslant C(\lambda)|\lambda_{[\delta_0 n_{m-1}]+1}|.$$

收稿日期:2012-06-01

作者简介:何基龙(1989-),男,安徽马鞍山人,硕士研究生,主要从事构造性分析与逼近论的研究。

显然上面的定义就包括了在$[n_{k-1}+1,n_k]$上保号且其绝对值为非负递增(递减)的数列必定满足(A)或条件(B)。

本文把 Leindler 定理中的条件推广到 $PBVS$ 中,得到了最佳逼近与 Fourier 系数之间的关系。文中 C 总表示一个正常数,不同场合可能不同。

1　结论与引理

定理 1　设 $f(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$,其中$\{a_n\} \in PBVS$。若$1<p<\infty$,且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}<\infty$ 成立,则有 $E_n(f,p) \leqslant C\Big(a_{n+1} n^{\frac{1}{q}}+\big(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^p k^{p-2}\big)^{\frac{1}{p}}\Big)$,其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$。

引理 1[1]　若$\{\lambda_n\} \in PBVS$,则对所有 $j \geqslant 1$,有

$$\sum_{k=j}^{\infty} |\Delta \lambda_k| \leqslant C\Big(|\lambda_j|+\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|\lambda_k|}{k}\Big).$$

引理 2[1]　设$\{\lambda_n\} \in PBVS$,若对于某个固定非负整数 s 及 $n_s+1 \leqslant n \leqslant n_{s+1}$,$\lambda_n$ 满足条件(A),则有

$$|\lambda_{n_{s+1}}| \leqslant C \sum_{i=\left[\frac{n_{s+1}}{\delta_0}\right]-1}^{n_{s+1}} \frac{|\lambda_i|}{i},$$

以及

$$|\lambda_n| \leqslant C|\lambda_{n_{s+1}}|,$$

特别

$$|\lambda_{n_s+1}| \leqslant C|\lambda_{n_{s+1}}|.$$

若对于某个固定非负整数 s 及 $n_s+1 \leqslant n \leqslant n_{s+1}$,$\lambda_n$ 满足条件(B),则有

$$|\lambda_{n_s+1}| \leqslant C \sum_{i=n_s+1}^{[\delta_0 n_s]+1} \frac{|\lambda_i|}{i},$$

以及

$$|\lambda_n| \leqslant C|\lambda_{n_s+1}|,$$

特别

$$|\lambda_{n_{s+1}}| \leqslant C|\lambda_{n_s+1}|.$$

引理 3[5]　若 $p \geqslant 1$,$\alpha_n \geqslant 0$,$\lambda_n>0$,$n=1,2\cdots$时,有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big)^p \leqslant p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k\Big)^p \alpha_n^p,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k\Big)^p \leqslant p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p}\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)^p \alpha_n^p.$$

2　结论的证明

定理 1 的证明: 记 $D_n(x)=\sum_{k=1}^{n} \sin kx\,(x \in(0,\pi])$,则$|D_n(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{|x|}$,$\{a_n\}$属于 $PBVS$,由 Abel 变换和引理 1、引理 2 知,设 $n_j<n+1 \leqslant n_{j+1}$ 时,得到

$$|f(x)-S_n(f,x)| \leqslant \Big|\sum_{k=n+1}^{n_{j+1}} a_k \sin kx\Big|+\sum_{s=j+1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}} a_k \sin kx\Big|=I_1+I_2,$$

如果对于 $n_j<n+1 \leqslant n_{j+1}$,$\{a_n\}$满足(A)或条件(B)时,都有

$$|a_{n_{j+1}}| \leqslant C\Big(|a_{n+1}|+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}\Big),$$

则

$$I_1 \leqslant |a_{n+1} D_n(x)|+|a_{n_{j+1}} D_{n_{j+1}}(x)|+\sum_{k=n+1}^{n_{j+1}-1}|\Delta a_k||D_k(x)| \leqslant \frac{C}{x}\Big(|a_{n+1}|+|a_{n_{j+1}}|+\sum_{k=n+1}^{n_{j+1}-1}|\Delta a_k|\Big) \leqslant \frac{C}{x}\Big(|a_{n+1}|+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}\Big).$$

因为

$$\frac{n_{s+1}}{\delta_0} \geqslant \frac{\delta}{\delta_0} n_s>n_s,\ \delta_0 n_s \leqslant \frac{\delta_0}{\delta} n_{s+1}<n_{s+1},$$

得到

$$\sum_{s=j+1}^{\infty}\big(|a_{n_s+1}|+|a_{n_{s+1}}|\big) \leqslant C \sum_{s=j+1}^{\infty}\Big(\sum_{i=\left[\frac{n_{s+1}}{\delta_0}\right]-1}^{n_{s+1}} \frac{|a_i|}{i}+\sum_{i=n_s+1}^{[\delta_0 n_s]+1} \frac{|a_i|}{i}\Big) \leqslant C \sum_{k=n_{j+1}}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} \leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k},$$

$$\sum_{s=j+1}^{\infty} \sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}-1}|\Delta a_k| \leqslant C\Big(|a_{n+1}|+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}\Big)+C\Big(\sum_{s=j+2}^{\infty} \sum_{k=n_{s-1}+1}^{n_{s+1}} \frac{|a_k|}{k}\Big).$$

则

$$I_2 \leqslant \frac{C}{x} \sum_{s=j+1}^{\infty}\Big(|a_{n_s+1}|+|a_{n_{s+1}}|+\sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}-1}|\Delta a_k|\Big) \leqslant \frac{C}{x}\Big(|a_{n+1}|+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}+\sum_{s=j+2}^{\infty} \sum_{k=n_{s-1}+1}^{n_{s+1}} \frac{|a_k|}{k}\Big) \leqslant \frac{C}{x}\Big(|a_{n+1}|+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}\Big).$$

结合 I_1 与 I_2 得

$$|f(x)-s_n(f,x)| \leqslant \frac{C}{x}\Big(|a_{n+1}|+\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}\Big),$$

则

$$\int_0^{\pi} |f-S_n(f,x)|^p \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |f-S_n(f,x)|^p \mathrm{d}x+$$
$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} |f-S_n(f,x)|^p \mathrm{d}x=J_1+J_2,$$

结合上面结果分别求得

$$J_1=\sum_{m=1}^{n}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}} |f-S_n(f,x)|^p \mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\Big(\sum_{m=1}^{n} m^{p-2}(a_{n+1})^p+\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k}\Big)^p\Big)\leqslant$$
$$C\Big(n^{p-1}a_{n+1}^p+n^{p-1}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k}\Big)^p\Big),$$

由 Holder 不等式知

$$n^{p-1}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k}\Big)^p=$$
$$n^{p-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^p k^{p-2}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{(\frac{2}{p}-2)\frac{p}{p-1}}\Big)^{p-1}\leqslant$$
$$C\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^p k^{p-2},$$

因此

$$J_1\leqslant C\Big(n^{p-1}a_{n+1}^p+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^p k^{p-2}\Big).$$

再由 $PBVS$ 的定义,且对某个 $\mu\geqslant 0$,有 $n_\mu<m\leqslant n_{\mu+1}, m\geqslant n+1$ 于是

$$J_2=\sum_{m=n+1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}} |f-S_n(f,x)|^p \mathrm{d}x=$$
$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\Big(\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\sin kx\Big|+\Big|\sum_{k=m+1}^{n_{\mu+1}}a_k\sin kx\Big|+$$
$$\sum_{j=\mu+1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}a_k\sin kx\Big|\Big)^p \mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\sum_{m=n+1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\frac{\pi}{m}}\Big|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\Big|^p+$$
$$\Big(\Big|\sum_{k=m+1}^{n_{\mu+1}}a_k\sin kx\Big|+\sum_{j=\mu+1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}a_k\sin kx\Big|\Big)^p \mathrm{d}x.$$

由前面知

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n_{\mu+1}}a_k\sin kx\Big|+\sum_{j=\mu+1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}a_k\sin kx\Big|\leqslant$$
$$\frac{C}{x}\Big(|a_{m+1}|+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k}\Big),$$

代入 J_2 得

$$J_2\leqslant C\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{-2}\Big(\sum_{k=n+1}^{m}a_k\Big)^p+$$
$$C\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{p-2}\Big(a_{m+1}^p+\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k}\Big)^p\Big),$$

其中在文献[6]中已经证明了

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}m^{-2}\Big(\sum_{k=n+1}^{m}a_k\Big)^p\leqslant C\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^p k^{p-2}\Big).$$

同样地由引理 3 与 J_1 中后半部分的证明得到

$$J_2\leqslant C\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^p k^{p-2}\Big).$$

结合 J_1 与 J_2 得到结论

$$E_n(f,p)\leqslant C\Big(a_{n+1}n^{\frac{1}{q}}+\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k^p k^{p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$.

得证。

参考文献:

[1] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件:发展与应用[M]. 北京:科学出版社,2012.

[2] 周颂平,乐瑞君. 单调性条件在 Fourier 级数收敛性中的最终推广:历史,发展,应用和猜想[J]. 数学进展,2011,40:129-155.

[3] Hardy, Littlewood. Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive function[J]. J Fur Math,1927,157:141-158.

[4] 周颂平,虞旦盛,周 平. 有分段有界变差系数的三角级数[J]. 数学学报,2008,51:633-646.

[5] 梅 颖,韦宝荣. 关于 Leindler 的两个定理的推广[J]. 浙江大学学报:理学版,2009,36:620-626.

[6] Leindler. Best approximation and Fourier coefficients[J]. Anal Math,2005,31:117-129.

A Property of Trigonometric Series with Piecewise Bounded Variation Coefficients

HE Ji-long

(Institute of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: When Fourier coefficient of sine series meets bounded variation condition, this paper generalizes the conditions in Leindler theorem to piecewise bounded variation sequence(PBVS), obtains the relational expression of optimal approximation and coefficient of sine series through research under $L_{2\pi}^{p}$ norm with piecewise discussion method in combination with the definition of optimal approximation, and proves the formula.

Key words: trigonometric series, PBVS(piecewise bounded variation sequence), Fourier coefficient, best approximation

(责任编辑：马春晓)

(上接第 78 页)

Study on Access Control Technology of Data Storage on Windows Azure Platform

NING Fang-hua[1], *NIU Jian-rui*[1], *YU Wu-jia*[2], *GUO Yu-ming*[3]

(1. Institute of Advanced Manufacturing Technology, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China; 2. College of Automation, Hangzhou Electronic Science and Technology University, Hangzhou 310018, China; 3. SDEE Hitachi High-Voltage Switchgear Co Ltd, Jinan 250101, China)

Abstract: In allusion to Microsoft cloud platform-Windows Azure platform, this paper focuses on studying access control technology of its services with storage function which include Storage Service and SQL Database of Windows Azure; analyzes and discusses access control technology of both storage services from two processes-user authentication and authorization; finally takes access control system based on Windows Azure for example according to storage characteristics of both services, gives the deployment scheme of secure storage of the system on Windows Azure platform and ensures the security and flexibility of the system.

Key words: Windows Azure Platform; access control technology; cloud computing

(责任编辑：张祖尧)