



Poincaré 不等式在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性

朱婷婧, 韩焯琮, 黄体仁

(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘要: 利用对称 Riesz 核表示方法以及 Radon-Nikodym 定理构造合适的度量测度空间, 并利用曲线族模的收敛性以及加倍测度的弱收敛性, 证明 Poincaré 不等式在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性。设一个完备的加倍度量测度空间序列 Gromov-Hausdorff 收敛于完备的度量测度空间, 若该空间序列满足 Poincaré 不等式, 则在对应的收敛空间上也满足 Poincaré 不等式。该研究丰富了度量空间上的度量特征在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性问题。

关键词: Poincaré 不等式; Gromov-Hausdorff 收敛; 度量测度空间; Riesz 核; 稳定性

中图分类号: O174.5

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2025) 11-0883-06

引文格式: 朱婷婧, 韩焯琮, 黄体仁. Poincaré 不等式在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性[J]. 浙江理工大学学报(自然科学), 2025, 53(6): 883-888.

Reference Format: ZHU Tingjing, HAN Yecong, HUANG Tiren. Stability of Poincaré inequality under Gromov-Hausdorff limit[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University, 2025, 53(6): 883-888.

Stability of Poincaré inequality under Gromov-Hausdorff limit

ZHU Tingjing, HAN Yecong, HUANG Tiren

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In this study, a suitable metric measure space was constructed by using the symmetric Riesz kernel representation method and the Radon-Nikodym theorem, and the stability of Poincaré inequality under the Gromov-Hausdorff limit was proved by using the convergence of the curve family module and the weak convergence of the doubling measure. We let a complete sequence of doubling metric measure spaces Gromov-Hausdorff converge to a complete metric measure space, and if the space sequence satisfies the Poincaré inequality, then the corresponding convergence space also satisfies the Poincaré inequality. This study enriches the stability of metric characteristics on metric spaces under Gromov-Hausdorff limit.

Key words: Poincaré inequality; Gromov-Hausdorff convergence; metric measure space; Riesz kernel; stability

0 引言

近年来, Gromov-Hausdorff 极限是微分几何研究的热点问题。在现代几何的发展中, Gromov-Hausdorff 极限已经成为刻画空间或几何的重要工具, 在黎曼几何、群论、度量几何中有着广泛的应用, 具体参考文献[1-2]。度量不变量是研究度量空间的重要工具, 可以用来刻画不同度量空间之间的几何差别; 空

收稿日期: 2023-03-16 网络出版日期: 2023-07-07

基金项目: 国家自然科学基金项目(11401531)

作者简介: 朱婷婧(1998—), 女, 湖南娄底人, 硕士研究生, 主要从事拟共形映射方面的研究。

通信作者: 黄体仁, E-mail: htiren@zstu.edu.cn

间上的度量特征的稳定性是用来研究空间一般性质的重要指标,因此度量特征在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性是几何领域研究的热点和难点问题。

欧氏空间上的 Poincaré 不等式是关于函数与其梯度的 L^p 范数的不等式,主要描述的是函数的广义导数的范数对函数本身的范数的控制,在 Sobolev 空间理论中具有重要作用。Ziemer^[3]研究了 Sobolev 空间和有界变差函数,Shanmugalingam^[4]将 Sobolev 理论推广到度量测度空间上。随着度量测度空间上的 Sobolev 空间理论的发展,Poincaré 不等式及一些相关的应用可以推广到更一般的度量测度空间上,并产生了大量研究成果。Heinonen 等^[5]证明,满足 Poincaré 不等式和加倍条件的牛顿空间的 Hölder 连续嵌入。Heinonen 等^[6]证明,满足 Poincaré 不等式的加倍测度空间,Lipschitz 函数在其上的牛顿空间中稠密。Keith^[7-8]得到了 Poincaré 不等式的一系列等价性。Cheeger^[9]和 Keith^[10]证明了满足 Poincaré 不等式的加倍空间具有一种类似于可求长的微分结构。Heinonen 等^[11]证明,具有 Poincaré 不等式的加倍空间是 Loewner 空间。这些理论为 Poincaré 不等式的发展奠定了基础,也使其研究进入了一个新的高度。

本文主要研究 Poincaré 不等式在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性。首先通过加倍测度的性质与 Riesz 核表示,证明了一个测度的有限性;其次,由 Radon-Nikodym 定理与 Carathéodory 准则证明该测度是一个 Borel 正则测度;最后运用测度的弱收敛性以及曲线族模在 Gromov-Hausdorff 收敛下的性质,证明了对于满足 Poincaré 不等式的完备的加倍度量测度空间列 Gromov-Hausdorff 收敛到一个完备的加倍度量测度空间,并且该收敛的度量测度空间上也满足 Poincaré 不等式。上述结论的证明方法推广了收敛定理在度量空间上的应用,丰富了度量空间中的稳定性问题。

1 预备知识

首先回顾一些基本概念。 (X, d, x) 表示由度量空间 (X, d) 和 $x \in X$ 组成的定向的度量空间, (X, d, μ) 表示由度量空间 (X, d) 和 X 上的 Borel 正则测度 μ 组成的度量测度空间。 $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ 表示以 $x_0 \in X$ 为中心, $r > 0$ 为半径的球。具体概念参见文献[12-14]。

定义 1^[14] 如果度量空间 (X, d) 中的任意闭球都是紧集,则称 (X, d) 为 Proper 空间。

定义 2^[5] 如果对于每个 $x \in X, r > 0$,存在常数 $D > 0$,使得

$$\mu(B(x, 2r)) \leq D\mu(B(x, r)),$$

称测度 μ 为加倍测度, D 为加倍常数。

下面介绍度量测度空间上函数的上梯度和 p-Poincaré 不等式。

定义 3^[5] 设函数 $g : X \rightarrow [0, \infty]$ 为 Borel 函数, $u : X \rightarrow \mathbf{R}$ 为可测函数, $x, y \in X, \gamma$ 是 X 中连接 x, y 的任意可求长曲线。若

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma} g \, ds$$

成立,则称函数 g 为可测函数 u 的上梯度。

定义 4^[5] 设 (X, d, μ) 为度量测度空间。若存在 $C > 0, \lambda \geq 1, p \geq 1$ 使得对每个可测函数 u 和 u 的上梯度 g 有

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u - u_B| \, d\mu \leq Cr \left(\frac{1}{\mu(\lambda B)} \int_{\lambda B} g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中: $a \in X, r > 0, B = B(a, r)$,则称空间 (X, d, μ) 具有 p-Poincaré 不等式。

下面给出 Gromov-Hausdorff 收敛的定义。

定义 5^[7] 设 $\{(X_n, d_n, p_n)\}$ 为一个定向度量空间序列, (X, d, p) 为定向度量空间。若对任意的 $r > 0, 0 < \varepsilon < r$,存在一个正整数 N ,使得对于每个 $n > N$,都存在映射 $f_n : B(a_n, r) \rightarrow X$ 满足下列条件:

- a) $f_n(a_n) = a$;
- b) $|d(f_n(x), f_n(y)) - d_n(x, y)| < \varepsilon, \forall x, y \in B(a_n, r)$;
- c) $B(a, r - \varepsilon) \subset N_{\varepsilon}(f_n(B(a_n, r)))$ 。

则称空间序列 $\{(X_n, d_n, p_n)\}$ Gromov-Hausdorff 收敛到空间 (X, d, p) 。

注 1 设 A 为度量空间 (X, d) 的一个非空子集, A 的 ε 邻域为 $N_\varepsilon(A) = \{x \in X; \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. 定义 5 是经典的度量空间的 Gromov-Hausdorff 收敛定义, 同时定义 5 的条件 c) 可由定义 6 等价替换, 因此本文给出方便计算的(测度的)Gromov-Hausdorff 收敛的等价定义.

定义 6^[7] 设 (Z, ρ) 为度量空间, $\{F_n\}$ 为 Z 上的一个子空间序列, F 为 Z 上的子空间, 若对于任意的 $q \in Z, R > 0$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in F_n \cap B(q, R)} \text{dist}(z, F) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in F \cap B(q, R)} \text{dist}(z, F_n) = 0,$$

则称子空间序列 $\{F_n\} \subset Z$ 收敛到子空间 $F \subset Z$.

定义 7^[7] 设空间 $\{(X_n, d_n, p_n)\}$ 为一个完备的定向度量空间序列, (X, d, p) 为完备的定向度量空间. 若存在 Proper 定向度量空间 (Z, ρ, q) 和等距嵌入 $\iota: X \rightarrow Z$ 和 $\iota_n: X_n \rightarrow Z$, 使得 $\iota(p) = \iota_n(p) = q$, 并且 $\iota_n(X)$ 依上述定义 6 收敛到子空间 $\iota(X)$, 则称空间序列 $\{(X_n, d_n, p_n)\}$ 收敛到空间 (X, d, p) .

定义 8^[7] 设空间 $\{(X_n, d_n, \mu_n, p_n)\}$ 为一个完备的定向度量测度空间序列, (X, d, μ, p) 为完备的定向度量测度空间. 若存在 Proper 定向长度空间 (Z, ρ, q) 和等距嵌入 $\iota: X \rightarrow Z$ 和 $\iota_n: X_n \rightarrow Z$, 使得 $\iota(p) = \iota_n(p) = q$, $\iota_n(X)$ 依定义 6 收敛到子空间 $\iota(X)$ 以及 $\iota_n * \mu_n$ 弱收敛到测度 $\iota * \mu$, 则称空间序列 $\{(X_n, d_n, \mu_n, p_n)\}$ 收敛到空间 (X, d, μ, p) .

注 2 本文将 $\iota * \mu$ 记为 Z 上的一个测度: $\iota * \mu(E) = \mu(\iota^{-1}(E))$, 其中 $E \subset Z$. 若对于每一个连续的实值函数 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, 当 $n \rightarrow \infty$, 有 $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$, 则称 X 上的测度 μ_n 弱收敛到测度 μ .

在开始证明定理 1 前, 需要引入对称 Riesz 核的定义和两个重要引理.

定义 9^[7] 给定 $C > 0, x, y \in (X, d, \mu)$. 若对于每个 Borel 集 $A \subset X$, 定义 μ_{xy}^C 为:

$$\mu_{xy}^C(A) = \int_{A \cap B_{xy}} \frac{d(x, y)}{\mu(B(x, d(x, z)))} + \frac{d(y, z)}{\mu(B(y, d(y, z)))} d\mu(z),$$

其中 $B_{xy} = B(x, 2Cd(x, y)) \cup B(y, 2Cd(x, y))$, 则 μ_{xy}^C 称为 μ 在 x, y 两点的对称 Riesz 核.

引理 1^[7] 设 $\{(X_n, d_n, \mu_n)\}$ 为一个紧的度量测度空间序列, Γ_n 为 X_n 中可求长曲线族. 如果 $\{(X_n, d_n, \mu_n)\}$ Gromov-Hausdorff 收敛到紧的度量测度空间 (X, d, μ) , 且 $\mu(X) < \infty$, 则

$$\text{bmod}_p(\limsup_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{bmod}_p(\Gamma_n).$$

注 3 如果令 Γ 表示 X 中可求长曲线族, 由度量测度空间的 Gromov-Hausdorff 收敛可知, $\Gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n$.

引理 2^[7] 令 $p \geq 1, (X, d, \mu)$ 为完备的加倍度量测度空间, 则下列命题等价:

a) 对 (X, d, μ) 上的所有可测函数都有 p -Poincaré 不等式成立;

b) 存在常数 $C \geq 1$, 使得对于每一对不同的点 $x, y \in X$, 有 $d(x, y)^{1-p} \leq C \text{bmod}_p(x, y, \mu_{xy}^C)$, 其中常数 C 只与加倍常数有关.

2 主要定理及其证明

定理 1 主要通过 Riesz 核表示证明了 Poincaré 不等式在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性. 在证明定理 1 之前, 本文首先证明两个引理.

引理 3 设 (X, ρ, μ) 为加倍度量测度空间, 则对称 Riesz 核 $\mu_{xy}^C(X) < \infty$.

证明 因为

$$\begin{aligned} \mu_{xy}^C(X) &= \int_{X \cap B_{xy}} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} + \frac{\rho(y, z)}{\mu(B(y, \rho(y, z)))} d\mu(z) \\ &= \int_{X \cap B_{xy}} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} d\mu(z) + \int_{X \cap B_{xy}} \frac{\rho(y, z)}{\mu(B(y, \rho(y, z)))} d\mu(z) = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

对于 I_1 的积分区域 $X \cap B_{xy}$, 存在 $R = \text{diam}(B_{xy}) > 0$, 使得 $B(x, 2R) \supset X \cap B_{xy}$, 从而

$$I_1 \leq \int_{B(x, 2R)} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} d\mu(z) = \sum_{j \geq -1} \int_{A_j} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} d\mu(z),$$

其中: $A_j = \{z: 2^{-j-1}R \leq \rho(x, z) < 2^{-j}R\}$ 。

对于每个 $j \geq -1$, 利用加倍测度 μ 和环 A_j 的性质有

$$\begin{aligned} \int_{A_j} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} d\mu(z) &= \int_{B(x, 2^{-j}R)} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} d\mu(z) - \int_{B(x, 2^{-j-1}R)} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} d\mu(z) \\ &\leq \int_{B(x, 2^{-j}R)} \frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} d\mu(z) \leq \frac{2^{-j}RD}{\mu(B(x, 2^{-j}R))} \int_{B(x, 2^{-j}R)} d\mu(z) = 2^{-j}RD. \end{aligned}$$

从而 $I_1 \leq \sum_{j \geq -1} 2^{-j}RD = 4RD$ 。

同理可得 $I_2 \leq 4RD$ 。所以 $\mu_{xy}^C(X) \leq 8RD < \infty$ 。□

引理 4 μ_{xy}^C 为 X 上的 Borel 正则测度。

证明 由引理 3 可知, μ_{xy}^C 是 X 上的有限测度, 由度量测度空间的定义有, 测度 μ 也是 X 上的有限测度。由对称 Riesz 核定义, 对 $\forall E \subset X, \mu(E) = 0$, 可得 $\mu_{xy}^C(E) = 0$, 因此 μ_{xy}^C 关于 μ 绝对连续。应用 Radon-Nikodym 定理, 对有限测度 μ 和 μ_{xy}^C , 则存在唯一可测函数 $f: X \rightarrow [0, \infty]$, 使得 $\mu_{xy}^C(E) = \int_E f d\mu$ 。

对任意两个不交的可测集 $E_1, E_2 \subset X$, 利用上述结论有

$$\mu_{xy}^C(E_1 \cup E_2) = \int_{E_1 \cup E_2} f d\mu = \int_{E_1} f d\mu + \int_{E_2} f d\mu = \mu_{xy}^C(E_1) + \mu_{xy}^C(E_2)。$$

因此, 由 Carathéodory 准则可知, μ_{xy}^C 为 X 上的 Borel 测度。□

定理 1 设 $p > 1$, $\{(X_n, d_n, \mu_n, q_n)\}$ 为一个完备的定向加倍度量测度空间序列, 其中 μ_n 的加倍测度常数一致有界, 并且 $\{(X_n, d_n, \mu_n, q_n)\}$ 序列 Gromov-Hausdorff 收敛到完备定向度量测度空间 (X, d, μ, q) 。如果对于每个 $n \in \mathbf{N}$, 空间序列 $\{(X_n, d_n, \mu_n)\}$ 上都有 p -Poincaré 不等式成立且相关常数一致有界, 那么收敛空间 (X, d, μ) 上也有 p -Poincaré 不等式成立, 并且测度 μ 也是加倍测度, 其相关常数仅依赖于上述一致有界的常数。

证明 由文献[7]可知, 加倍测度在 Gromov-Hausdorff 极限下具有稳定性。为了证明收敛的度量测度空间 (X, d, μ) 上满足 p -Poincaré 不等式, 由引理 2 可知, 只需证明存在常数 ι , 使得对于每一对不同的点 $x, y \in X$ 有

$$d(x, y)^{1-p} \leq C \text{mod}_p(x, y, \mu_{xy}^C) \quad (1)$$

由定义 8 可知, 存在 Proper 定向长度空间 (Z, ρ, l) 和等距嵌入: $\iota_n: X_n \rightarrow Z$ 和 $\iota: X \rightarrow Z$, 使得 $\iota_n(X_n)$ 按子空间收敛到 $\iota(X)$, $\iota_n(q_n) = \iota(q) = l$, $\iota_n * \mu_n$ 收敛到 $\iota * \mu$ 。为了方便表述, 本文将嵌入到 (Z, ρ) 中的空间列 $(\iota_n(X_n), \iota_n * \mu_n)$ 和空间 $(\iota(X), \iota * \mu)$ 仍分别记作 (X_n, μ_n) 和 (X, μ) 。根据空间的等距嵌入可知, 证明式 (1) 成立等价于证明式 (2) 成立:

$$\rho(x, y)^{1-p} \leq C \text{mod}_p(x, y, \mu_{xy}^C) \quad (2)$$

因为 μ 为 X 上的 Borel 正则测度, 所以对任意可测集 $A \subset X$, 都存在 Borel 集 $B \supset A$, 使得 $\mu(A) = \mu(B)$ 。所以

$$\mu_{xy}^C(B) = \int_B f d\mu = \int_{B \setminus A} f d\mu + \int_A f d\mu = \int_A f d\mu = \mu_{xy}^C(A)。$$

因此 μ_{xy}^C 为 X 上的 Borel 正则测度, 由度量测度空间的定义以及引理 3 和引理 4 可知, (X, ρ, μ_{xy}^C) 构成一个度量测度空间。

因为 $\{(X_n, \rho, \mu_n)\}$ 的加倍常数是一致有界的, 由引理 2 知, 存在一个只与加倍常数有关的常数 $C \geq 1$, 使得

$$C \text{mod}_p(x_n, y_n, \mu_{nx_ny_n}^C) \geq \rho(x_n, y_n)^{1-p} \quad (3)$$

其中 $x_n, y_n \in X_n$ 。因此, 可以找到一个完备的度量测度空间序列 $\{(X_n, \rho, \mu_{nx_ny_n}^C)\}$ 。不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, 故对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N_1, N_2 , 当 $n > N_1$ 时, $x_n \in B(x, \epsilon)$; 当 $n > N_2$ 时, $y_n \in B(y, \epsilon)$ 。令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $\rho(x, y) - 2\epsilon \leq \rho(x_n, y_n) \leq \rho(x, y) + 2\epsilon$ 。从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$ 。再由定义 6 子空间的收敛可知, $(B_{x_ny_n})$ 收敛到 B_{xy} 。由定义 9 有

$$d\mu_{xy}^C(z) = \left(\frac{\rho(x,z)}{\mu(B(x,\rho(x,z)))} + \frac{\rho(y,z)}{\mu(B(y,\rho(y,z)))} \right) \chi_{B_{xy}} d\mu(z),$$

其中: $\chi_{B_{xy}}$ 表示 B_{xy} 上的特征函数。

因为 μ_n 弱收敛到 μ , 所以对每一个 Z 上的连续实值函数 f , 有 $\int_Z f d\mu_n \rightarrow \int_Z f d\mu, n \rightarrow \infty$ 。由上述讨论可得

$$\begin{aligned} \int_Z f d\mu_{n_x n_y}^C &= \int_Z f \left(\frac{\rho(x_n, z)}{\mu(B(x_n, \rho(x_n, z)))} + \frac{\rho(y_n, z)}{\mu(B(y_n, \rho(y_n, z)))} \right) \chi_{B_{x_n y_n}} d\mu(z) \\ &= \int_{B_{x_n y_n}} f \left(\frac{\rho(x_n, z)}{\mu(B(x_n, \rho(x_n, z)))} + \frac{\rho(y_n, z)}{\mu(B(y_n, \rho(y_n, z)))} \right) d\mu(z) \\ &\rightarrow \int_{B_{xy}} f \left(\frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} + \frac{\rho(y, z)}{\mu(B(y, \rho(y, z)))} \right) d\mu(z) \\ &= \int_Z f \left(\frac{\rho(x, z)}{\mu(B(x, \rho(x, z)))} + \frac{\rho(y, z)}{\mu(B(y, \rho(y, z)))} \right) \chi_{B_{xy}} d\mu(z) = \int_Z f d\mu_{xy}^C. \end{aligned}$$

所以测度 $\mu_{n_x n_y}^C$ 弱收敛到测度 μ_{xy}^C 。因此度量测度空间 $\{(X_n, \rho, \mu_{n_x n_y}^C)\}$ Gromov-Hausdorff 收敛到度量测度空间 (X, ρ, μ_{xy}^C) 。

因为 μ_n 和 μ 是加倍测度, 所以 X_n 和 X 为 Proper 空间。又因为 X_n 和 X 中的每一个闭球都是紧的, 由空间的 Gromov-Hausdorff 收敛可知, 对每个 $(\bar{B}, \rho, \mu_{xy}^C)$, 存在一列 $\{(\bar{B}_n, \rho, \mu_{n_x n_y}^C)\}$ Gromov-Hausdorff 收敛到 $(\bar{B}, \rho, \mu_{xy}^C)$, 其中 B_n, B 分别为 X_n, X 中半径为 r 的球。

由引理 1 可知, 对于紧的度量测度空间 $(\bar{B}, \rho, \mu_{xy}^C)$ 和 $(\bar{B}_n, \rho, \mu_{n_x n_y}^C)$, 有

$$\text{mod}_p(x, y, \mu_{xy}^C) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{mod}_p(x_n, y_n, \mu_{n_x n_y}^C) \quad (4)$$

结合式(3)和式(4)得

$$C \text{mod}_p(x, y, \mu_{xy}^C) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)^{1-p} = \rho(x, y)^{1-p}.$$

由引理 2 的等价命题, 可知在球 \bar{B} 上满足 p -Poincaré 不等式。同时由球 \bar{B} 的任意性可知, 在空间 X 上也满足 p -Poincaré 不等式。因此空间 (X, d, μ) 上也有 p -Poincaré 不等式成立, 并且测度 μ 也是加倍测度, 其相关常数仅依赖于上述一致有界的常数。□

3 结 论

本文运用 Riesz 核表示方法来研究 Poincaré 不等式在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性。对于加倍测度常数一致有界的完备定向度量测度空间序列, 如果该度量测度空间序列满足 Poincaré 不等式, 则在 Gromov-Hausdorff 收敛下的空间上也满足 Poincaré 不等式, 从而证明了 Poincaré 不等式在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性。

该结果丰富了度量测度空间上的度量特征在 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性问题, 为研究度量测度空间上有关 Gromov-Hausdorff 极限下的稳定性问题提供了相关的理论依据。

参考文献:

- [1] Wu Z J, Xiao Y Q. On the Gromov-Hausdorff limit of metric spaces[J]. *Mathematica Slovaca*, 2019, 69(4): 931-938.
- [2] Guido D, Marotta N, Morsella G, et al. A Gromov-Hausdorff distance between von Neumann algebras and an application to free quantum fields[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2017, 272(8): 3238-3258.
- [3] Ziemer W P. *Weakly differentiable functions: Sobolev spaces and functions of bounded variation*[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [4] Shanmugalingam N. Newtonian spaces: An extension of Sobolev spaces to metric measure spaces [J]. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2000, 16(2): 243-279.
- [5] Heinonen J, Koskela P, Shanmugalingam N, et al. *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2015.

- [6] Heinonen J, Koskela P, Shanmugalingam N, et al. Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings[J]. *Journal D'Analyse Mathématique*, 2001, 85(1): 87-139.
- [7] Keith S. Modulus and the Poincaré inequality on metric measure spaces [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 2003, 245: 255-292.
- [8] Keith S. Measurable differentiable structures and the Poincaré inequality[J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 2004, 53(4): 1127-1150.
- [9] Cheeger J. Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces[J]. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 1999, 9: 428-517.
- [10] Keith S. A differentiable structure for metric measure spaces[J]. *Advances in Mathematics*, 2004, 183(2): 271-315.
- [11] Heinonen J, Koskela P. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry[J]. *Acta Mathematica*, 1998, 181(1): 1-61.
- [12] 钟根红, 韦露淑, 贺建辉, 等. 双参数广义三角函数与双曲函数的几个均值不等式[J]. *浙江理工大学学报(自然科学版)*, 2021, 45(2): 242-248.
- [13] 钟根红, 李林钟, 马晓艳. 广义三角函数与双曲函数的 Wilker-Huygens 型不等式[J]. *浙江理工大学学报(自然科学版)*, 2019, 41(1): 118-121.
- [14] 张秋莹, 黄体仁. 度量空间中拟双曲映射的局部性质[J]. *浙江理工大学学报(自然科学版)*, 2021, 45(6): 835-845.

(责任编辑:康 锋)