浙江理工大学学报,第 55 卷,第 4 期,2026 年 7 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2026.04.013

基于深度残差网络的超冗余度蛇形臂机器人实时逆运动学求解方法

孙国瑞[1],吴　震[2],汤腾飞[1]
(1.浙江理工大学机械工程学院,杭州 310018;2.浙江交通职业技术学院海运学院,杭州 311112)

摘　要:针对超冗余度蛇形臂机器人在复杂受限环境作业中,逆运动学求解存在的多解性、强非线性及实时性不足等问题,提出一种基于深度残差网络(Deep residual network, ResNet)的逆运动学求解方法,设计了基于 ResNet 的深度残差多层感知机(Deep residual multi-layer perceptron, Res-MLP)模型。采用"编码-深度残差主体-解码"三级架构,通过残差连接机制缓解深层网络梯度消失现象;在此基础上,设计融合正运动学重投影误差与最小范数正则项的复合损失函数,并引入自监督训练闭环对网络输出进行物理约束,以保障解的合理性。以 12 自由度超冗余度蛇形臂机器人为研究对象,开展单点逆运动学求解与深腔受限环境轨迹跟踪递进式仿真实验,并与经典雅可比伪逆法进行对比分析。结果表明:Res-MLP 模型单点逆运动学求解平均耗时仅 1.87 ms,为雅可比伪逆法的 1/3;在轨迹跟踪任务中求解总效率提升近 2 倍,且生成构型更平滑紧凑,可有效适配狭窄环境作业。该研究提出的方法在保障高精度定位的同时显著提升计算效率,为超冗余度蛇形臂机器人在航空发动机探伤、核电管道检测等场景的实时运动控制提供了高效求解方案。

关键词:超冗余度蛇形臂机器人;逆运动学;实时性;深度残差网络;多层感知机
中图分类号:TH112　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2026) 07-0499-11
引文格式:孙国瑞,吴震,汤腾飞. 基于深度残差网络的超冗余度蛇形臂机器人实时逆运动学求解方法[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2026,55(4):499-509.
Reference Format: SUN Guorui, WU Zhen, TANG Tengfei. A real-time inverse kinematics solution for hyper-redundant snake-like robots based on deep residual network[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University, 2026, 55(4): 499-509.

A real-time inverse kinematics solution for hyper-redundant snake-like robots based on deep residual network

SUN Guorui[1], *WU Zhen*[2], *TANG Tengfei*[1]
(1. School of Mechanical Engineering, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;
2. Maritime Department, Zhejiang Institute of Communications, Hangzhou 311112, China)

Abstract: To address the challenges of multiple solutions, strong nonlinearity, and insufficient real-time performance in the inverse kinematics (IK) of hyper-redundant snake-like robots operating in complex and constrained environments, this paper proposed an IK solving method based on a deep residual network (ResNet) and designed a ResNet-based deep residual multi-layer perceptron (Res-MLP) model. A three-stage network architecture consisting of "encoder-deep residual body-decoder" was employed, and residual connection mechanisms were utilized to alleviate the gradient vanishing phenomenon in deep networks. Building on this, a composite loss function was constructed by integrating the forward kinematics reprojection error with a minimum norm regularization term, and a self-supervised closed-loop training

收稿日期:2026－01－13　　网络出版日期:2026－03－30
基金项目:国家自然科学基金项目(52405040);浙江省自然科学基金项目(LQN25E050012,LQN26E050041)
作者简介:孙国瑞(1998—　),男,江苏连云港人,硕士研究生,主要从事机械电子工程方面的研究。
通信作者:汤腾飞,E-mail:tengfei@zstu.edu.cn

process was designed to ensure the physical rationality of the solution. Taking a 12-degree-of-freedom hyper-redundant snake-like robot as the research object, progressive simulation experiments consisting of single-point IK solving and trajectory tracking in deep-cavity constrained environments were conducted and compared with the classical Jacobian pseudo-inverse method. The results indicate that the average time for a single-point IK solution using the Res-MLP model was only 1.87 ms, which is 1/3 of that required by the Jacobian pseudo-inverse method. In trajectory tracking tasks, the overall efficiency was improved nearly 2 times, and the generated configurations were smoother and more compact, effectively adapting to operations in narrow environments. While ensuring high-precision positioning, this method significantly enhances computational efficiency, providing an efficient solution for the real-time motion control of hyper-redundant snake-like robots in scenarios such as aero-engine flaw inspection and nuclear power pipeline detection.

Key words: hyper-redundant snake-like robot; inverse kinematics; real-time; deep residual network; multi-layer perceptron

0 引 言

在航空发动机检修、核电管道检测等领域,作业环境多为狭窄、弯曲与封闭的受限空间,对机器人执行机构的灵活性、可达性及环境适应性提出了极高要求[1-2]。常见的 6/7 自由度关节型机器人,虽工作空间较大,但自由度有限,无法深入狭窄弯曲空间完成精细操作,难以满足此类复杂受限环境下的灵活作业需求[3-4]。超冗余度蛇形臂机器人由多个 2 自由度万向节(U 副)串联而成[5-7],凭借多自由度(通常大于 10)连续弯曲的结构优势,可模拟蛇类运动姿态灵活穿梭于非结构化受限空间,成为解决此类作业难题的核心技术载体[8-9]。

运动学是机器人运动控制的基础,其核心是建立关节空间与工作空间的映射关系,为实现末端执行器的精准定位提供理论支撑。超冗余度蛇形臂机器人具备多自由度连续弯曲的结构特性,且关节间联动关系复杂,使得作为运动控制关键环节的逆运动学求解难度显著提升[10],具体体现在 3 个方面:a)多解性,同一末端位姿对应无数组关节构型,需筛选出物理可行且符合作业需求的最优解;b)强非线性,关节间的耦合联动使末端位姿与关节角度呈现复杂的非线性映射关系;c)实时性要求高,动态受限环境下的作业任务需要快速响应末端位姿指令。因此,实现高效、精准、实时的逆运动学求解,是推动超冗余度蛇形臂机器人工程化应用的关键之一。

不同于传统的 6/7 自由度机械臂,超冗余度机器人因自由度极高、关节耦合关系复杂,不存在通用的解析解。针对超冗余度机器人逆运动学求解的难题,国内外学者开展了大量研究,形成了 2 类常用求解方法。第一类是雅可比伪逆法。该方法原理简单、易于实现,被广泛应用于冗余机器人的实时控制。但该方法存在明显缺陷:一是实时性差,需通过迭代更新逐步逼近最优解;二是易陷入局部最优,可能得不到符合物理约束的关节构型;三是奇异点失效,当雅可比矩阵秩亏时,关节速度会发生突变,影响系统稳定性。为改善其性能,学者们提出了多种改进策略,Colomé 等[11]引入阻尼因子修正算子结构,有效缓解了奇异位姿导致的数值病态问题;Peng 等[12]提出基于增广雅可比矩阵的求解策略,实现了超冗余度机器人在受限空间下的逆运动学求解;Liu 等[13]通过整合机器人臂体相邻关节的运动维度,简化了矩阵的拓扑表征,提升了单次寻优求解的计算效率。尽管上述各类改进策略均在一定程度上改善了方法的局部性能,但此类方法本质上未能摆脱数值迭代机制的桎梏,无法从根本上解决迭代求解带来的实时性与稳定性问题。

第二类是基于数据驱动的智能算法。随着深度学习技术的发展,神经网络凭借强大的非线性拟合能力,为超冗余度机器人逆运动学求解提供了新的技术思路。该类方法通过构建大规模“关节构型-末端位姿”数据集,将传统复杂迭代求解过程转化为高效的前向推理过程,显著提升了求解实时性与泛化能力。刘世平等[14]采用 BP 神经网络求解 7 自由度蛇形机器人逆运动学,并验证了数据驱动方法的可行性;Calzada-Garcia 等[15]对比了多种网络架构,发现子网化 MLP(Multi-layer perceptron)与 RNN(Recurrent neural network)能更好地捕捉关节间依赖关系,并在 7 自由度机械臂上实现了高精度位姿映射;Ho 等[16]提出的概率选择性逆运动学模型(Probabilistic selective inverse kinematics, PSIK),实现了单网络多解生成,为冗余空间导航提供了新

思路;Malik 等[17]和 Wang 等[18]分别探索了强化学习与神经网络预测最优增强系数,进一步提升了计算效率。但现有数据驱动方法仍存在短板:a)深层网络训练困难,传统神经网络随层数增加易出现梯度消失或网络退化,难以拟合超冗余度机器人的高维复杂映射关系;b)解的物理可行性难以保障,缺乏对关节角度限位、构型平滑性等物理约束的考量,可能生成无效解。

针对现有方法的不足,本文以 12 自由度超冗余度蛇形臂机器人为研究对象,开展基于深度学习的逆运动学求解方法研究,旨在解决传统方法实时性差、深层网络训练难、解的物理可行性不足等问题。首先,基于深度残差网络(Deep residual network, ResNet)基础理论,结合多层感知机(Multi-layer perceptron)的全连接架构优势,设计了适用于超冗余度蛇形臂机器人的深度残差多层感知机(Deep residual multi-layer perceptron, Res-MLP)模型,通过残差连接机制解决深层网络梯度消失问题;其次,设计融合物理约束的复合损失函数,结合自监督训练策略,减少对标签数据的依赖,保障解的物理合理性;最后,通过单点逆运动学求解与深腔受限环境轨迹跟踪仿真实验,验证所提方法的精度、实时性及工程适用性。

1　机构简介及运动学建模

1.1　机构简介

超冗余度蛇形臂机器人的本体结构通常由万向节连接的若干段刚性臂体串联而成,通过增加万向节和刚性臂体的数量来增加运动自由度。此类机器人具有结构紧凑、运动灵巧、模块化程度高的优点,能完成核电机组管廊等复杂受限空间中的精密操作。

目前,超冗余度蛇形臂机器人大多采用正交布置的 1 自由度关节和交叉布置的 2 自由度万向节[19-20]。相较于前者,万向节(U 副)的转动自由度更多且集中,不仅能使机器人获得更大的负载能力,而且能为机器人提供更为灵活的空间运动能力。此外,蛇形臂机器人可以看作是一支由万向节连接的串联机器人,其中每个 U 副关节又可以看作是一个 3-SPS-U 的并联机构,且由 3 根驱动绳控制,所以此类机器人可以看作是传统工业串联机器人和并联机器人的结合体。然而,对于万向节,如果其关节转角过大则会与机器人自身臂体干涉,因此采用此类关节的超冗余度机器人的关节转角通常被限制在 40.0°以内。

基于上述要求,本文设计了如图 1 所示的超冗余度蛇形臂机器人,该机器人由运动关节、连接臂体和驱动模块组成。机器人共配置 n 个模块化运动关节(本设计中 $n=6$),可提供 $2n$ 个运动自由度;连接臂体通过运动关节连接;驱动模块由电机及丝杠模组组成,共计 $3n$ 个模组在驱动箱内呈环形阵列均匀分布,安装于机器人的基座端,用于控制各关节的驱动绳。整个驱动模块通过齿轮齿条机构实现机器人轴向方向的进给运动。

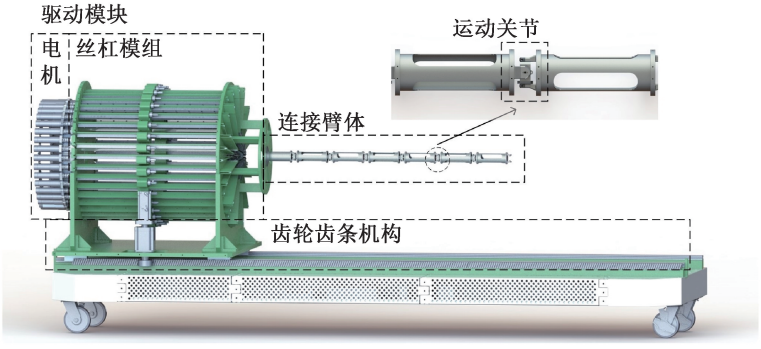


图 1　超冗余度蛇形臂机器人

本文研究的超冗余度蛇形臂机器人由高度模块化的 6 个 U 副关节串联而成,提供 12 个运动自由度。整个蛇形臂长度为 1126.0 mm,单节臂体长 142.0 mm,单个关节垂直距离为 26.0 mm,臂体外径 44.0 mm,壁厚 1.5 mm,具体参数见表 1。

1.2　运动学建模

绳驱动和冗余自由度的引入,使得蛇形臂机器人具有串-并混联的复杂结构,且驱动绳、关节与末端执行器之间存在多层非线性关系,使其运动学模型更加复杂。该类机器人每一节臂体的位置和方向由万向节旋转角度确定,而旋转角度由驱动绳控制,因此其运动学模型分为 3 个空间之间的映射。驱动绳的长度定义为驱动空间,各个关节的旋转角度定义为关节空间,机器人末端位姿定义为工作空间。

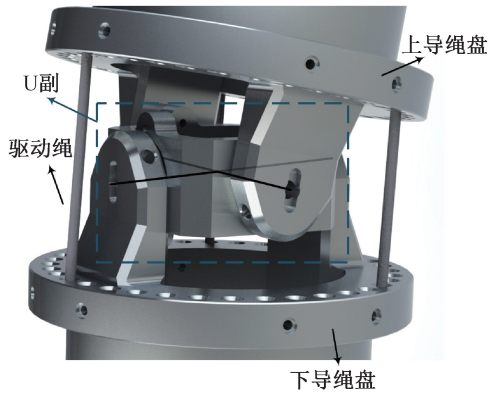
表 1 超冗余度蛇形臂机器人主要参数

参数	符号	参数值
U 副关节数量/个	n	6
运动自由度/个	$2n$	12
驱动绳索数量/根	$3n$	18
单节臂体长度/mm	L_{link}	142.0
臂体外径/mm	d	44.0
臂体壁厚/mm	t_{d}	1.5
导绳盘外径/mm	D	55.0
单个关节长度/mm	$2h$	26.0
关节最大角度/(°)	θ/φ	40.0
臂体总长/mm	L_{total}	1126.0

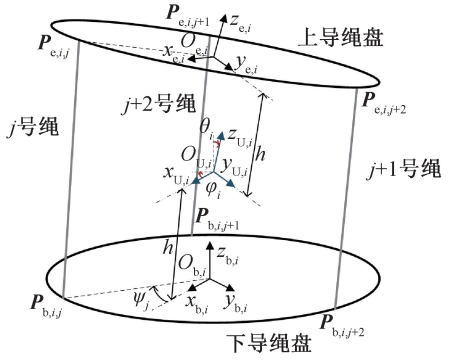
1.2.1 驱动空间-关节空间运动学模型

基于蛇形臂机器人的模块化设计,蛇形臂的每一节都可以采用相同的方法进行坐标系选取及运动学建模。驱动绳的长度变化仅发生在 U 副关节处的上导绳盘和下导绳盘之间,而在连接臂体中驱动绳的长度保持不变。此外,采用绳驱动方式会引入运动学耦合效应,驱动末端关节的绳索必须依次穿过所有近端关节的导绳孔,因此除了靠近基座的第一个关节外,其余各级关节对应驱动绳的长度变化,不仅取决于当前关节的旋转角度,还叠加了其途经的所有前置关节旋转时所产生的耦合位移。

为了方便建模,在第 i 个并联机构 U 副、下导绳盘及上导绳盘的几何中心,分别建立如图 2 所示关节坐标系 $\{O_{\text{U},i}\}$ 、基坐标系 $\{O_{\text{b},i}\}$ 以及末端坐标系 $\{O_{\text{e},i}\}$,其中:$x_{\text{U},i}$ 和 $y_{\text{U},i}$ 2 个坐标轴分别与万向节 2 个旋转轴共线;$z_{\text{U},i}$ 坐标轴由右手定则确定;$z_{\text{b},i}$ 坐标轴与下导绳盘垂直并指向 U 副几何中心,$x_{\text{b},i}$ 坐标轴与 $x_{\text{U},i}$ 坐标轴平行且方向相同,再按右手定则确定 $y_{\text{b},i}$ 坐标轴;$z_{\text{e},i}$ 坐标轴与上导绳盘垂直并指向远离 U 副几何中心的方向;$y_{\text{e},i}$ 坐标轴与 $y_{\text{U},i}$ 坐标轴平行且方向相同,再按右手定则确定 $x_{\text{e},i}$ 坐标轴。



(a) U副关节



(b) 机构简图

图 2 单关节运动学建模

由坐标系 $\{O_{\text{b},i}\}$ 到坐标系 $\{O_{\text{e},i}\}$ 的运动变换过程如下:首先,坐标系 $\{O_{\text{b},i}\}$ 沿 $z_{\text{b},i}$ 轴方向平移 h 长度,再绕 $x_{\text{U},i}$ 轴(平移后的 $x_{\text{b},i}$ 轴)旋转 θ_i 角度,从而实现坐标系 $\{O_{b,i}\}$ 到 $\{O_{\text{U},i}\}$ 的运动变换;然后,由坐标系 $\{O_{\text{U},i}\}$ 先绕 $y_{\text{b},i}$ 轴旋转 φ_i 角度,再沿着旋转后的 $z_{\text{U},i}$ 轴平移 h 长度,从而实现坐标系 $\{O_{\text{U},i}\}$ 到 $\{O_{\text{e},i}\}$ 的运动变换。

因此,坐标系 $\{O_{\text{b},i}\}$ 到坐标系 $\{O_{\text{e},i}\}$ 的齐次变换矩阵可以表示为:

$$\boldsymbol{T}_{\text{b},i}^{\text{e},i}=\boldsymbol{T}_{\text{b},i}^{\text{U},i}\boldsymbol{T}_{\text{U},i}^{\text{e},i}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & 0 & \sin\varphi_i & 0\\ \sin\theta_i\sin\varphi_i & \cos\theta_i & 0 & -h\sin\theta_i\cos\varphi_i\\ -\cos\theta_i\sin\varphi_i & \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\varphi_i & h+h\cos\theta_i\cos\varphi_i\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1}$$

由前文分析可知,为了求第 j 根驱动绳的长度,需要计算该驱动绳所有经过的关节处的长度 $l_{i,j}$ 。设第 j 根驱动绳与第 i 个关节的下平台的交点为 $\boldsymbol{P}_{\text{b},i,j}$,与上平台的交点为 $\boldsymbol{P}_{\text{e},i,j}$,点 $\boldsymbol{P}_{\text{b},i,j}$ (点 $\boldsymbol{P}_{\text{e},i,j}$)与坐标系 $\{O_{\text{b},i}\}$ (坐标系 $\{O_{\text{e},i}\}$)原点的连线,与坐标轴 $x_{\text{b},i}$($x_{\text{e},i}$)的夹角定义为该驱动绳的绳孔分布角 ψ_j 。据此,点 $\boldsymbol{P}_{\text{b},i,j}$ 和点 $\boldsymbol{P}_{\text{e},i,j}$ 在坐标系 $\{O_{\text{b},i}\}$ 和 $\{O_{\text{e},i}\}$ 下的齐次坐标可以表示为:

$$\boldsymbol{P}_{\text{b},i}^{\text{b},i,j}=\boldsymbol{P}_{\text{e},i}^{\text{e},i,j}=\begin{bmatrix}r\cos\psi_j & r\sin\psi_j & 0 & 1\end{bmatrix}^{\text{T}} \tag{2}$$

其中:r 表示导绳盘的外径。

综上,点 $\boldsymbol{P}_{\text{e},i,j}$ 在坐标系 $\{O_{\text{b},i}\}$ 下的齐次坐标可以表示为:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{b},i}^{\mathrm{e},i,j}=\boldsymbol{T}_{\mathrm{b},i}^{\mathrm{e},i}\boldsymbol{P}_{\mathrm{e},i}^{\mathrm{e},i,j}=\begin{bmatrix} r\cos\varphi_i\cos\psi_i \\ r\sin\theta_i\sin\varphi_i\cos\psi_i+r\cos\theta_i\sin\psi_i-h\sin\theta_i\cos\varphi_i \\ -r\cos\theta_i\sin\varphi_i\cos\psi_i+r\sin\theta_i\sin\psi_i+h\cos\theta_i\cos\varphi_i+h \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

则第 j 根驱动绳在第 i 个关节的长度可以用向量的模表示:

$$l_{i,j}=\left\|\boldsymbol{P}_{\mathrm{b},i}^{\mathrm{e},i,j}-\boldsymbol{P}_{\mathrm{b},i}^{\mathrm{b},i,j}\right\| \tag{4}$$

给定任意关节角度 θ_i 和 φ_i 后,即可求出每一根驱动绳的长度,至此完成从关节空间到驱动空间的逆运动学映射关系推导。

1.2.2　关节空间-工作空间运动学模型

建立蛇形臂机器人臂体坐标系,如图 3 所示。图 3 中,坐标系 $\{O_0\}$ 表示机器人基坐标系,坐标系 $\{O_{\mathrm{e}}\}$ 表示机器人末端执行器坐标系,坐标系 $\{O_1\}$ 到 $\{O_6\}$ 分别表示第 1 个 U 副关节到第 6 个 U 副关节原点坐标系;L_{base} 表示机器人基座连杆长度,L_{link} 表示蛇形臂的连接臂体长度,$2h$ 表示 2 个相邻导绳盘之间的距离,h 表示关节中心到导绳盘中心距离。

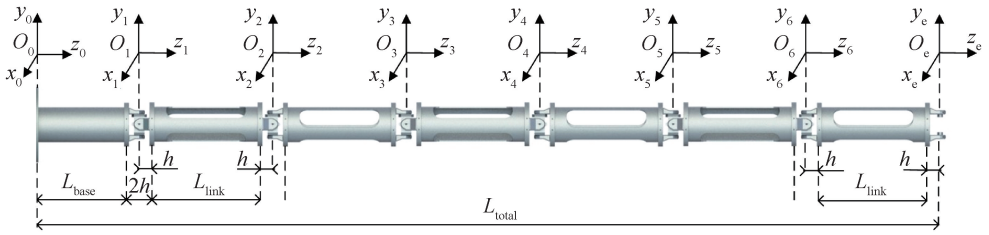


图 3　蛇形臂机器人臂体坐标系

根据上一节推导的几何坐标构建规则,可将这种坐标系构建方法拓展应用于整个蛇形臂相邻关节的运动学建模中。基坐标系 $\{O_0\}$ 先沿着 z 轴平移 $L_{\mathrm{base}}+h$ 长度,再绕平移后的 x 轴旋转 θ_1 角度,最后绕旋转后的 y 轴旋转 φ_1 角度,因此从基坐标系到第 1 个关节齐次变换矩阵为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_0^1(\theta_1,\varphi_1)&=Trans_z(L_{\mathrm{base}}+h)Rot_x(\theta_1)Rot_y(\varphi_1)\\&=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\theta_1\sin\varphi_1 & \cos\theta_1\sin\varphi_1 & 0\\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\sin\theta_1 & \cos\theta_1\cos\varphi_1 & L_{\mathrm{base}}+h\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5}$$

其中:$Trans_z()$ 表示沿坐标系 z 轴平移的齐次变换矩阵;$Rot_x()$ 和 $Rot_y()$ 分别表示绕坐标系 x 轴和 y 轴旋转的齐次变换矩阵。

同理,第 $i-1$ 个关节到第 i 个关节齐次变换矩阵可以表示:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{i-1}^{i}(\theta_i,\varphi_i)&=Trans_z(L_{\mathrm{link}}+2h)Rot_x(\theta_i)Rot_y(\varphi_i)\\&=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\theta_i\sin\varphi_i & \cos\theta_i\sin\varphi_i & 0\\ 0 & \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\varphi_i & L_{\mathrm{link}}+2h\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\\&\qquad i\geqslant 2\end{aligned} \tag{6}$$

最后,将坐标系 $\{O_6\}$ 到 $\{O_{\mathrm{e}}\}$ 的变换用一个固定的平移变换表示,则第 6 个关节中心到末端执行器中心的齐次变换矩阵为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_6^{\mathrm{e}}&=Trans_z(L_{\mathrm{link}}+2h)\\&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & L_{\mathrm{link}}+2h\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

因此,超冗余度蛇形臂机器人的末端位姿可以通过各关节与连接臂体相对应的齐次变换矩阵相乘得到,如式(8)所示:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{e}}&=\boldsymbol{T}_0^1(\theta_1,\varphi_1)\cdots\boldsymbol{T}_{i-1}^{i}(\theta_i,\varphi_i)\cdots\boldsymbol{T}_5^6(\theta_6,\varphi_6)\boldsymbol{T}_6^{\mathrm{e}}\\&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{e}} & \boldsymbol{P}_0^{\mathrm{e}}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

其中:$\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{P}_0^{\mathrm{e}}$ 分别表示末端坐标系相对于基坐标系的旋转矩阵和位置矢量。

此时,超冗余度蛇形臂机器人的关节角度与其末端执行器位置矢量 $\boldsymbol{X}$ 之间的映射关系如式(9)所示:

$$\boldsymbol{X}=f(\boldsymbol{q}) \tag{9}$$

其中:$\boldsymbol{q}$ 表示关节角度 $(\theta_1,\varphi_1,\cdots,\theta_6,\varphi_6)$,$f(\cdot)$ 表示机器人机构和参数确定的正运动学计算函数。

由于上述表达式的非线性映射关系极为复杂,存在多组关节构型角度对应同一个末端位置的情

况,难以直接求其逆运动学解析解。因此对式(9)进行微分处理,得到蛇形臂机器人的速度映射关系,如式(10)所示:

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{10}$$

其中:$\dot{\boldsymbol{X}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 分别为末端执行器在笛卡尔空间中的速度矢量和机器人的关节速度矢量,$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ 为雅可比矩阵,其表达式为:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})=\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{q})}{\partial\theta_1}\quad\frac{\partial f(\boldsymbol{q})}{\partial\varphi_1}\quad\cdots\quad\frac{\partial f(\boldsymbol{q})}{\partial\theta_6}\quad\frac{\partial f(\boldsymbol{q})}{\partial\varphi_6}\right] \tag{11}$$

对式(10)进行整理,可以得到超冗余度蛇形臂机器人速度级逆运动学表达式,如式(12)所示:

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{J}^{+}\dot{\boldsymbol{X}}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{+}\boldsymbol{J})\nabla\boldsymbol{g} \tag{12}$$

其中:$\boldsymbol{J}^{+}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}})^{-1}$ 为雅可比矩阵的伪逆矩阵;$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶的单位矩阵;$\boldsymbol{g}$ 可以是任意关节空间速度矢量,通常是需要优化的所有关节角度的目标函数,$\nabla\boldsymbol{g}$ 表示该函数的梯度形式。

雅可比伪逆法是求解冗余机器人逆运动学的经典方法,也是工业界应用最为成熟的方法之一。其优势在于为速度求解提供了一个闭式解,避免了位置层面求解时复杂的非线性迭代过程。在每一个控制周期,该方法通过直接的矩阵运算($\boldsymbol{J}^{+}\dot{\boldsymbol{X}}$ 部分)便可以得到一个唯一的、范数最小的关节速度解。对于冗余度较低的传统机器人,这种方法高效且稳定,能够确保末端执行器在远离奇异点的工作空间内实现高精度的轨迹跟踪。

然而,当该方法应用到具有超冗余度(10 自由度及以上)和强非线性特性的机器人时,其固有的局限性成为制约系统性能的严重瓶颈。在应对避障、避开关节角度极限以及避免陷入奇异点等实际需求时,必须在基础伪逆解之上叠加零空间投影项($(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}^{+}\boldsymbol{J})\nabla\boldsymbol{g}$ 部分),这使得单步计算随着约束任务的增多而剧增,导致实时性下降。此外,该方法本质上是一种局部优化方法,它虽然能保证当前时刻的关节速度最小,但也容易陷入局部最优解,导致机器人在长时间运行后陷入无法预测的奇异构型。如果机器人陷入奇异构型,伪逆计算会因为矩阵病态而失效,进而产生理论上无穷大的关节速度指令,对硬件造成不必要的损害。

2 基于神经网络的逆运动学求解

针对雅可比伪逆法存在的上述问题,本文通过构建大规模"关节构型-末端位姿"配对数据集,训练深度神经网络直接学习末端期望位姿到关节角度的复杂非线性映射,将传统迭代求解过程转化为高效的前向计算过程。此外,由于 12 自由度超冗余度蛇形臂机器人的高维映射特性,普通 BP 网络等传统浅层神经网络存在特征提取能力不足、深层训练梯度消失及难以收敛到物理可行解等问题。因此,本文设计 Res-MLP 模型,引入残差连接机制突破深层网络训练瓶颈,并通过物理约束复合损失函数解决多解问题,实现高精度、高实时性的逆运动学求解。

2.1 深度残差网络结构

为满足蛇形臂机器人逆运动学映射需求,本文设计了 Res-MLP 模型,采用"编码-深度残差主体-解码"三级架构,实现从 6 维笛卡尔空间到 12 维关节空间的精准映射,其整体结构如图 4 所示。

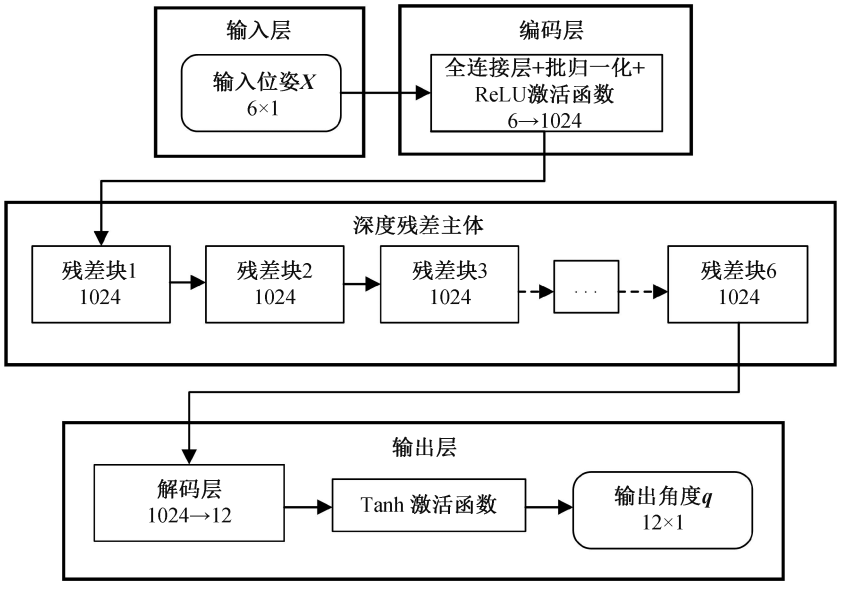


图 4 Res-MLP 模型整体结构示意图

在该网络结构中,选取蛇形臂机器人末端执行器在基坐标系下的位姿作为输入向量 $\boldsymbol{X}$,如式(13)所示:

$$\boldsymbol{X}=[x,y,z,\gamma_x,\gamma_y,\gamma_z]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

神经网络的输出作为机器人 6 个 U 副关节对应的 12 个关节转动角度,构成输出量 $\boldsymbol{q}$,如式(14)所示:

$$\boldsymbol{q}=[\theta_1,\varphi_1,\theta_2,\varphi_2,\theta_3,\varphi_3,\theta_4,\varphi_4,\theta_5,\varphi_5,\theta_6,\varphi_6]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

网络各模块功能及参数设置如下:

a) 输入层与编码层。输入向量为蛇形臂机器人末端执行器在基坐标系下的位姿参数,包含 3 个位置分量和 3 个姿态分量。编码层由全连接层、批归一化和 ReLU 激活函数组成,其作用是将 6 维的位姿输入映射到 1024 维的高维特征空间,实现深层特征的有效提取。

b) 深度残差主体。该部分作为网络核心拟合模块,包含 6 个堆叠的残差块,每个残差块内部由 2 个包含 1024 个神经元的全连接层构成,层间插入批归一化层和 ReLU 激活函数。该模块通过残差连接机制增强梯度传导能力,提升对复杂非线性运动关系的拟合精度。

c) 解码层与输出层。该部分将 1024 高维特征降维映射回 12 维的关节空间,输出 6 个 U 副关节对应的 12 个转动角度($\theta_1,\varphi_1,\cdots,\theta_6,\varphi_6$),即输出向量为 $\boldsymbol{q}$。输出层采用 Tanh 激活函数将输出值限制在[−1,1]区间内,再通过物理限位参数(±40.0°)映射为实际关节角度,确保输出满足机械约束。

相较于改进前的普通浅层网络,本文基于图 4 设计的 Res-MLP 模型具有显著的拟合优势。针对 12 自由度蛇形臂机器人,若采用普通浅层网络,误差反向传播时梯度会随层数增加呈指数级衰减(梯度消失),导致网络权重无法有效更新,预测位置误差可能会停留在毫米级以上。本文通过引入残差连接的方式改变了学习目标,使网络仅需拟合关节间的残差波动,从而在不增加计算开销的前提下,实现 14 层以上深度网络的稳定收敛,这也是实现更高定位精度的关节构型前提。

2.2　残差单元与前向传播机制

对于 12 自由度的蛇形臂机器人,其逆运动学映射函数具有高度的非线性。为了获得足够的拟合能力,网络需要较深的层数。然而,在传统的深层前馈网络中,随着层数增加,容易出现梯度消失或网络退化的现象,导致训练难以收敛。

为此,本文在残差块中引入残差学习机制,不直接学习目标映射函数 $H(x)$,而是通过恒等映射让堆叠的非线性层拟合残差映射函数,即 $F(x)=H(x)-x$,确保梯度在反向传播过程中无损传导至浅层网络,残差单元结构及线性层参数如图 5 所示。

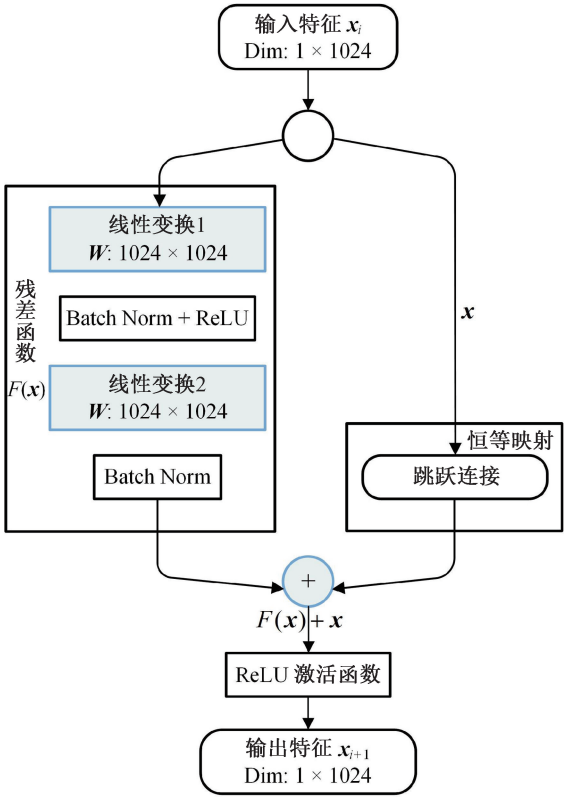


图 5　残差单元结构示意图

对于第 i 个残差块,假设其输入为 $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^D$,则该残差块的输出 $\boldsymbol{x}_{i+1}$ 可以表示为式(15)的形式:

$$\boldsymbol{x}_{i+1}=\sigma(F(\boldsymbol{x}_i,\{\boldsymbol{W}_i,\boldsymbol{b}_i\})+\boldsymbol{x}_i) \tag{15}$$

式中各参数说明如下:

a) 恒等映射 $\boldsymbol{x}$:通过跳跃连接直接传递信息流,避免梯度在深层网络中衰减,保障反向传播初期梯度无损传导至浅层,为深层网络训练提供基础。

b) 残差函数 $F(\boldsymbol{x})$:由 2 层线性变换、BN 层和 ReLU 激活函数构成,核心作用是拟合输入与目标输出的残差关系,计算过程如式(16)所示:

$$F(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{W}_{i,2}\cdot\sigma(BN(\boldsymbol{W}_{i,1}\cdot\boldsymbol{x}_i))+\boldsymbol{b}_{i,2} \tag{16}$$

其中:$\boldsymbol{W}_{i,1},\boldsymbol{W}_{i,2}\in\mathbf{R}^{D\times D}$ 为权重矩阵;$\boldsymbol{b}_{i,1}$、$\boldsymbol{b}_{i,2}$ 为偏置向量;$\sigma(\cdot)$ 为 ReLU 激活函数,定义为 $\sigma(z)=\max(0,z)$。ReLU 具有单侧抑制性和稀疏激活性,能够有效缓解梯度饱和问题,增强网络对机器人关节非线性突变的表达能力。

通过残差连接机制,可实现 14 层以上深度网络的稳定训练,大幅提升模型对超冗余度蛇形臂机器

人复杂运动空间的表达能力,为精准拟合逆运动学映射关系提供结构保障。

2.3 物理约束复合损失函数

超冗余度机器人逆运动学的最大挑战是解的不唯一性,即多解问题。传统监督学习采用的均方误差损失函数易导致网络学习同一位姿下不同构型解的算术平均值,生成不满足几何约束的无效解。为解决该问题,本文同时引导网络输出"能量最小""构型平滑"的最优解,设计融合物理约束的复合损失函数,摒弃单纯依赖标签的直接拟合,通过多约束协同优化提升解的有效性与合理性。

总损失函数 L 定义如式(17):

$$L = L_{\text{pos}} + \lambda L_{\text{norm}} \tag{17}$$

其中:L_{pos} 表示正运动学重投影误差,用于最小化预测构型末端位姿与目标位姿的差异,保障求解精度;λ 为权重系数,用于平衡位置精度与构型约束;L_{norm} 为最小范数正则项,用于约束关节转动角度,使网络在多解空间中选择转动角度最小(即最接近零位)的关节构型,从而使得机器人避开奇异构型。

正运动学重投影误差 L_{pos},采用 L_1 范数计算预测关节构型对应的末端位姿与目标位姿的差异。相较于 L_2 范数,L_1 范数在误差趋近于零时梯度保持恒定,可避免训练后期梯度消失,实现高精度收敛,表达式为:

$$L_{\text{pos}} = \left\| FK(\boldsymbol{q}_{\text{pred}}) - \boldsymbol{P}_{\text{target}} \right\|_1 \tag{18}$$

其中:$FK(\cdot)$表示与式(11)中 $f(\cdot)$相同的正运动学映射关系;$FK(\boldsymbol{q}_{\text{pred}})$表示将网络预测的关节角度 $\boldsymbol{q}_{\text{pred}}$ 代入已知的正运动学计算模块 $FK(\cdot)$,并求得其对应的末端位置;$\boldsymbol{P}_{\text{target}}$ 表示目标位置。

最小范数正则项 L_{norm},通过约束关节转动幅度筛选最优解,使机器人构型最接近零位状态,降低运动能量消耗并提升构型平滑性,表达式为:

$$L_{\text{norm}} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} q_i^2 \tag{19}$$

其中:n 表示 U 副关节个数(本文 $n=6$),$2n$ 表示机器人运动自由度数量(本文为 12 自由度)。

在损失函数设计上,常规方案多采用均方误差对标签数据进行直接拟合。然而,由于蛇形臂机器人的高冗余特性,同一个末端位姿存在无数组关节角度解,单纯的均方误差拟合会导致网络学到多组可行解的平均值,从而生成在实际作业中不合理、不平滑的突变构型。本文设计的复合损失函数通过引入最小范数正则项,在数学层面为多解空间设定了关节角度最小化的优化目标,这一约束可以使网络在无数组候选解中,筛选出离初始零位最近、关节偏差最小的平滑构型。

2.4 模型训练策略

为实现无标签数据条件下的深层网络有效训练,本文充分利用机器人几何运动学特性构建自监督学习流程。该流程的核心是构建"预测-校验-修正"的闭环反馈机制,确保网络输出遵循物理构型约束。以下从优化算法选择、训练闭环流程 2 方面详细说明。

a) 优化算法选择。针对 Res-MLP 模型深层结构的高维非凸优化特性,传统随机梯度下降(Stochastic gradient descent, SGD)易陷入局部极小值且收敛速度慢。本文采用 AdamW 优化算法,通过解耦权重衰减与梯度更新策略,在不影响梯度方向的前提下施加正则化约束,有效抑制过拟合,保障模型在长周期训练中的参数稀疏性与泛化能力。

b) 自监督训练闭环流程。训练过程并非单向函数拟合,而是通过内嵌正运动学模块构建物理校验闭环,流程如图 6 所示。

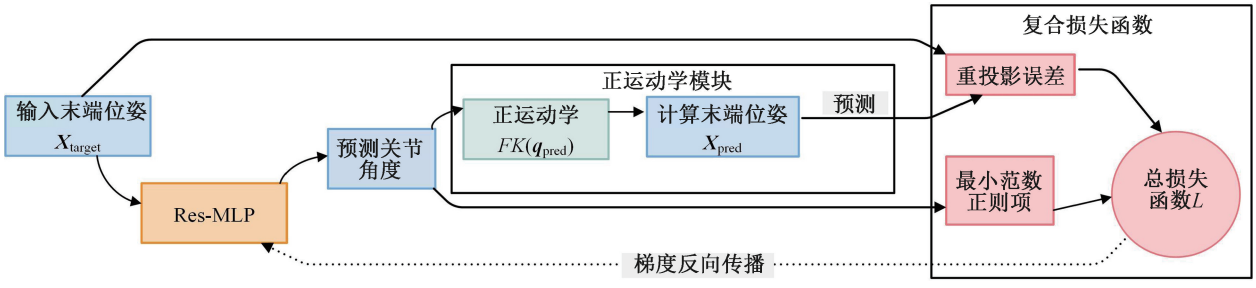


图 6 Res-MLP 模型训练流程图

2.5 神经网络性能评估

为验证 Res-MLP 模型及训练策略的有效性,从收敛性、泛化能力及求解精度分布 3 个维度开展静态性能评估。实验数据集包含 500000 组"关节构型-末端位姿"配对样本。为确保数据尽可能覆盖整个工作空间,采用关节空间均匀采样策略,在每一关节的转动范围内独立生成均匀分布的随机关节角度,共计 500000 组。通过正运动学计算得到对应的

末端位姿,构成相应的配对样本。该策略可保证关节空间的全域覆盖,进而使工作空间采样分布均匀,避免数据集中于中心区域,为模型在边界及奇异点附近的泛化能力提供保证。数据集按 9:1比例划分为训练集(450000 组)和测试集(50000 组),通过对比训练集与测试集的位置误差评估模型泛化能力,训练集与测试集上的误差统计结果如表 2 所示。

表 2　训练集与测试集上的误差统计

数据集	样本量/组	平均误差/mm	最大误差/mm
训练集	450000	0.00031	0.06210
测试集	50000	0.00045	0.06490

由表 2 可知:模型在测试集上的平均误差(0.00045 mm)与训练集(0.00031 mm)高度接近,最大误差差异仅为 0.00280 mm,表明模型未发生过拟合,具备良好的泛化能力。相较于传统方法,训练完成的 Res-MLP 模型具备两大核心工程优势:全局收敛性,摒弃对初始猜测值的依赖,避免局部极小值或发散风险;实时高效性,将迭代求解转化为前向推理,实现毫秒级逆解算,满足动态环境实时控制需求。

3　仿真实验

为全面验证本文提出的基于 Res-MLP 模型的逆运动学求解方法在超冗余度蛇形臂机器人上的实际性能,设计递进式仿真实验。首先通过单点逆运动学求解实验验证基础精度与实时性;然后针对超冗余机器人典型应用场景(深腔受限环境轨迹跟踪),验证其在连续运动中的构型合理性、轨迹精度及计算能力。实验以经典雅可比伪逆法为对比基准,确保评估结果的客观性与全面性。

3.1　实验一:单点逆运动学求解性能

3.1.1　实验设置

为验证 Res-MLP 模型在工作空间内的通用性能,采用蒙特卡罗方法在机器人工作空间内随机选取 10 组目标位姿点,覆盖不同姿态范围以保证样本代表性。

实验任务:分别使用 Res-MLP 模型与雅可比伪逆法,对 10 组目标位姿进行逆运动学求解,统计两项关键指标,即位置误差(末端实际到达位置与目标位置的距离)和求解耗时(完成单次逆运动学求解的计算时间)。

3.1.2　结果与分析

10 组随机样本的详细测试数据如表 3 所示,从表中可以看出:在求解精度方面,雅可比伪逆法基于局部线性优化的精确迭代特性,位置误差稳定性极高,平均误差仅 0.00007 mm;Res-MLP 模型平均误差为 0.00035 mm,虽然数值上略高于雅可比伪逆求解方法,但已满足实际作业的精度需求。

表 3　单点逆运动学求解精度与耗时

样本编号	Res-MLP 模型求解		雅可比伪逆求解	
	耗时/ms	位置误差/mm	耗时/ms	位置误差/mm
1	2.01	0.00057	11.64	0.00006
2	1.00	0.00024	6.30	0.00006
3	2.18	0.00010	4.72	0.00007
4	2.00	0.00007	4.71	0.00008
5	3.02	0.00006	5.00	0.00008
6	1.00	0.00006	4.67	0.00007
7	2.01	0.00042	4.55	0.00008
8	2.01	0.00190	4.42	0.00006
9	2.01	0.00002	4.76	0.00008
10	1.51	0.00009	4.41	0.00007
平均	1.87	0.00035	5.52	0.00007

在实时性方面,Res-MLP 模型展现出显著优势,平均单点耗时仅 1.87 ms,约为雅可比伪逆法(5.52 ms)的 1/3,其主要原因在于:Res-MLP 模型经离线训练后,单次逆运动学求解仅需一次前向传播计算,求解速度恒定;而雅可比伪逆法需通过迭代更新完成求解,且受初值选取影响较大(如样本 1),耗时随迭代步数波动,故在复杂姿态下表现出显著的计算不确定性。需注意的是,尽管在单点静态求解中,雅可比伪逆法的绝对耗时也仅在几毫秒量级,但在高频实时控制或长周期复杂轨迹跟踪场景中,这种单步效率差异会线性放大,直接影响系统响应能力,这一结论将在实验二中进一步验证。

3.2　实验二:深腔受限环境下的轨迹跟踪

超冗余度蛇形臂机器人主要应用于传统刚性机器人无法触及的狭窄或复杂非结构化环境,此类场景对机器人提出双重要求:精准跟踪预设轨迹;保持紧凑平滑的“蛇形”构型,避免与环境碰撞。不同于实验一侧重于工作空间内的静态单点求解性能评估,本实验通过模拟航空发动机内部探伤工况,进一步验证 Res-MLP 模型在特定受限空间内,针对连续轨迹任务的动态跟踪响应速度与构型平滑性,以验证该方法在复杂非结构化环境中的实际工程适应能力。

3.2.1　场景描述与轨迹设计

为了模拟航空发动机内部探伤的真实工况,本实验设计了一段受限空间内的螺旋扫描轨迹。

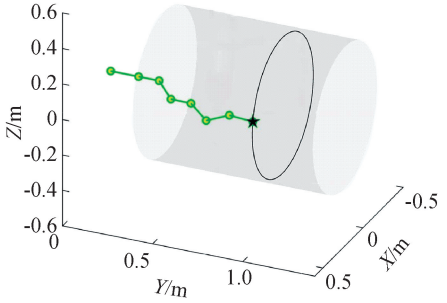
环境约束:假设机器人需深入一个直径受限的

圆柱形腔体。

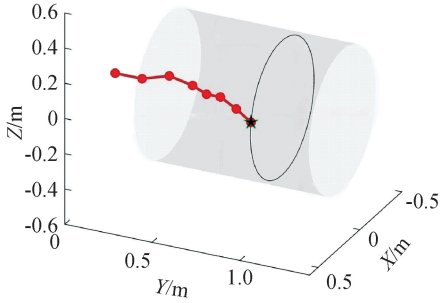
任务目标:末端执行器需要沿着腔体中心轴线深入,同时在垂直于该轴线的横截面内进行螺旋式扫描运动。

3.2.2 实验结果与分析

实验对比 2 种方法的轨迹跟踪精度、求解总耗时以及机器人构型合理性,结果如下:



(a) 雅可比伪逆生成的关节构型



(b) Res-MLP模型生成的关节构型

图 7 轨迹跟踪任务下的机器人关节构型示意图

表 4 轨迹跟踪任务下的逆运动学求解精度与耗时

方法	耗时/ms	平均误差/mm
Res-MLP 模型求解方法	317.56	0.00036
雅可比伪逆求解方法	954.38	0.00007

由图 7 可见:Res-MLP 模型生成的构型呈现自然、平滑的“蛇形”弯曲状态,各关节角度分布均匀,整体包络体积小,可灵活适配狭窄腔体环境;雅可比伪逆法虽能完成轨迹跟踪,但部分时刻出现关节角度突变的折线构型,增大了与腔体碰撞的风险。这主要是因为 Res-MLP 模型训练过程中引入最小范数正则项,约束关节转动幅度,避免了不必要的冗余运动;而雅可比伪逆法为局部优化方法,容易在奇异区域陷入局部最优,难以兼顾全局构型平滑性。

从表 4 还可以看出:轨迹跟踪任务中 2 种方法的性能差异显著,精度方面,Res-MLP 模型的平均误差(0.00036 mm)略高于雅可比伪逆法(0.00007 mm),但均满足高精度跟踪需求。耗时方面,Res-MLP 模型的总耗时 317.56 ms,与雅可比伪逆法(954.38 ms)相比,计算效率提升了近 2 倍。这主要是因为雅可比伪逆法需对每个轨迹点进行独立迭代求解,计算复杂度随轨迹点数线性增加,且靠近奇异点时迭代成本剧增;而 Res-MLP 模型通过前向推理直接输出结果,无需迭代,求解效率不受轨迹点数影响,可大幅降低控制系统算力负载。

综合以上 2 项实验结果可知,Res-MLP 模型虽在精度上略低于传统雅可比伪逆法,但完全满足工业应用需求;在计算效率上,尤其是连续轨迹跟踪任务中,展现出显著优势,且生成的构型更平滑、紧凑,更适配深腔受限环境作业,具备明确的工程应用价值。

a) 为直观对比 2 种方法生成的机器人构型差异,采用骨架图方式模拟机器人臂体运动姿态,对比结果如图 7 所示,其中:图 7(a)为雅可比伪逆法生成的关节构型,图 7(b)为 Res-MLP 模型生成的关节构型。

b) 跟踪精度与耗时方面,2 种方法在螺旋轨迹跟踪任务中的综合性能对比见表 4。

4 结 论

针对超冗余度蛇形臂机器人逆运动学求解中存在的多解性、强非线性及实时性不足等问题,本文开展了基于深度残差网络的逆运动学求解方法研究,通过构建“编码-残差主体-解码”架构并引入物理约束损失函数,实现了高精度逆运动学求解,仿真实验验证了该方法的有效性与工程适用性,主要研究结论如下:

a)提出了基于 Res-MLP 模型的逆运动学求解策略。针对 12 自由度蛇形臂机器人复杂的非线性映射问题,通过残差连接机制,Res-MLP 模型有效解决了深层网络训练中的梯度消失与网络退化问题,成功实现 14 层以上深度网络的稳定训练,为拟合超冗余度机器人复杂运动学关系提供了可靠的网络架构支撑。

b)设计了融合物理约束的复合损失函数。通过在损失函数中耦合正运动学误差和最小范数约束,引导网络在多组解中输出“能量最小”“构型平滑”的最优解,有效解决了超冗余逆运动学的多解性问题,避免了传统监督学习中无效解的生成。同时,构建自监督训练闭环流程,通过内嵌的正运动学模块实现物理约束校验,简化了训练数据制备流程,大幅提升了模型的工程适配性。

c)仿真实验验证了 Res-MLP 模型的综合性能。单点逆运动学求解实验中,毫秒级别的平均求解耗时(1.87 ms),平均位置误差 0.00035 mm,满足工业机器人高精度定位需求;深腔受限环境轨迹跟踪实验中,求解总效率较传统方法提升近 2 倍,且生成的机器人构型更平滑紧凑,包络体积小,可有效适配狭窄复杂环境作业,避免传统方法构型突变易碰撞的问题。

本文提出的 Res-MLP 逆运动学求解方法,在保障求解精度的前提下,显著提升了计算效率,且具备良好的构型优化能力。此外,该方法具有较强的普适性与工程参考价值。所构建的网络架构具备良好的模块化解耦特性,易于推广至其他不同自由度配置的机器人,为航空发动机探伤、核电管道检修等复杂受限环境的实时控制提供了有效技术方案。

需要指出的是,本文建立在刚性连杆的运动学假设之上,在实际工况下由重力及绳驱拉力产生的物理形变补偿仍需进一步研究。未来研究可进一步引入感知反馈或刚度补偿模型,以修正由自重及绳拉力引起的结构变形;同时,结合碰撞检测算法,构建耦合结构刚度特征与环境约束的"逆解求解-碰撞规避"模型,以提升机器人在动态非结构化环境中的自适应能力。

参考文献:

[1] 吕炜枫, 周静, 冉文王, 等. 典型事故工况下压水堆核电厂内工作人员辐射风险分析方法研究[J]. 核科学与工程, 2023, 43(4): 835-841.

[2] 李鹏涛, 左洪福, 肖文, 等. 航空发动机叶片损伤及其修复技术研究与展望[J]. 航空学报, 2024, 45(15): 140-167.

[3] Mu Z G, Zhang L Y, Yan L, et al. Hyper-redundant manipulators for operations in confined space: typical applications, key technologies, and grand challenges[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(6): 4928-4937.

[4] Ma X, Wang X C, Zhang Z H, et al. Design and experimental validation of a novel hybrid continuum robot with enhanced dexterity and manipulability in confined space[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2023, 28(4): 1826-1835.

[5] Dimitropoulos N, Tzirtzilaki N, Michalos G, et al. Bio-inspired robots for confined space industrial applications: a novel cable-driven snake robot design[J]. Procedia CIRP, 2024, 125: 107-112.

[6] Chen Q H, Li M T, Wu H X, et al. Design, self-calibration and compliance control of modular cable-driven snake-like manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2024, 193: 105562.

[7] Manara F, Poka A, Ludovico D, et al. Tendon-driven hyper-redundant manipulators: a review on design solutions [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2025, 30(5): 3852-3867.

[8] Chen Z, Zhang X B, Liu M L, et al. Review of cable-driven hyper-redundant robotic arms [C] // 2024 3rd International Conference on Robotics, Artificial Intelligence and Intelligent Control (RAIIC). July 5-7, 2024, Mianyang, China. IEEE, 2024: 110-119.

[9] 闫庆梓. 超冗余机器人运动学标定及轨迹规划方法研究[D]. 大连:大连理工大学, 2022: 1-21.

[10] Lakshmi Narayanan V, Narayan J, Gritli H, et al. A decade of inverse kinematics methods for serial manipulators: a systematic review[J]. Journal of Field Robotics, 2026, 43(1): 184-229.

[11] Colomé A, Torras C. Closed-loop inverse kinematics for redundant robots: comparative assessment and two enhancements [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20(2): 944-955.

[12] Peng J Q, Xu W F, Liu T L, et al. End-effector pose and arm-shape synchronous planning methods of a hyper-redundant manipulator for spacecraft repairing [J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 155: 104062.

[13] Liu T L, Xu W F, Yang T W, et al. A hybrid active and passive cable-driven segmented redundant manipulator: design, kinematics, and planning[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2021, 26(2): 930-942.

[14] 刘世平, 曹俊峰, 孙涛, 等. 基于 BP 神经网络的冗余机械臂逆运动学分析[J]. 中国机械工程, 2019, 30(24): 2974-2977, 2985.

[15] Calzada-Garcia A, Victores J G, Naranjo-Campos F J, et al. Inverse kinematics for robotic manipulators via deep neural networks: experiments and results [J]. Applied Sciences, 2025, 15(13): 7226.

[16] Ho C K, Chan L W, King C T, et al. A deep learning approach to navigating the joint solution space of redundant inverse kinematics and its applications to numerical IK computations[J]. IEEE Access, 2023, 11: 2274-2290.

[17] Malik A, Lischuk Y, Henderson T, et al. A deep reinforcement-learning approach for inverse kinematics solution of a high degree of freedom robotic manipulator[J]. Robotics, 2022, 11(2): 44.

[18] Wang X Q, Liu X, Chen L R, et al. Deep-learning damped least squares method for inverse kinematics of redundant robots [J]. Measurement, 2021, 171: 108821.

[19] 李艳辉, 霍琦, 李昂, 等. 模块化超冗余度空间机械臂的设计与实验[J]. 机器人, 2022, 44(1): 55-65.

[20] 朱晓俊, 王学谦, 马云萱, 等. 绳驱超冗余空间柔性机械臂遥操作系统设计与实验研究[J]. 机器人, 2022, 44(1): 9-18.

(责任编辑:康　锋)