浙江理工大学学报，第 29 卷，第 1 期，2012 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 29，No. 1，Jan. 2012

文章编号：1673-3851 (2012) 01-0143-03

几个模糊命题逻辑紧致性的新证明

张　乐，裴道武
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：紧致性是模糊逻辑的一个重要性质，Gödel 命题逻辑、NMG 命题逻辑和 L^* 命题逻辑都是紧致的。利用滤子理论证明了一类基于左连续 t-模的命题逻辑 H_α 的紧致性，为模糊逻辑紧致性的证明提供了新方法，同时给出了 Gödel 命题逻辑、NMG 命题逻辑和 L^* 命题逻辑紧致性定理的新的统一证明。

关键词：模糊逻辑；左连续 t-模；滤子；紧致性
中图分类号：O141.1　　**文献标识码：**A

0　引　言

t-模较好地反映了“逻辑与”的性质，因此，t-模作为一般的“模糊与”算子受到模糊逻辑学界的普遍青睐，比如，Hájek 提出的基本逻辑系统 BL 是所有连续 t-模基逻辑的公共完备公理化系统，Esteva 和 Godo 提出的独异点 t-模基逻辑系统 MTL 是所有左连续 t-模基逻辑的公共完备公理化系统[1]。Gödel 系统中的 t-模是连续 t-模，自然也是左连续 t-模，NMG 系统[2]和 L^* 系统中的 t-模都是左连续 t-模。Gödel、NMG 和 L^* 系统都是 MTL 系统的扩张。文献[3]给出了一类带参数的左连续 t-模并指出可以建立相应的模糊命题逻辑 H_α。值得注意的是，当 α 分别为 0，1/2 和 1 时，H_α 恰好分别为 Gödel 命题逻辑、NMG 命题逻辑和 L^* 命题逻辑。

紧致性是模糊逻辑的一个重要性质[4-6]。文献[7]通过对 Gödel 非运算的归纳讨论证明了 Gödel 命题逻辑是紧致的，文献[8]和文献[9]通过对 NMG 系统和 L^* 系统中极大相容理论的结构刻画证明了它们的可满足性，进而证明了它们的紧致性。经典命题逻辑是紧致的，其证明方法并不唯一。文献[10]利用滤子理论证明了经典命题逻辑的紧致性定理。笔者将利用滤子理论证明命题逻辑 H_α 中的紧致性定理，从而也给出 Gödel、NMG 和 L^* 命题逻辑紧致性定理的新的统一证明。

1　预备知识

文献[3]引入了一类带参数的左连续 t-模及与之伴随的蕴涵算子：

$$x *_\alpha y=\begin{cases}0, & x+y\leqslant\alpha\\ x\wedge y, & x+y>\alpha\end{cases}$$

$$x\rightarrow_\alpha y=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ (\alpha-x)\vee y, & x>y\end{cases}$$

其中 $\alpha\in[0,1]$。不难看出，当 $\alpha=0,\frac{1}{2},1$ 时，$*_\alpha$，$\rightarrow_\alpha$ 恰为系统 Gödel、NMG、L^* 中的 t-模和蕴涵算子。

尽管文献[3]指出可以由 H_α 诱导建立一个新的命题逻辑系统，但文中并未明确给出定义。下面给出基于左连续 t-模 $*_\alpha$ 的命题系统 H_α 的语义理论，其风格源自文献[11]。

定义 1　对于给定的左连续 t-模 $*_\alpha$，命题演算系统 H_α 具有命题变元 $p_1,p_2,\cdots$，连接词 $\&$，$\rightarrow$，$\wedge$ 和真值常量 $\bar{0}$。公式如下定义：每个命题变元是公式；$\bar{0}$ 是公式；如果 φ,ψ 是公式，则 $\varphi\&\psi$，$\varphi\rightarrow\psi$，$\varphi\wedge\psi$ 是公式。记 $S=\{\bar{0},p_1,p_2,\cdots\}$，$F(S)$ 为所有公式之集。

收稿日期：2011－03－09
基金项目：国家自然科学基金项目(10871229；60863002)；浙江理工大学科研项目(YJG-Z07001)
作者简介：张　乐(1987－)，男，山东泗水人，硕士研究生，主要从事不确定性数学理论的研究。

定义 2 (i)若映射 $v: F(S)\to[0,1]$ 满足 $v(\bar{0})=0$, $v(\varphi\&\psi)=v(\varphi)*_{\alpha}v(\psi)$, $v(\varphi\to\psi)=v(\varphi)\to_{\alpha}v(\psi)$, $v(\varphi\wedge\psi)=\min\{v(\varphi),v(\psi)\}$,则称 v 为 $F(S)$ 的一个赋值。

(ii)$F(S)$ 的一个子集 Γ 称为系统 H_{α} 的一个逻辑理论,简称为理论。

(iii)称赋值 v 为理论 Γ 的一个模型,如果 $\forall\varphi\in\Gamma$, $v(\varphi)=1$。

下面介绍证明紧致性定理时用到的滤子理论。

定义 3[12] 设 I 为一非空集合,$S(I)$ 为 I 的所有子集构成的集合。称 D 为 I 上的一个滤子,如果 $D\subseteq S(I)$ 满足下列条件:

(i)$I\in D$;

(ii)若 $X,Y\in D$,则 $X\cap Y\in D$;

(iii)若 $X\in D$ 且 $X\subseteq Z\subseteq I$,则 $Z\in D$。

称 D 为 I 上的一个超滤子,如果滤子 D 满足下面的条件:

(iv)对任何 $X\in S(I)$,$X\in D$ 当且仅当 $(I\backslash X)\notin D$。

明显地,对于超滤子 D 而言,因为 $I\in D$,所以 $\varnothing\notin D$。

定理 1[10] 若 X 的子集族 E 具有有限交非空的性质,则存在一个 X 上包含 E 的超滤子 D。

2 紧致性定理

定义 4[8,10] 命题逻辑的紧致性是指该命题逻辑系统中的理论有模型当且仅当它的每个有限子理论有模型。

为了证明 H_{α} 的紧致性,给出下面这个引理。

引理 1 设 I 为一非空集,D 为 I 上的一个超滤子,如果 I 的子集 X,Y,Z 满足 $(X\cup Y\cup Z)\in D$,则 $X\in D$ 或 $Y\in D$ 或 $Z\in D$。

定理 2(紧致性) 设 Γ 为系统 H_{α} 中的一个理论,则 Γ 有模型当且仅当 Γ 的每个有限子理论有模型。

证明 必要性显然成立,下面证明充分性。用 $\wp_0(\Gamma)$ 表示 Γ 的有限子集构成的集合,对 Γ 中的每个公式 φ,令 $\bar{\varphi}=\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid\varphi\in\beta\}$,则对 Γ 中任意有限个公式 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$, $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}\in\bar{\varphi}_1\cap\bar{\varphi}_2\cdots\cap\bar{\varphi}_n\neq\phi$,所以 $\wp_0(\Gamma)$ 的子集族 $E=\{\bar{\varphi}\mid\varphi\in\Gamma\}$ 具有有限交非空的性质,由定理 1 知存在 $\wp_0(\Gamma)$ 上包含 E 的超滤子 D。由假设知,对每个 $\beta\in\wp_0(\Gamma)$,β 有模型,我们对每个 $\beta\in\wp_0(\Gamma)$ 取定它的一个模型 v_{β},则 $v_{\beta}(\varphi)=1$ 对每个 $\varphi\in\beta$ 都成立。作映射 $v: F(S)\to[0,1]$ 如下:

$$v(\varphi)=\begin{cases}1, X=\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D,\\ \dfrac{\alpha}{2}, Y=\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)=\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D,\\ 0, Z=\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)<\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D。\end{cases}$$

首先说明该映射定义的合理性。显然 X,Y,Z 两两不交,又 $X\cup Y\cup Z=\wp_0(\Gamma)\in D$,由引理 1 知,$X,Y,Z$ 中至少有一个属于 D,若存在其中两个属于 D,不妨设 $X,Y\in D$,则 $\varnothing=(X\cap Y)\in D$,与 $\varnothing\notin D$ 矛盾。因此,X,Y,Z 中有且只有一个属于 D,故 v 的定义是合理的。

下面证明 v 是赋值。

(i)若 $\alpha=0$,则 $\forall\beta\in\wp_0(\Gamma)$, $v_{\beta}(\bar{0})=\dfrac{\alpha}{2}$,故 $Y=\wp_0(\Gamma)\in D$,从而 $v(\bar{0})=\dfrac{\alpha}{2}=0$;若 $\alpha>0$,则 $\forall\beta\in\wp_0(\Gamma)$, $v_{\beta}(\bar{0})=0<\dfrac{\alpha}{2}$,故 $Z=\wp_0(\Gamma)\in D$,从而 $v(\bar{0})=0$;

(ii)若 $v(\varphi\&\psi)=1$,则 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)*v_{\beta}(\psi)=v_{\beta}(\varphi\&\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D$,又 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)*v_{\beta}(\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\subseteq\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}$, $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)*v_{\beta}(\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\subseteq\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}$,故 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D$, $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D$,从而 $v(\varphi)=1$, $v(\psi)=1$, $v(\varphi\&\psi)=v(\varphi)*v(\psi)$;

(iii)若 $v(\varphi\&\psi)=\dfrac{\alpha}{2}$,则 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)*v_{\beta}(\psi)=v_{\beta}(\varphi\&\psi)=\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D$,又 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)*v_{\beta}(\psi)=\dfrac{\alpha}{2}\right\}\subseteq\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_{\beta}(\varphi)=\dfrac{\alpha}{2}\text{且 }v_{\beta}(\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\cup\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)=\dfrac{\alpha}{2}\text{且 }v_{\beta}(\psi)=\dfrac{\alpha}{2}\right\}\cup\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)>\dfrac{\alpha}{2}\text{且 }v_{\beta}(\psi)=\dfrac{\alpha}{2}\right\}$,故 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)=\dfrac{\alpha}{2}\text{且 }v_{\beta}(\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\cup\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)=\dfrac{\alpha}{2}\text{且 }v_{\beta}(\psi)=\dfrac{\alpha}{2}\right\}\cup\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)>\dfrac{\alpha}{2}\text{且 }v_{\beta}(\psi)=\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D$,由引理 1 知,$\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\,\middle|\, v_{\beta}(\varphi)=\dfrac{\alpha}{2}\text{且 }v_{\beta}(\psi)>\dfrac{\alpha}{2}\right\}\in D$ 或 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\right.$

$\left| v_\beta(\varphi)=\frac{\alpha}{2}\text{且 } v_\beta(\psi)=\frac{\alpha}{2}\right\}\in D$ 或 $\left\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\right.$ $\left| v_\beta(\varphi)>\frac{\alpha}{2}\text{且 } v_\beta(\psi)=\frac{\alpha}{2}\right\}\in D$，这 3 种情形下分别有 $v(\varphi)=\frac{\alpha}{2}$ 且 $v(\psi)=1$，$v(\varphi)=\frac{\alpha}{2}$ 且 $v(\psi)=\frac{\alpha}{2}$，$v(\varphi)=1$ 且 $v(\psi)=\frac{\alpha}{2}$，总有 $v(\varphi\&\psi)=v(\varphi)*v(\psi)$；

(iv)若 $v(\varphi\&\psi)=0$，类似可证总有 $v(\varphi\&\psi)=v(\varphi)*v(\psi)$。

(iii)、(iv)类似讨论可证 $v(\varphi\to\psi)=v(\varphi)\to_\alpha v(\psi)$，$v(\varphi\wedge\psi)=\min\{v(\varphi),v(\psi)\}$，不再赘述。

综上可知，v 是赋值。

最后证明 v 是 Γ 的模型。设 $\varphi\in\Gamma$，则 $\forall\gamma\in\bar{\varphi}$，$v_\gamma(\varphi)=1$，故 $\bar{\varphi}\subseteq\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_\beta(\varphi)>\frac{\alpha}{2}\}$，又 $\bar{\varphi}=\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid\varphi\in\beta\}\in E\subseteq D$，故 $\{\beta\in\wp_0(\Gamma)\mid v_\beta(\varphi)>\frac{\alpha}{2}\}\in D$，从而 $v(\varphi)=1$。因为 φ 是 Γ 的任一公式，所以 v 是 Γ 的模型。

推论 1　在 Gödel 命题逻辑、NMG 命题逻辑和 L^* 命题逻辑中，紧致性定理成立。

证明　在定理 2 中分别令 α 为 0，1/2 和 1 即可得证。

注：文献[7～9]在证明相应命题逻辑的紧致性时，都依赖于该逻辑的可满足性，笔者在证明紧致性时所采用的滤子方法不涉及模糊命题逻辑的可满足性。

参考文献：

[1] 张小红. 模糊逻辑及其代数分析[M]. 北京：科学出版社，2008.

[2] Wang S M, Wang B S, Pei D W. A fuzzy logic for an ordinal sum t-norm[J]. Fuzzy Sets and System, 2005, 149: 297-307.

[3] 王国俊，兰　蓉. 系统 H_α 中的广义重言式理论[J]. 陕西师范大学学报，2003，31(2)：1-11.

[4] Butnariu D, Klement E P, Zafrany S. On triangular norm-based propositional fuzzy logics[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 69(3): 241-255.

[5] 应明生. 模糊逻辑的紧致性[J]. 科学通报，1998，43(4)：379-383.

[6] 王国俊. 关于模糊语义紧致性的若干定理[J]. 科学通报，1999，44(12)：1275-1279.

[7] Navara M. Satisfiability in fuzzy logics[J]. Neural Network World, 2000, 10(5): 845-858.

[8] 周红军，王国俊. 逻辑系统 NMG 的满足性和紧致性[J]. 软件学报，2009，20(3)：515-523.

[9] Zhou H J, Wang G J. Characterization of maximal consistent theories in the formal deductive system L^* (NM-logic) and Cantor space[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 2591-2604.

[10] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2008.

[11] Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and System, 2001, 124: 271-288.

[12] 王世强. 模型论基础[M]. 北京：科学出版社，1987.

A New Proof of Compactness of Several Fuzzy Proposition Logics

ZHANG Le, PEI Dao-wu

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Compactness is an important property of fuzzy logic. It is well known that Gödel proposition logic, NMG proposition logic and L^* proposition logic are all compact. By using filter theory, the compactness theorem of a type of left-continuous t-norm based logic, H_α, is proved in this paper, which provides a new method for proving compactness in fuzzy logics. Meanwhile, the above results also provide a uniform proof of compactness theorem of Gödel proposition logic, NMG proposition logic and L^* proposition logic.

Key words: fuzzy logic; left-continuous t-norm; filter; compactness

(责任编辑：马春晓)