浙江理工大学学报，第 30 卷，第 4 期，2013 年 7 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 30, No. 4, Jul. 2013

文章编号：1673-3851 (2013) 04-0620-04

基于 PBV 条件下正弦与余弦积分的收敛性

张 静
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘 要：基于文献[2]中的思想，将系数数列的 PBV 条件推广到函数的 PBV 条件，分别给出了 PBV 条件下正弦积分与余弦积分一致收敛性的充分必要条件（见定理 1 和定理 2），并利用 Cauchy 收敛准则、分部积分等一些数学技巧去证明，最后给出了 PBV 条件中一个性质不可缺少的例子。

关键词：PBV 条件；正弦积分；余弦积分；一致收敛性
中图分类号：O174.21　　**文献标志码**：A

0 引 言

定义以下形式的三角级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx \tag{1}$$

与

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx \tag{2}$$

通过假设系数数列的单调性和非负性，人们得到了许多收敛性和可积性的结果。后来，许多数学工作者对条件进行推广，考虑了在拟单调、有界变差等情况下的收敛性和可积性[1]。

同时，知道在 Fourier 分析中，如果 $f(x) \in AC_{loc}^1(R_+)$，称

$$F(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \sin xt \, dx, \quad t \in [0, +\infty) \tag{3}$$

为 $f(x)$ 的正弦 Fourier 变换；

$$G(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos xt \, dx, \quad t \in [0, +\infty) \tag{4}$$

为 $f(x)$ 的余弦 Fourier 变换，其中 $AC_{loc}^1(R_+)$ 为 R_+ 上局部绝对连续函数类(locally absolutely continuous)。

在文献[2]中，Móricz 将系数数列满足 MVBV 和 NBV 条件的三角级数式(1)所获得的结论推广到满足 MVBV 和 NBV 条件的正弦 Fourier 变换式(3)，证明了正弦 Fourier 变换式(3)一致收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = 0$。而在文献[3]中，Kórus 则将 SBVS、$SBVS_2$ 分别推广到 SBVF、$SBVF_2$。笔者就基于文献[1]、[2]的想法，将三角级数系数数列的 PBV 条件[4]推广到 Fourier 变换的 PBV 条件。

1 分段有界变差函数(PBVF)的定义

定义 设 $f(x)$ 是任给有限区间 $[0, X]$ 上的有界变差函数并且对于任何给定的 $X > 0$，$\int_0^X f(x) dx$ 可积。给定数列 $A: \{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 满足 $a_0 = 0, a_1 = 1, \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \lambda > 1, n = 1, 2, \cdots$，设如果 $f(x)$ 在区间 $(a_{k-1}, a_k]$ 中保号，$f(x)$ 是 $(a_{k-1}, a_k]$ 上的有界变差函数，并且满足条件之一：

a) 当 $t \in [a_{k-1}, a_k)$ 时，有

$$\int_t^{a_k} | df(x) | \leqslant C(A) | f(t) | \tag{5}$$

进一步，存在 $\lambda_0 \in (1, \lambda)$ 有

$$| f(a_{k-1}) | \leqslant C(\lambda_0, A) | f(\lambda_0 a_{k-1}) | \tag{6}$$

b) 当 $t \in (a_{k-1}, a_k]$ 时，有

$$\int_{a_{k-1}}^t | df(x) | \leqslant C(A) | f(t) | \tag{7}$$

进一步，存在 $\lambda_0 \in (1, \lambda)$ 有

收稿日期：2013－01－05
基金项目：张 静(1989－)，女，山西晋中人，硕士研究生，主要从事逼近论中的构造性分析方面的研究。

$$|f(a_k)| \leqslant C(\lambda_0, A)\left|f\left(\frac{a_{k-1}}{\lambda_0}\right)\right| \tag{8}$$

则称函数 $f(x)$ 满足分段有界变差(piecewise bounded variation) 条件，记作 $f(x) \in \mathrm{PBVF}$。

本文中只考虑证明满足条件 a) 的情况，对于条件 b) 也可类似地证明。同时在文章中，$C(X_1, X_2, \cdots)$ 表示仅和 $X_1, X_2, \cdots$ 有关的正常数，如 $C(A)$ 就是表示仅和数列 A 有关的正常数，它出现在不同之处其值可以不同。在上面的定义中，PBV 条件要弱于 $AC_{loc}^1(R_+)$ 定义中的条件。

最终目的就是给出以下 3 个结论：

定理 1　如果 $f(x) \in \mathrm{PBVF}$，那么 $F(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x$ 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$；

定理 2　如果 $f(x) \in \mathrm{PBVF}$，那么 $G(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos xt\,\mathrm{d}x$ 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ 和$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

附注　存在一个函数 $f(x)$ 满足除式(6) 以外的 PBV 条件 a)，其正弦 Fourier 变换在$[0, +\infty)$ 上一致收敛，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ 不成立。

2　引　理

引理 1　当 $f(x) \in \mathrm{PBVF}$ 时，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$，则有 $\lim\limits_{b\to+\infty} b\int_b^{+\infty} |\mathrm{d}f(x)| = 0$。

证明： 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$，则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 X_1，对任何 $x \geqslant a_{j-1} > X_1$，均有 $|xf(x)| < \varepsilon$，则当 $b \geqslant a_{j-1}$ 时，不妨设 $b \in [a_{k-1}, a_k)$，则利用式(5) 可知道

$$\begin{aligned}
&b\int_b^{+\infty} |\mathrm{d}f(t)| \leqslant \\
&\quad b\int_b^{a_k} |\mathrm{d}f(t)| + b\sum_{k=r}^{+\infty}\int_{a_r}^{a_{r+1}} |\mathrm{d}f(t)| \leqslant \\
&\quad b\Big(C(A)|f(b)| + C(A)\sum_{r=k}^{+\infty} |f(a_r)|\Big) \leqslant \\
&\quad bC(A)|f(b)| + bC(A)\sum_{r=k}^{+\infty} |f(a_r)| \leqslant \\
&\quad \varepsilon + C(A)\sum_{r=k}^{+\infty} |a_k f(a_r)| \leqslant \\
&\quad C(A)\varepsilon\left[1 + \sum_{r=k}^{+\infty}\frac{a_k}{a_r}\right] \leqslant \\
&\quad C(A)\varepsilon\left[1 + \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^i}\right] \leqslant \\
&\quad C(A, \lambda)\varepsilon,
\end{aligned}$$

从而引理 1 得证。

3　定理的证明

定理 1 的证明： 充分性：显然当 $t = 0$ 时，正弦积分$\int_0^{+\infty} f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x$ 是收敛的。

考虑当 $t \in (0, +\infty)$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$，则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 X，对任何 $u > X_1$，均有 $|uf(u)| < \varepsilon$. 因此，对任何 $t \in (0, +\infty)$，不妨取 $T = \dfrac{1}{t} \in [a_{k-1}, a_k)$，则有对任何 $M' > M > X_1$，

$$\begin{aligned}
&\int_M^{M'} f(x)\,sinxt\,\mathrm{d}x = \\
&\quad \int_M^T f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x + \int_T^{a_k} f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x + \\
&\quad \int_{a_k}^{M'} f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

这里，根据 t 和 M, M' 取值不同，I_1, I_2, I_3 中可能形式有所变化，但都不影响最终证明，仅考虑三个都存在时的形式。

由 $|\sin xt| \leqslant |xt|$ 算得

$$\begin{aligned}
&|I_1| = \left|\int_M^T f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \\
&\quad \int_M^T |f(x)|xt\,\mathrm{d}x = t\int_M^T |f(x)|x\mathrm{d}x \leqslant \\
&\quad \varepsilon t(T - M) \leqslant \\
&\quad \varepsilon tT = \varepsilon,
\end{aligned}$$

由分部积分，

$$\begin{aligned}
&|I_2| = \\
&\quad \left|\int_T^{a_k} f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1}{t}\int_T^{a_k} f(x)\mathrm{d}\cos xt\right| \leqslant \\
&\quad \left|\frac{f(x)\cos xt}{t}\Big|_{x=T}^{a_k}\right| + \frac{1}{t}\left|\int_T^{a_k}\cos xt\,\mathrm{d}f(x)\right| \leqslant \\
&\quad \frac{|f(a_k)| + |f(T)|}{t} + \frac{1}{t}\int_T^{a_k} |\mathrm{d}f(t)| \leqslant \\
&\quad \varepsilon T\left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{T}\right) + Tf(T) \leqslant 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

利用引理 1，对上述 ε，进一步放大 X_1，使得 $a_k\int_{a_k}^{M'} |\mathrm{d}f(t)| \leqslant a_k\int_{a_k}^{\infty} |\mathrm{d}f(t)| \leqslant \varepsilon$，则有

$$\begin{aligned}
&I_3 = \left|\int_{a_k}^{M'} f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| = \\
&\quad \frac{1}{t}\left|\int_{a_k}^{M'} f(x)\mathrm{d}\cos\, xt\right| = \\
&\quad T\,|f(x)\cos xt\,|_{x=a_k}^{M'}| + T\left|\int_{a_k}^{M'}\cos xt\,\mathrm{d}f(x)\right| \leqslant
\end{aligned}$$

$$M'f(M')+a_k\,|\,f(a_k)\,|+a_k\int_{a_k}^{M'}|\,\mathrm{d}f(x)\,|\leqslant 3\varepsilon,$$

从而由 Cauchy 收敛准则，充分性得证。

必要性：由于正弦积分$\int_0^{+\infty}f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 上一致收敛，从而对任何 $\varepsilon>0$，存在充分大的 X_2，当 $u>X_2$ 时，不妨设 $u\in[a_{m-1},a_m)$，对任何 $t\in[0,+\infty)$ 得到

$$\left|\int_{\frac{u}{\lambda_0}}^{u}f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

当 $\lambda_0a_{m-1}\leqslant u<a_m$ 时，则有$\dfrac{u}{\lambda_0}\geqslant a_{m-1}$，$u<a_m$，利用保号性，且取 $t=\dfrac{\pi}{2u}$，能得到

$$\left|\int_{\frac{u}{\lambda_0}}^{u}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<C\varepsilon,$$

又由对任何$\dfrac{u}{\lambda_0}\leqslant y<u$，根据性质(5)，有

$$\begin{aligned}
&|\,f(u)\,|=\\
&\quad|\,f(u)-f(y)+f(y)\,|\leqslant\\
&\quad\int_y^u|\,\mathrm{d}f(t)\,|+|\,f(y)\,|\leqslant\\
&\quad\int_y^{a_m}|\,\mathrm{d}f(t)\,|+|\,f(y)\,|\leqslant\\
&\quad C(A)\,|\,f(y)\,|,
\end{aligned}$$

注意到保号性，就得到

$$\begin{aligned}
&C\varepsilon>\left|\int_{\frac{u}{\lambda_0}}^{u}f(x)\,\mathrm{d}x\right|>\\
&\quad\frac{|\,f(u)\,|}{C(A)}\left(u-\frac{u}{\lambda_0}\right)=|\,f(u)u\,|\,\frac{\lambda_0-1}{C(A)\lambda_0},
\end{aligned}$$

这说明当 $\lambda_0a_{m-1}\leqslant u<a_m$ 时，有

$$|\,f(u)u\,|\leqslant C(A,\lambda_0)\varepsilon。$$

当 $a_{m-1}\leqslant u<\lambda_0a_{m-1}$ 时，利用性质式(6)，有

$$\begin{aligned}
&|\,uf(u)\,|=u\,|\,f(u)-f(a_{m-1})+f(a_{m-1})\,|\leqslant\\
&\quad u\int_{a_{m-1}}^{u}|\,\mathrm{d}f(t)\,|+u\,|\,f(a_{m-1})\,|\leqslant\\
&\quad u\int_{a_{m-1}}^{a_m}|\,\mathrm{d}f(t)\,|+u\,|\,f(a_{m-1})\,|\leqslant\\
&\quad uC(A)\,|\,f(a_{m-1})\,|+u\,|\,f(a_{m-1})\,|\leqslant\\
&\quad uC(A)\,|\,f(a_{m-1})\,|\leqslant\\
&\quad C(A)\lambda_0a_{m-1}\,|\,f(a_{m-1})\,|\leqslant\\
&\quad C(\lambda_0,A)\lambda_0a_{m-1}\,|\,f(\lambda_0a_{m-1})\,|\leqslant\\
&\quad C(\lambda_0,A)\varepsilon,
\end{aligned}$$

从而必要性得证。

综上，定理 1 证毕。

定理 2 的证明：充分性：当 $t=0$，由条件知 $G(0)$ 收敛，现考虑 $t\in(0,+\infty)$，令 $T=\dfrac{1}{t}\in[a_{k-1},a_k)$，又由 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$ 和$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛可知，对任何 $\varepsilon>0$，存在充分大的数 X_1，对任何$\dfrac{u'}{\lambda_0}>\dfrac{u}{\lambda_0}>X_1$，均有 $|\,uf(u)\,|<\varepsilon$ 和 $\left|\int_u^{u'}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$ 成立，从而有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_u^{u'}f(x)\cos xt\,\mathrm{d}x-\int_u^{u'}f(x)\,\mathrm{d}x\right|=\\
&\quad\left|\int_u^{u'}f(x)(\cos xt-1)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&\quad\left|\int_u^{T}f(x)(\cos xt-1)\,\mathrm{d}x\right|+\\
&\quad\left|\int_T^{a_k}f(x)(\cos xt-1)\,\mathrm{d}x\right|+\\
&\quad\left|\int_{a_k}^{u'}f(x)(\cos xt-1)\,\mathrm{d}x\right|=\\
&\quad I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

计算得到：

$$\begin{aligned}
&|\,I_1\,|=\left|\int_u^T f(x)2\sin^2\frac{xt}{2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\\
&\quad\int_u^T|\,f(x)\,|\,xt\,\mathrm{d}x<\varepsilon t(T-u)<\varepsilon,
\end{aligned}$$

同时，利用引理 1，则有

$$\begin{aligned}
&|\,I_2\,|=\left|\int_T^{a_k}f(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin xt}{t}-x\right)\right|\leqslant\\
&\quad\left|\left(\frac{\sin a_kt}{t}-a_k\right)f(a_k)-\left(\frac{\sin Tt}{t}-T\right)f(T)\right|+\\
&\quad\left|\int_T^{a_k}\left(\frac{\sin xt}{t}-x\right)\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\\
&\quad(T+a_k)\,|\,f(a_k)\,|+(T+T)\,|\,f(T)\,|+\\
&\quad T\left|\int_T^{a_k}(\sin xt-xt)\,\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\\
&\quad 4\varepsilon+T\left|\int_T^{a_k}\sin xt\,\mathrm{d}f(x)\right|+T\left|\int_T^{a_k}xt\,\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\\
&\quad 4\varepsilon+T\int_T^{a_k}|\,\sin xt\,||\,\mathrm{d}f(x)\,|+\left|\int_T^{a_k}x\,\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\\
&\quad 4\varepsilon+T\int_T^{a_k}|\,df(x)\,|+|\,a_kf(a_k)\,|+|\,Tf(T)\,|+\\
&\quad\left|\int_T^{a_k}f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 8\varepsilon,
\end{aligned}$$

再次利用引理 1，有

$$\begin{aligned}
&|\,I_3\,|=\left|\int_{a_k}^{u'}f(x)(\cos xt-1)\,\mathrm{d}x\right|=\\
&\quad\left|\int_{a_k}^{u'}f(x)\,\mathrm{d}(T(\sin xt-xt))\right|\leqslant\\
&\quad|\,f(u')[(T\sin u't)-u']\,|+\\
&\quad|\,f(a_k)[(T\ \sin a_kt)-a_k]\,|+\\
&\quad\left|\int_{a_k}^{u'}(T(\sin xt-xt))\,\mathrm{d}f(x)\right|\leqslant\\
&\quad 2\,|\,f(u')\,|\,u+2\,|\,f(a_k)\,|\,a_k+
\end{aligned}$$

$$\left|T\int_{a_k}^{u'}\sin xtf'(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{a_k}^{u'}xf'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$4\varepsilon+a_k\int_{a_k}^{u'}|\mathrm{d}f(x)|+|u'f(u')|+$$
$$|f(a_k)|a_k+\left|\int_{a_k}^{u'}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$C(A,\lambda)\varepsilon.$$

综合上述所有估计,利用 Cauchy 收敛准则就推得 $G(t)$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 上是一致收敛的。

必要性:由于 $G(t)$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 上一致收敛,显然就有 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。后面证明过程和定理 1 的必要性证明过程类似。

综上定理 2 得证。

在对定理 1 和定理 2 证明中可以发现,式(6) 在充分性证明中并没有涉及,只在必要性证明中才涉及。因此,对于式(6) 是否可以去掉呢?附注对此给出了否定的回答。

附注的证明:

令

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,2);\\ (-1)^j\dfrac{1}{j^2} & x=2^j,j=1,2,\cdots\\ (-1)^j\dfrac{1}{3^{j+1}} & x\in(2^j,2^{j+1}),j=1,2,\cdots,\end{cases}$$

显然可知 $\int_0^{+\infty}|f(x)\sin xt|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2^j}{3^{j+1}}=\frac{2}{3}$,从而绝对一致收敛,但显然知道 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)\neq0$.

4　结　语

研究了在满足 PBV 条件时,函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换下的反常积分——正弦积分 $F(t)$ 一致收敛性的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=0$ 以及余弦积分 $F(t)$ 一致收敛性的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=0$ 和 $\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛。在证明过程中,运用 Cauchy 收敛准则以及微积分分部积分法等数学技巧,最后给出了一个附注,说明 PBV 条件里这些性质是缺一不可的。

参考文献:

[1] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件:发展和应用[M]. 北京:科学出版社,2012.

[2] Móricz F. On the uniform convergence of sine integrals[J]. J Math Anal Appl,2009,354:213-219.

[3] Kórus P. On the uniform convergence of special sine integrals[J]. Acta Math Hungar,2011,133(1/2):82-91.

[4] Zhou S P. A remark on the uniform convergence of certain trigonometric series[J]. 数学进展,2007,36:239-244.

Convergence of Sine and Cosine Integrals under PBV Condition

ZHANG Jing

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper promotes PBV condition of coefficient series to PBV condition of function based on the thought in literature [2] and respectively gives necessary and sufficient conditions of uniform convergence of sine and cosine integrals under PBV condition (see theorems 1 and 2); demonstrates them with some mathematical techniques such as Cauchy convergence criterion and integration by parts and finally gives an example of indispensable property in PBV condition.

Key words: PBV condition; sine integral; cosine integral; uniform convergence

(责任编辑:陈和榜)