

基于节点切线平行线的非圆齿轮齿廓特征点求法

黄 鹏, 李 革, 曹宁慧

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘 要: 根据范成法加工非圆齿轮的原理, 提出基于节点切线平行线的非圆齿轮齿廓特征点求法, 以提高齿廓计算的精度; 讨论利用齿廓节点处的切线平行线与齿廓包络线求取齿廓曲线的特征点, 进而获得非圆齿轮的齿廓数据; 通过傅里叶节曲线非圆齿轮的齿廓数据计算, 验证了该算法的正确性。

关键词: 切线; 特征点; 齿廓系数; 傅里叶节曲线

中图分类号: TH132 **文献标识码:** A

0 引 言

非圆齿轮用于传递两轴间的非匀速运动和动力, 它具有传动比可变、结构紧凑、传动平稳, 易实现动平衡等优点。一直以来由于非圆齿轮的设计复杂, 加工制造比较困难, 所以应用并不广泛。随着现代加工工艺的发展, 各种新型齿轮加工方法得到了推广, 如线切割、粉末冶金等新工艺的应用, 使非圆齿轮的大批量、低成本的生产制造成为可能, 因此非圆齿轮逐渐在各行各业中得到了应用。

由于非圆齿轮的齿廓不规则性, 目前对于非圆齿轮的加工广泛采用线切割和粉末冶金等现代加工方法。在采用线切割或粉末冶金进行非圆齿轮的加工时, 首先需要确定非圆齿轮的齿廓数据, 才能根据齿廓数据进行线切割加工或制造粉末冶金的模具。目前计算齿廓数据采用的方法是包络线交点法^[1], 其原理是取相邻两条包络线的交点作为齿廓曲线的特征点, 当相邻包络线的距离达到足够小时, 这些特征点就会接近于理论齿廓曲线, 就能得到一条接近于理论齿廓曲线的曲线, 即近似的齿廓曲线。这种算法的优点是计算简单, 但算出的齿廓数据精度却不高。

本文根据范成法加工非圆齿轮的特点, 提出了基

于节点切线平行线计算非圆齿轮齿廓曲线数据的算法, 并给出了齿廓曲线数据的计算步骤。经实例计算验证, 该算法能够得到较高精度的齿廓数据。

1 范成法加工非圆齿轮齿廓的原理

范成法加工齿轮的原理如图 1 所示: 齿坯①固定不动, 齿条②的节线③围绕着非圆齿轮的节曲线④做相切纯滚动, 在此运动过程中不断切割齿坯, 形成齿轮的轮廓。在相切纯滚动过程中要满足下列两个条件:

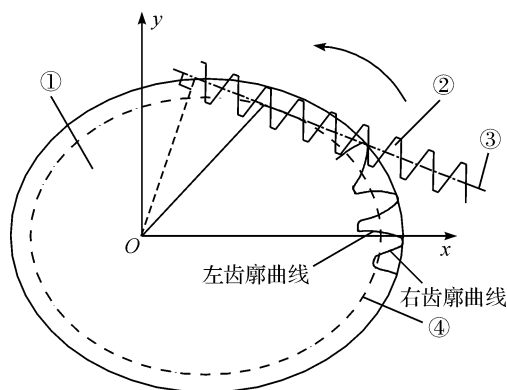
a) 两条节线(齿条节线③和非圆齿轮节曲线④)在任何接触点都必须相切。

b) 滚动过程中两条节线接触过的长度必须是相等的。

非圆齿轮的齿廓就是在这样的运动过程中, 由齿条的齿廓切制(包络)而成的。在切齿运动的过程中, 齿条刀具的齿廓留下的轨迹就是包络线(如图 1), 齿廓曲线就是由这些包络线所包络出来的。

2 包络线的方程表达式

本文模拟范成法中齿条刀具切割齿坯的过程计算非圆齿轮齿廓数据^[3], 齿条刀具在切割齿坯过程

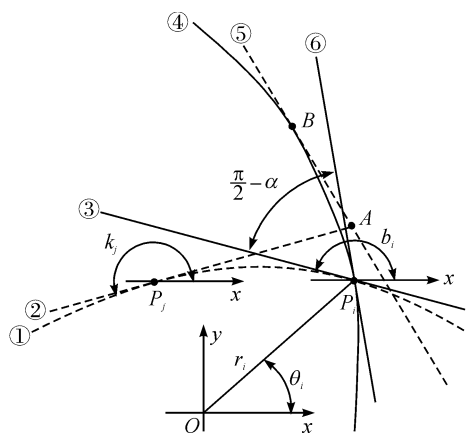


①齿坯,②齿条刀具,③齿条节线,④非圆齿轮的节曲线

图 1 范成法加工齿廓示意

中的轨迹就是包络线,若计算齿轮的齿廓数据,需先列出包络线的方程式。齿条刀具的节线与非圆齿轮的节线是相切纯滚动的运动关系,所以满足相切纯滚动的两个必要条件,根据这两个必要条件可以推导出包络线的方程式,下面将阐述非圆齿轮包络线方程式的推导过程。

齿轮的每个齿都有左右两条齿廓曲线,按其所在的位置分为左齿廓曲线和右齿廓曲线(如图 1 所示)。现在首先分析右齿廓曲线的包络线方程表达式。如图 2 所示, O 为齿轮旋转中心,这里将 O 点作为坐标的原点, P_i 为右齿廓曲线④的节点(即齿轮的节曲线与齿廓曲线的交点),坐标为 $(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$,将这一点作为齿条刀具切齿运动的起始



①非圆齿轮的节曲线,② P_j 点切线,③ P_i 点切线,④齿廓曲线,⑤ P_j 点对应的包络线,⑥ P_i 点对应的包络线

图 2 齿廓上半部分包络线计算示意

点,此时齿条刀具的包络线⑥与非圆齿轮齿廓曲线④在 P_i 点相切,则包络线⑥的数学表达式为:

$$\begin{cases} x_i = r_i \cos \theta_i + l_n \cos \left(b_i - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ y_i = r_i \sin \theta_i + l_n \sin \left(b_i - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中: l_n 为包络线上某一点与 P_i 点的距离, b_i 为 P_i 点处的切线③与 x 轴正方向的夹角, α 为齿条刀具的压力角, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 为齿条刀具的节线(即切线③)与包络线⑥的夹角。

当齿条刀具绕齿坯逆时针转动一定角度后,齿条的节线与非圆齿轮的节曲线在 P_j 点接触,包络线⑤与非圆齿轮齿廓曲线④在 B 点相切。根据切齿纯滚动过程中的两个条件,可以推得 A 点(齿条刀具齿廓的节点)的坐标计算公式:

$$\begin{cases} x_A = r_j \cos \theta_j + l_{(i,j)} \cos(k_j - \pi) \\ y_A = r_j \sin \theta_j + l_{(i,j)} \sin(k_j - \pi) \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中: $(r_j \cos \theta_j, r_j \sin \theta_j)$ 为 P_j 的坐标值, $l_{(i,j)}$ 为节曲线上点 P_i 与 P_j 之间的节曲线弧长, k_j 为节曲线 P_j 点的切线②与 x 轴正方向的夹角。

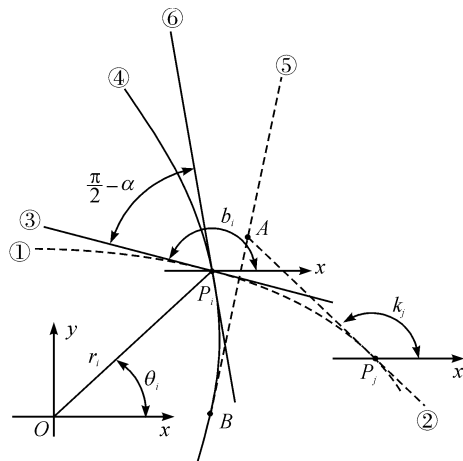
此时对应的包络线⑤的数学表达式为:

$$\begin{cases} x_j = x_A + l_n \cos \left(k_j - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ y_j = y_A + l_n \sin \left(k_j - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{cases} \quad (3)$$

依此类推,可得右齿廓曲线的节点 P_i 以上齿廓部分的包络线方程表达式。

当齿条刀具从 P_i 点开始绕齿坯顺时针滚动时,如图 3 所示,此时 A 点的坐标方程为:

$$\begin{cases} x_A = r_j \cos \theta_j + l_{(i,j)} \cos(k_j) \\ y_A = r_j \sin \theta_j + l_{(i,j)} \sin(k_j) \end{cases} \quad (4)$$



①非圆齿轮的节曲线,② P_j 点切线,③ P_i 点切线,④齿廓曲线,⑤ P_j 点对应的包络线,⑥ P_i 点对应的包络线

图 3 齿廓下半部分包络线计算示意

则包络线⑤的表达式为:

$$\begin{cases} x_j = x_A + l_n \cos \left(k_j - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \\ y_j = y_A + l_n \sin \left(k_j - \frac{\pi}{2} + \alpha \right) \end{cases} \quad (5)$$

依此类推,可得右齿廓曲线的节点 P_i 以下齿廓部分的包络线方程表达式。

根据上述包络线方程式,可以求出右齿廓曲线上所有包络线的数学表达式。

在计算左齿廓曲线的包络线时, A 点坐标的计算方法与上述一样,只需要将齿条刀具的节线与齿条刀具齿廓的夹角由原来的 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 变为 $\frac{\pi}{2}+\alpha$ 即可,因此,当齿条刀具顺时针方向滚动时所产生的包络线方程如下:

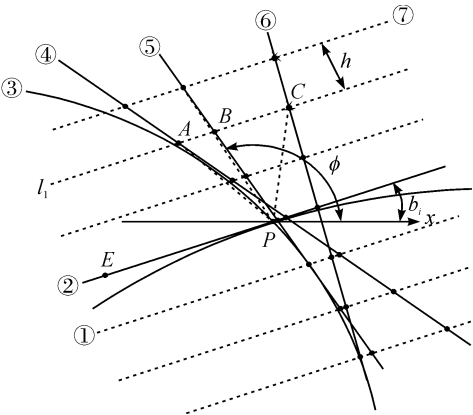
$$\begin{cases} x_j = x_A + l_n \cos\left(k_j - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ y_j = y_A + l_n \sin\left(k_j - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{cases} \quad (6)$$

根据以上公式,可以得出非圆齿轮某个齿的左齿廓曲线与右齿廓曲线的所有包络线方程式。

3 基于节点切线平行线求齿廓曲线特征点

在列出包络线的方程表达式后,就能进一步计算齿廓曲线的特征点坐标了。本文采用基于节点切线平行线的齿廓曲线求法,其求得齿廓曲线特征点的原理如图 4 所示。

先作节曲线①在点 P 处的切线②,再作 n 条与切线②的距离为 h 的平行线,平行线分布于切线②上下两侧。齿廓曲线③上的包络线④⑤⑥均与这些平行线有交点,根据范成法切齿的原理,包络线即齿条刀具的切齿轨迹,所以这些交点就是切齿过程中齿坯被齿条刀具切割的轨迹点,选择最接近于理论齿廓曲线的轨迹点作为齿廓曲线的特征点,就能够获得非圆齿轮的齿廓数据了。



①非圆齿轮节曲线,②节曲线的切线,③齿廓曲线,④、⑤、⑥包络线,⑦切线的平行线

图 4 特征点计算过程示意

在实际计算过程中,可以采用下面的方法判断哪些点是离理论齿廓曲线较近的特征点:如图 4 所示,齿廓曲线③是一条理论的齿廓曲线,其左边是轮齿的实体部分,右边是需要被切除的部分,轨迹点越靠近左边,即越接近于理论齿廓曲线。因此在计算中采用的判断方法是:将同一条平行线上的所有轨迹点与 P 点连线,再求出连线与切线②的夹角(如图 4 中平行线 l_1 上交点 A 、 B 、 C 所对应的夹角 $\angle APE$ 、 $\angle BPE$ 、 $\angle CPE$),然后对这些夹角进行比较,夹角越小,表示轨迹点越靠近理论齿廓曲线,将这一点作为齿廓曲线的一个特征点,共有 n 条平行线,将得到 n 个齿廓曲线特征点,这样一条齿廓曲线的所有特征点就计算出来了。

这里以平行线 l_1 上的特征点计算为例来说明这些夹角的计算步骤,其中 $\angle BPE$ 的计算过程如下:

首先求出交点 B 和 P 点的连线 BP 和 x 轴正方向的夹角 ϕ ,计算公式如下:

$$\text{当 } x_P - x_j \text{ 的值为正时: } \phi = \arctan\left(\frac{y_P - y_j}{x_P - x_j}\right) \quad (7)$$

$$\text{当 } x_P - x_j \text{ 的值为负时: } \phi = \pi + \arctan\left(\frac{y_P - y_j}{x_P - x_j}\right) \quad (8)$$

若切线②与 x 轴正方向的夹角为 b_i ,那么夹角 $\angle BPE = \pi - |\phi - b_i|$

$$(9)$$

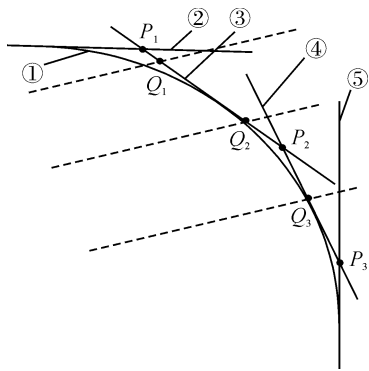
采用上述方法算出平行线 l_1 上的所有交点对应的夹角后,再对这些夹角的大小进行比较,取夹角最小的交点作为齿廓曲线上的特征点,这样就得到了 l_1 平行线上齿廓曲线的特征点。采用相同的算法,对 n 条平行线进行计算,可得到 n 个齿廓曲线特征点,用特征点来描述齿廓曲线,就得到较高精度的齿廓数据。

因此,只需要给定齿轮节曲线的方程,就能根据上述方法逐步求出齿轮的齿廓数据。

4 精度分析

理论齿廓曲线最终由相邻特征点形成的线段来表示,即在图 5 中,理论齿廓曲线由每条平行线上最靠近它的特征点(Q_1 、 Q_2 、 Q_3)的连线来表达,齿廓曲线的计算精度即以这些特征点到理论齿廓曲线的垂直距离为标准。若用包络线交点法计算齿廓曲线,则计算出的特征点为图 5 中的 P_1 、 P_2 、 P_3 ,即包络线②③④⑤的交点,从图 5 中很明显可以看出:在采用相同数量的包络线及平行线的情况下,采用节点平行线交点法算出的特征点与理论齿轮曲线的距离更

短,因此计算出的结果精度更高。通过增加包络线与平行线的数量,使齿廓特征点增多,它们之间的距离缩短,精度变高,因此可以通过不断增大它们的数量使特征点逐渐逼近理论齿廓曲线,直到满足所需的精度要求。



①理论齿廓线,②、③、④、⑤齿廓包络线
图 5 两种算法的精度分析

5 算法步骤

算法步骤见图 6 所示。

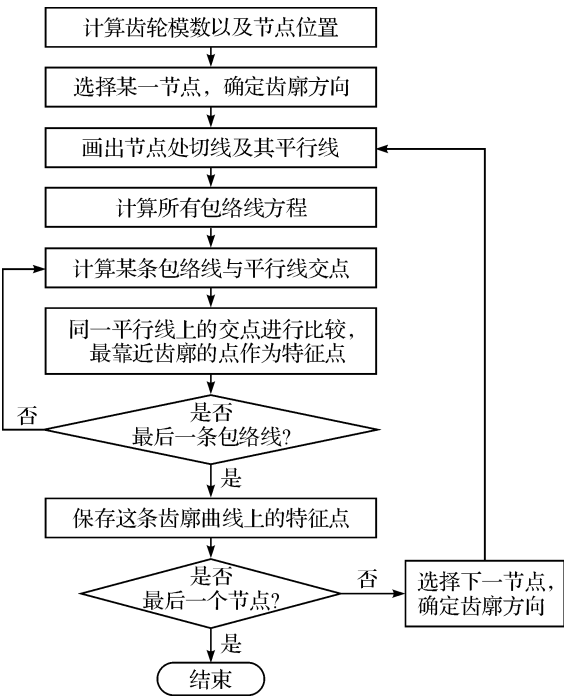


图 6 齿廓特征点计算的程序框图

- ① 计算齿轮参数:模数及节点位置;
- ② 选择某个节点,然后确定经过此节点的齿廓曲线的方向;
- ③ 计算齿廓节曲线在此节点处的切线的方程,以及此切线的平行线的方程;
- ④ 根据齿条刀具计算这条齿廓曲线上的包络线;

- ⑤ 计算出某条包络线与平行线的交点坐标;
- ⑥ 将此条包络线的交点与其它包络线的交点逐个进行比较,保留较靠近理论齿廓的交点。
- ⑦ 重复第⑤~⑥步,直到所有包络线都计算完成;
- ⑧ 对计算出的该条齿廓曲线的特征点进行保存;
- ⑨ 重复第③~⑧步,直到所有齿廓曲线的特征点都计算出来;
- ⑩ 结束计算,输出齿廓数据。

6 计算实例

以高速插秧机旋转式分插机构的一种傅里叶节曲线非圆齿轮为例,如图 7 所示,阐述计算非圆齿轮齿廓数据的具体步骤,其节曲线的极坐标方程如下:
$$r(\theta)=a_0+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+a_2\cos2\theta+b_2\sin2\theta$$
 (10)
式中: θ 为节曲线上某点的向量角, r 为节曲线上某点的向量模, $a_0、a_1、b_1、a_2、b_2$ 为可调参数。

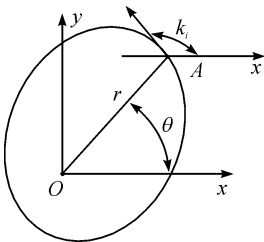


图 7 傅里叶函数表达形式的齿轮节曲线

节曲线上任一点 A 的直角坐标值为($r_i\cos\theta_i, r_i\sin\theta_i$),求得该点处切线向量与 x 轴正方向的夹角 k_i [2]。根据第 5 部分介绍的方法求出齿轮模数 m ,并根据齿距 p 算出节曲线上的齿廓节点的坐标。最后根据包络线计算方法,得到齿廓曲线上的包络线方程,然后根据第 3 部分介绍的方法算出齿廓曲线。

笔者在研制的高速水稻插秧机及其分插机构试验台中采用了本方法,如图 8 所示,证明了计算出的齿轮齿廓数据与实验目标相吻合,满足工作要求,验

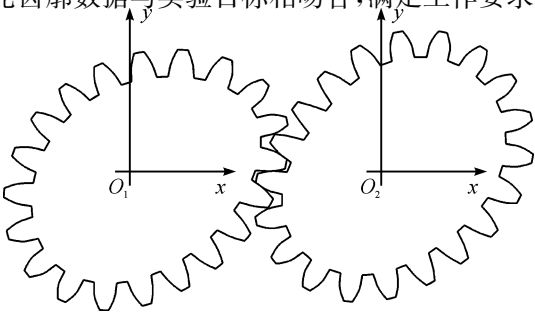


图 8 齿廓计算实例

证了该算法的正确性。

7 结 论

基于节点切线平行线的非圆齿轮齿廓特征点求法能够快速求得齿廓曲线上的特征点,形成齿廓数据,计算过程中能够通过增加平行线的条数及齿廓包络线的数量提高齿廓数据的计算精度。该方法在计算齿轮齿廓数据时,能够根据齿廓的要求调节齿顶高和齿根高以得到满足不同要求的齿轮齿廓数据。

参考文献:

[1] 武传宇,金玉珍,贺磊盈. 基于包络特征的非圆齿轮齿廓计算方法研究[J]. 中国机械工程, 2008, 19(15): 1796-1799.

[2] 林 菁. 共轭曲线啮合角函数理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[3] 何贵平,胡赤兵,靳 岚. 外啮合非圆齿轮加工模型及根切特性研究[J]. 兰州理工大学学报, 2006, 32(6): 40-43.

[4] 陈省身,陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003.

Numerical Algorithm of Tooth Profile of Fourier Curve of Non-Circular Gear

HUANG Peng, LI Ge, CAO Ning-hui

(School of Machinery & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: According to theory and real process of tooth profile generation with rack-shaped cutter, this paper proposes a non-circular gear tooth profile forming method based on parallel lines of node tangent, improving the accuracy of the calculation of tooth profile; Through tangent parallel lines of non-circular gear tooth profile nodes, the paper envelopes lines of the tooth profile to calculate tooth profile data. Examples of the tooth profile calculation of Fourier non-circular pitch curve are used to check the correctness of the algorithm.

Key words: tangent; feature points; tooth profile coefficient; Fourier pitch curve

(责任编辑: 杨元兆)