浙江理工大学学报，第 53 卷，第 6 期，2025 年 11 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(n).2025.06.014

收敛到 Euler-Mascheroni 常数的改进序列

余　航，张孝惠
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：Euler-Mascheroni 常数（Euler 常数）的快速逼近是近年来研究者们感兴趣的问题。为了快速逼近计算 Euler 常数，研究了快速收敛到 Euler 常数的序列及相关不等式问题。通过修改调和数项和引入连分数项，提出了两类基于上述修改的收敛到 Euler 常数的新序列，证明了它们的收敛速度和相关不等式，并对一些新序列的逼近值进行了数值计算和比较。结果表明：在新序列的基础上建立的与 Euler 常数相关的几个逼近不等式，扩展和改进了已有文献中的相关逼近不等式，数值计算验证了新序列能更快速地收敛到 Euler 常数。所得改进序列在 Euler 常数的快速计算方面较有意义。

关键词：Euler-Mascheroni 常数；收敛序列；收敛速度；渐近展开；快速计算

中图分类号：O174.6　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2025) 11-0872-11

引文格式：余航，张孝惠. 收敛到 Euler-Mascheroni 常数的改进序列[J]. 浙江理工大学学报（自然科学），2025，53(6)：872-882.

Reference Format：YU Hang，ZHANG Xiaohui. Modified sequences convergent to the Euler-Mascheroni constant[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University，2025，53(6)：872-882.

Modified sequences convergent to the Euler-Mascheroni constant

YU Hang，*ZHANG Xiaohui*
（School of Science，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China）

Abstract：The rapid approximation of the Euler-Mascheroni constant (Euler constant) has been of interest to researchers in recent years. To compute the Euler constant quickly, we studied the problem that some sequences converged quickly to the Euler constant and related inequalities. By modifying the term in the harmonic sum of Euler sequence and introducing the continued fraction to the logarithm term, we presented two new sequences convergent to the Euler constant based on the above modifications and proved the convergence speed of them, then obtained and compared the approximate value of some sequences by numerical computations. The results show that the established approximation inequalities for the Euler constant based on the new sequences extend and improve some related previous known approximation inequalities. Numerical computations demonstrate the new sequences can converge more quickly to the Euler constant. The obtained modified sequences are of significance in the rapid computation of the Euler constant.

Key words：Euler-Mascheroni constant；convergent sequence；convergence speed；asymptotic expansion；rapid computation

0　引　言

Euler-Mascheroni 常数（或简称 Euler 常数）$\gamma=0.577215\cdots$由如下极限定义：

收稿日期：2023－04－07　　网络出版日期：2023－06－07
基金项目：浙江省自然科学基金项目(LY22A010004)；国家自然科学基金项目(11771400)
作者简介：余　航(1999—　)，男，浙江衢州人，硕士研究生，主要从事复分析方面的研究。
通信作者：张孝惠，E-mail：xiaohui.zhang@zstu.edu.cn

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\gamma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n,$$

其中：序列$(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ 称为 Euler 序列。

$$H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

称为调和数，调和数是数论中一个重要的序列。Euler 常数是数学分析中的一个重要常数，其与数学分析中其他数学函数和常数的关系参见 Abramowitz 等[1]和 Lagarias[2]的研究，Lagarias[2]还给出了 Euler 常数的各种推广；与 Euler 常数有着重要关系的调和数参见马欠欠等[3]的研究。

从计算的观点看，若序列收敛到 Euler 常数的速度越快，计算相同项得到的逼近数就更精确。为了快速逼近 Euler 常数，研究者已对收敛到 Euler 常数的序列的收敛速度和相关不等式进行了一系列研究。1991 年，Young[4]证明了以下关于 Euler 序列的不等式：

$$\frac{1}{2n+1} < \gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n},$$

这表明 Euler 序列$(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ 的收敛速度为 n^{-1}。由于 Euler 序列的收敛速度太慢，寻找快速收敛到 Euler 常数的新序列引起了众多学者的兴趣。DeTemple、Mortici 以及其他研究者进一步研究了类似的序列与 Euler-Mascheroni 常数的逼近关系，相关研究参见 DeTemple[5-6]、Mortici 等[7-10]、Chen（陈超平）等[11-14]和 Lu 等[15-17]。陈超平等[11]给出了一类带参数的序列：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n - \log\left(1 + \sum_{i=0}^{p} a_i n^{-i}\right) \tag{1}$$

并提出了一个公开问题：要使得上述序列尽量快地收敛到 γ，a_i 应取何值？该公开问题被 Yang[18]、Gavrea 等[19]使用不同的方法所解决。Batir 和陈超平[12]进一步给出了收敛速度为 n^{-7} 的新序列

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - log\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{24\left(n+\frac{1}{2}\right)} - \frac{37}{5760\left(n+\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{10313}{2903040\left(n+\frac{1}{2}\right)^5}\right)。$$

Lu 等[17]引进连分数并定义了 $w_{k,n}^{(2)}$ 和 $w_{k,n}^{(3)}$ 两个序列。

$$w_{k,n}^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \log n - \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{1}{n}\,\frac{-\frac{12}{k}}{n + \frac{b_2}{n}}\right),$$

其中：$b_2 = 1/10 + k/24$；与之相关的逼近不等式为

$$\frac{11}{226800(n+1)^6} < \gamma - w_{8,n}^{(2)} < \frac{11}{226800 n^6},$$

当 $n \geqslant 29$ 时，此序列的收敛速度为 n^{-6}。

$$w_{k,n}^{(3)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \log n - \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{1}{n}\,\frac{-\frac{12}{k}}{n + \frac{\frac{1}{10}+\frac{k}{24}}{n + \frac{b_3}{n}}}\right),$$

其中：$b_3 = (11376 - 175k^2)/[2520(12+5k)]$；与之相关的逼近不等式为

$$\frac{44411}{143942400(n+1)^8} < \gamma - w_{18,n}^{(3)} < \frac{44411}{143942400(n-1)^8},$$

当 $n \geqslant 4$ 时，此序列的收敛速度为 n^{-8}。

特殊函数论中两类重要的函数 Gamma 函数和 Psi 函数分别定义为[1,20-22]：

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ \psi(x) = \log'\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)};$$

它们与 Euler-Mascheroni 常数有着密切的联系。特别地,Euler 常数可由 Psi 函数表示[1]:

$$\psi(n)=-\gamma+H_n,$$
$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\log 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1} \tag{2}$$

根据 Psi 函数与 Euler 常数间的关系式(2),不同于 Lu 等[17]修改对数项的方法,陈超平等[13]用如下只有奇数项的调和序列来逼近 Euler 常数:

$$P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n \tag{3}$$

并得到了双边不等式

$$\frac{1}{24(n+a)^2}\leqslant P_n-\gamma\leqslant\frac{1}{24(n+b)^2} \tag{4}$$

其中常数

$$a=\frac{1}{\sqrt{24(2-2\log 2-\gamma)}}-1=0.06858\cdots;b=0$$

是最好可能的。

由于逼近 Euler 常数的需要,找到更快地收敛到 Euler 常数的序列一直是相关研究中的重要问题。本文将陈超平等[13]修改 Euler 序列中的调和数项和 Lu 等[17]引入连分数项的思想相结合,提出了两类序列,给出了这些新序列的收敛速度,并建立了与 Euler 常数相关的几个逼近不等式。通过选取新序列中待定系数的最优值,使得新序列以更快的速度收敛到 Euler 常数。利用序列中前后项差值的上下界估计,建立新序列和 Euler 常数之间的逼近不等式,从而扩展和改进了一些已有的结果。最后通过数值计算验证新序列逼近 Euler 常数的速度。

1 两类收敛序列

Mortici[8-9]证明了如下引理。

引理 1 令 $k>1$ 且序列 $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0,\lim_{n\to\infty}n^k(\lambda_n-\lambda_{n+1})=l\in\mathbf{R},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}n^{k-1}\lambda_n=\frac{l}{k-1}。$$

引理 1 在研究序列的收敛速度时起着重要作用。

为了得到新的收敛到 Euler 常数的序列,首先将式(3)中的对数项通过类似式(1)的方式进行修改,得到收敛到 Euler 常数的第一类新序列。

定理 1 令 $s\in\mathbf{N}$,且

$$y_n^{(s)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\log\left(1+\frac{a_1}{n^2}+\frac{a_2}{n^4}+\frac{a_3}{n^6}+\cdots+\frac{a_s}{n^{2s}}\right),$$

其中:

$$a_1=\frac{1}{24},a_2=-\frac{37}{5760},a_3=\frac{10313}{2903040},\cdots。$$

对应的序列为:

$$y_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\log\left(1+\frac{1}{24n^2}\right),$$
$$y_n^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\log\left(1+\frac{1}{24n^2}-\frac{37}{5760n^4}\right),$$
$$y_n^{(3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\log\left(1+\frac{1}{24n^2}-\frac{37}{5760n^4}+\frac{10313}{2903040n^6}\right)。$$

进一步有如下极限：

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(y_n^{(1)}-\gamma\right)=-\frac{37}{5760},$$

$$\lim_{n\to\infty} n^6\left(y_n^{(2)}-\gamma\right)=\frac{10313}{2903040},$$

$$\lim_{n\to\infty} n^8\left(y_n^{(3)}-\gamma\right)=-\frac{5509121}{1393459200}。$$

证明　显然,当 $n\to\infty$ 时,序列中最后的对数项趋向于 0。由式(4)可知,序列 $(y_n^{(s)})_{n\geqslant 1}$ 收敛于 γ。记 $\lambda_n^{(s)}=y_n^{(s)}-\gamma$。当 $s=1$ 时,

$$y_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\log\left(1+\frac{a_1}{n^2}\right)\tag{5}$$

根据式(5),将 $\lambda_n^{(1)}$ 和 $\lambda_{n+1}^{(1)}$ 作差得

$$\lambda_n^{(1)}-\lambda_{n+1}^{(1)}=-\frac{2}{2(n+1)-1}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log\left(1+\frac{a_1}{n^2}\right)+\log\left(1+\frac{a_1}{(n+1)^2}\right)\tag{6}$$

将式(6)按 n^{-1} 的幂级数展开,可得

$$\lambda_n^{(1)}-\lambda_{n+1}^{(1)}=\left(\frac{1}{12}-2a_1\right)\frac{1}{n^3}+\left(-\frac{1}{8}+3a_1\right)\frac{1}{n^4}+\left(\frac{11}{80}+2a_1^2-4a_1\right)\frac{1}{n^5}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)。$$

进一步,对序列 $(\lambda_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 应用引理 1,有：

a)若 $a_1\neq 1/24$,则

$$\lim_{n\to\infty} n^3\left(\lambda_n^{(1)}-\lambda_{n+1}^{(1)}\right)=\frac{1}{12}-2a_1$$

且

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(y_n^{(1)}-\gamma\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\lambda_n^{(1)}=\frac{1}{24}-a_1\neq 0。$$

因此序列 $(y_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 的收敛速度为 n^{-2}。

b)若 $a_1=1/24$,则

$$\lambda_n^{(1)}-\lambda_{n+1}^{(1)}=-\frac{37}{1440}\frac{1}{n^5}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

且

$$\lim_{n\to\infty} n^5\left(\lambda_n^{(1)}-\lambda_{n+1}^{(1)}\right)=-\frac{37}{1440},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} n^4\left(y_n^{(1)}-\gamma\right)=-\frac{37}{5760}。$$

故序列 $(y_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 的收敛速度为 n^{-4}。

综上,序列 $(y_n^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 仅在 $a_1=1/24$ 时收敛速度最快,且收敛速度为 n^{-4}。

用完全类似的方法可求得 a_2 的值。此时

$$y_n^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\log\left(1+\frac{1}{24n^2}+\frac{a_2}{n^4}\right)$$

且

$$y_n^{(2)}-y_{n+1}^{(2)}=\left(-\frac{37}{1440}-4a_2\right)\frac{1}{n^5}+\left(\frac{37}{576}+10a_2\right)\frac{1}{n^6}+\left(-\frac{5107}{48384}-\frac{79a_2}{4}\right)\frac{1}{n^7}+O\left(\frac{1}{n^8}\right)。$$

当 $a_2=-37/5760$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty} n^6\left(y_n^{(2)}-\gamma\right)=\frac{10313}{2903040}$$

可知,序列$(y_n^{(2)})_{n\geqslant 1}$的收敛速度为$n^{-6}$。

通过类似方式推导,得到以下序列

$$y_n^{(3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\log\left(1+\frac{1}{24n^2}-\frac{37}{5760n^4}+\frac{a_3}{n^6}\right)。$$

当$a_3=10313/2903040$时,由

$$\lim_{n\to\infty}n^8(y_n^{(3)}-\gamma)=-\frac{5509121}{1393459200}$$

可知,序列$(y_n^{(3)})_{n\geqslant 1}$的收敛速度为$n^{-8}$。

使用相同的方式可得到a_4, a_5, …, a_s, …的取值。

定理 1 证毕。

定理 1 给出了第一类新序列,并证明了当序列收敛到 Euler 常数最快时对应系数$a_i(i=1,2,\cdots)$的取值,同时也证明了当s分别取 1、2、3 时第一类序列的收敛速度。

下面进一步引入连分数项来构造第二类收敛序列。

定理 2 令$s\in\mathbf{N}$且$t\in\mathbf{R}/\{0\}$,定义序列$(Y_{t,n}^{(s)})_{n\geqslant 1}$:

$$Y_{t,n}^{(s)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\frac{1}{t}\log\left(1+\frac{1}{n}\cfrac{b_1}{n+\cfrac{b_2}{n+\cfrac{b_3}{n+\cdots+\cfrac{b_s}{n}}}}\right)\tag{7}$$

其中:

$$b_1=\frac{t}{24},b_2=\frac{7}{40}-\frac{t}{48},b_3=\frac{175t^2-74556}{5040(-42+5t)},\cdots。$$

对应的序列为:

$$Y_{t,n}^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\frac{1}{t}\log\left(1+\frac{1}{n}\frac{\frac{t}{24}}{n}\right)\tag{8}$$

$$Y_{t,n}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\frac{1}{t}\log\left(1+\frac{1}{n}\cfrac{\frac{t}{24}}{n+\cfrac{\frac{7}{40}-\frac{t}{48}}{n}}\right)\tag{9}$$

$$Y_{t,n}^{(3)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\frac{1}{t}\log\left(1+\frac{1}{n}\cfrac{\frac{t}{24}}{n+\cfrac{\frac{7}{40}-\frac{t}{48}}{n+\cfrac{\frac{175t^2-74556}{5040(-42+5t)}}{n}}}\right)\tag{10}$$

则有:

$$\lim_{n\to\infty}n^4(Y_{t,n}^{(1)}-\gamma)=\frac{t}{1152}-\frac{7}{960},$$

$$\lim_{n\to\infty}n^6(Y_{t,n}^{(2)}-\gamma)=-\frac{t^2}{165888}+\frac{2071}{806400},$$

$$\lim_{n\to\infty}n^8(Y_{t,n}^{(3)}-\gamma)=-\frac{6125t^4-154350t^3-3922380t^2+440686008t-2590043040}{3657830400(-42+5t)}。$$

证明 当$s=1$时,

$$Y_{t,n}^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}-\log 4n-\frac{1}{t}\log\left(1+\frac{1}{n}\frac{b_1}{n}\right) \tag{11}$$

为使此序列收敛最快,将式(11)的第 n 项和第 $n+1$ 项作差,得

$$Y_{t,n}^{(1)}-Y_{t,n+1}^{(1)}=-\frac{2}{2(n+1)-1}+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{t}\log\left(1+\frac{b_1}{n^2}\right)+\frac{1}{t}\log\left(1+\frac{b_1}{(n+1)^2}\right) \tag{12}$$

然后将式(12)表示为 n^{-1} 的幂级数展开,

$$Y_{t,n}^{(1)}-Y_{t,n+1}^{(1)}=\left(\frac{t-24b_1}{12t}\right)\frac{1}{n^3}+\left(\frac{1}{8}\frac{-t+24b_1}{t}\right)\frac{1}{n^4}+\left(\frac{1}{80}\frac{160b_1^2-320b_1+11t}{t}\right)\frac{1}{n^5}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)。$$

进一步地,对序列$(Y_{t,n}^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 应用引理 1,有:

a)若 $b_1\neq t/24$,则

$$\lim_{n\to\infty}n^3(Y_{t,n}^{(1)}-Y_{t,n+1}^{(1)})=\frac{t-24b_1}{12t}\neq 0,$$

于是可知序列$(Y_{t,n}^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 的收敛速度为 n^{-2}。

b)若 $b_1=t/24$,则

$$Y_{t,n}^{(1)}-Y_{t,n+1}^{(1)}=\left(\frac{t}{288}-\frac{7}{240}\right)\frac{1}{n^5}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

且

$$\lim_{n\to\infty}n^4(Y_{t,n}^{(1)}-\gamma)=\frac{t}{1152}-\frac{7}{960} \tag{13}$$

此时序列$(Y_{t,n}^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 的收敛速度为 n^{-4}。

综上,收敛最快的可能序列$(Y_{t,n}^{(1)})_{n\geqslant 1}$ 仅在 $b_1=t/24$ 时取到。

与定理 1 中的证明类似,当 $s=2$ 时由式(7)得

$$Y_{t,n}^{(2)}-Y_{t,n+1}^{(2)}=\left(-\frac{7}{240}+\frac{b_2}{6}+\frac{t}{288}\right)\frac{1}{n^5}+\left(\frac{7}{96}-\frac{5b_2}{12}-\frac{5t}{576}\right)\frac{1}{n^6}+\left(-\frac{t^2}{6912}+\frac{(-504b_2+840)t}{48384}-\frac{b_2^2}{4}+\frac{5b_2}{6}-\frac{55}{448}\right)\frac{1}{n^7}+O\left(\frac{1}{n^8}\right)。$$

当 $b_2=7/40-t/48$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}n^6(Y_{t,n}^{(2)}-\gamma)=-\frac{t^2}{165888}+\frac{2071}{806400} \tag{14}$$

可知,序列$(Y_{t,n}^{(2)})_{n\geqslant 1}$ 的收敛速度为 n^{-6}。

类似地,当 $b_3=(175t^2-74556)/[5040(-42-5t)]$时,有

$$\lim_{n\to\infty}n^8(Y_{t,n}^{(3)}-\gamma)=-\frac{t^2}{165888}+\frac{2071}{806400} \tag{15}$$

可知序列$(Y_{t,n}^{(3)})_{n\geqslant 1}$ 的收敛速度为 n^{-8}。式(8)—(10)得证。

使用相同的方式可得到 b_4, b_5, …, b_s, …的取值。

定理 2 证毕。

与定理 1 类似,定理 2 给出了第二类新序列,并证明了当序列收敛到 Euler 常数最快时对应系数 b_i($i=1, 2, \cdots$)的取值以及对应的收敛速度。当 $s=1, 2, 3$ 时系数 t 的取值见推论 1。

推论 1　式(7)中 s 分别取 1、2、3,相应序列收敛最快时,t 的取值分别为 $t_1=42/5$、$t_2=\pm 6\sqrt{14497}/35$、$t_3=-41$,且有:

$$\lim_{n\to\infty}n^6(Y_{t_1,n}^{(1)}-\gamma)=\frac{3}{1400} \tag{16}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^8(Y_{t_2,n}^{(2)}-\gamma)=-\frac{41}{16000} \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^8 (Y_{t_3,n}^{(3)} - \gamma) = \frac{694052327}{7227872870400} \tag{18}$$

证明 考虑式(13)—(15),定义

$$c_s(t) = \lim_{n\to\infty} n^{2(s+1)} (Y_{t,n}^{(s)} - \gamma),$$

则:

$$c_1(t) = \frac{t}{1152} - \frac{7}{960}, c_2(t) = -\frac{t^2}{165888} + \frac{2071}{806400} \tag{19}$$

$$c_3(t) = -\frac{6125t^4 - 154350t^3 - 3922380t^2 + 440686008t - 2590043040}{3657830400(-42+5t)} \tag{20}$$

由式(19)知函数 $c_1(t)$ 在 **R** 上单调递增,于是方程 $c_1(t)=0$ 有唯一解:$t=42/5=t_1$。令 $t=t_1$,式(16)得证。类似地,令 $t=\pm 6\sqrt{14497}/35=t_2$,可证得式(17)。

四次方程式(20)有两个实数解:$t\approx 6.30$ 和 $t\approx -40.59$。为简单起见,取 $t=6$ 和 $t=-41$,此时有

$$|c_3(-41)| - |c_3(6)| = -\frac{46350803}{206510653440} < 0$$

选择 $t=-41=t_3$。式(18)得证。

推论 1 证毕。

根据推论 1 可以得到:当 s 分别取 1、2、3 时第二类序列收敛最快时 t 的取值分别为 $t_1=42/5$、$t_2=\pm 6\sqrt{14497}/35$、$t_3=-41$,相应序列的收敛速度分别为 n^{-6}、n^{-8}、n^{-8}。

2 新序列的逼近不等式与数值计算

2.1 逼近不等式

定理 3 对所有自然数 $n\geqslant 1$,

$$\frac{5509121}{1393459200(n+1)^8} < \gamma - y_n^{(3)} < \frac{5509121}{1393459200(n-1)^8} \tag{21}$$

对所有自然数 $n\geqslant 16$,

$$\frac{694052327}{7227872870400(n+1)^8} < Y_{-41,n}^{(3)} - \gamma < \frac{694052327}{7227872870400(n-1)^8} \tag{22}$$

证明 基于 DeTemple[5] 的证明思路,将序列 $(y_n^{(3)})_{n\geqslant 1}$ 与 γ 作差,得

$$\gamma - y_n^{(3)} = \sum_{k=n}^{\infty} (y_{k+1}^{(3)} - y_k^{(3)}) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \tag{23}$$

其中

$$f(k) = \frac{2}{2k+1} - \log 4(k+1) - \log\left(1 + \frac{1}{24(k+1)^2} - \frac{37}{5760(k+1)^4} + \frac{10313}{2903040(k+1)^6}\right) + \log 4k + \log\left(1 + \frac{1}{24k^2} - \frac{37}{5760k^4} + \frac{10313}{2903040k^6}\right)。$$

因此问题转化为对所有自然数 $k\geqslant n$,估计函数 $f(k)$ 的上下界。为此,利用关系

$$f(k) = -\int_k^{\infty} f'(x)\mathrm{d}x,$$

只需估计函数 $-f'(x)$ 的界。经计算得

$$-f'(x) - \frac{5509121}{19353600\left(x+\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)},$$

其中:

$$p_1(x) = 777032878707671040000(x-1)^{12} + \cdots + 736505380049195623157 0,$$

$$q_1(x)=18900x(x+1)(2x+1)^{10}(2903040x^6+120960x^4-18648x^2+10313)$$
$$(2903040x^6+17418240x^5+43666560x^4+58544640x^3+44252712x^2+17864784x+3015665)>0,$$

易知，对所有 $x\geqslant 1$，有 $p_1(x)>0$。于是有

$$-f'(x)\geqslant \frac{5509121}{19353600\left(x+\frac{1}{2}\right)^{10}} \tag{24}$$

类似地，令

$$-f'(x)-\frac{5509121}{19353600x^{10}}=\frac{t_1(x)}{s_1(x)},$$

其中：

$$t_1(x)=-928577906891292672000x^{14}-\cdots-171336710442735545,$$
$$s_1(x)=19353600(x+1)x^{10}(2x+1)^2(2903040x^6+120960x^4-18648x^2+10313)$$
$$(2903040x^6+17418240x^5+43666560x^4+58544640x^3+44252712x^2+17864784x+3015665)\geqslant 0。$$

易知，对所有 $x\geqslant 1$，有 $t_1(x)<0$。于是有

$$-f'(x)\leqslant \frac{5509121}{19353600x^{10}} \tag{25}$$

由式(24)—(25)，对所有整数 $k\geqslant 1$ 有

$$f(k)=-\int_k^{\infty}f'(x)\mathrm{d}x\geqslant \frac{5509121}{19353600}\int_k^{\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-10}\mathrm{d}x=\frac{5509121}{174182400}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-9}$$

且

$$f(k)=-\int_k^{\infty}f'(x)\mathrm{d}x\leqslant \frac{5509121}{19353600}\int_k^{\infty}x^{-10}\mathrm{d}x=\frac{5509121}{174182400}k^{-9}。$$

显然函数 $x^{-\alpha}(\alpha>0)$在$(1,+\infty)$上单调递减。于是由式(22)，对所有整数 $n\geqslant 1$ 有

$$\gamma-y_n^{(3)}\geqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{5509121}{174182400}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-9}\geqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{5509121}{174182400}\int_{k+1}^{k+2}k^{-9}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5509121}{174182400}\int_{n+1}^{\infty}k^{-9}\mathrm{d}x=\frac{5509121}{1393459200(n+1)^8},$$

且

$$\gamma-y_n^{(3)}\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{5509121}{174182400}k^{-9}\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{5509121}{174182400}\int_{k-1}^{k}k^{-9}\mathrm{d}x=\frac{5509121}{174182400}\int_{n-1}^{\infty}k^{-9}\mathrm{d}x=\frac{5509121}{1393459200(n-1)^8}。$$

式(21)得证。

将序列$(Y_{-41,n}^{(3)})_{n\geqslant 1}$ 与 γ 作差，得

$$Y_{-41,n}^{(3)}-\gamma=\sum_{k=n}^{\infty}(Y_{-41,k}^{(3)}-Y_{-41,k+1}^{(3)})=\sum_{k=1}^{\infty}g(k) \tag{26}$$

经简单计算得

$$-g'(x)-\frac{694052327}{100387123200\left(x+\frac{1}{2}\right)^{10}}=\frac{p_2(x)}{q_2(x)},$$

其中：

$$p_2(x)=935081270977099991102950548602880000x^{12}+\cdots+30191448212385052372941503282850 0,$$
$$q_2(x)=98034300x(x+1)(2x+1)^{10}(124488x^2+106157)$$
$$(29877120x^4+119508480x^3+153700320x^2+68383680x+13319099)$$
$$(124488x^2+248976x+230645)(29877120x^4-25562400x^2+9004379)>0。$$

易知,对所有 $x\geqslant 1$,有 $p_2(x)>0$。于是有

$$-g'(x)\geqslant\frac{694052327}{100387123200\left(x+\frac{1}{2}\right)^{10}} \tag{27}$$

类似地,令

$$-g'(x)-\frac{694052327}{100387123200x^{10}}=\frac{t_2(x)}{s_2(x)},$$

其中:

$$t_2(x)=-192023619942648289780587069702144000(x-16)^{14}-\cdots-$$
$$112567489088868948932487425172293910278394320784\,15,$$
$$s_2(x)=100387123200(x+1)x^{10}(2x+1)^2(124488x^2+106157)$$
$$(29877120x^4+119508480x^3+153700320x^2+68383680x+13319099)$$
$$(124488x^2+248976x+230645)(29877120x^4-25562400x^2+9004379)>0。$$

易知,对所有 $x\geqslant 16$,有 $t_2(x)<0$。于是有

$$-g'(x)\leqslant\frac{694052327}{100387123200x^{10}} \tag{28}$$

由式(27)—(28),对所有整数 $k\geqslant 16$ 有

$$g(k)=-\int_k^\infty g'(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{694052327}{100387123200}\int_k^\infty\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-10}\mathrm{d}x=\frac{694052327}{903484108800}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-9}$$

且

$$g(k)=-\int_k^\infty g'(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{694052327}{100387123200}\int_k^\infty x^{-10}\mathrm{d}x=\frac{694052327}{903484108800}k^{-9}。$$

同样由式(26),对所有整数 $n\geqslant 16$ 有

$$\begin{aligned}Y_{-41,n}^{(3)}-\gamma&\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{694052327}{903484108800}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-9}\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{694052327}{903484108800}\int_{k+1}^{k+2}k^{-9}\mathrm{d}x\\&=\frac{694052327}{903484108800}\int_{n+1}^{\infty}k^{-9}\mathrm{d}x=\frac{694052327}{100387123200(n+1)^8}\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}Y_{-41,n}^{(3)}-\gamma&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{694052327}{903484108800}k^{-9}\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{694052327}{903484108800}\int_{k-1}^{k}k^{-9}\mathrm{d}x\\&=\frac{694052327}{903484108800}\int_{n-1}^{\infty}k^{-9}\mathrm{d}x=\frac{694052327}{7227872870400(n-1)^8}。\end{aligned}$$

式(25)得证。

定理 3 证毕。

定理 3 证明了当 $s=3$ 时得到的两个序列的相关不等式,这两个序列可以用来逼近计算 Euler 常数。

2.2 数值计算

综合定理 1—定理 3 和推论 1,建立的几个新序列与其他序列逼近计算 Euler 常数的精度见表 1—表 2。从表 1—表 2 中可以看出,新序列能更快速地逼近计算 Euler 常数。

表 1 序列 $(R_n)_{n\geqslant1}$[5]、$(V_n)_{n\geqslant1}$[7]、$(\phi_n)_{n\geqslant1}$[12]和 $(y_n^{(3)})_{n\geqslant1}$ 的数值精度

n	$R_n-\gamma$	$\gamma-V_n$	$\gamma-\phi_n$	$\gamma-y_n^{(3)}$
10	3.7733×10^{-4}	8.3250×10^{-4}	2.6308×10^{-4}	3.8803×10^{-4}
50	1.6337×10^{-5}	3.3332×10^{-5}	9.3397×10^{-17}	1.0113×10^{-16}
100	4.1252×10^{-6}	8.3332×10^{-6}	3.7982×10^{-19}	3.9528×10^{-19}
1000	4.1625×10^{-8}	8.3333×10^{-8}	3.9378×10^{-27}	3.9535×10^{-27}

注:n 为计算序列的前 n 项的项数。

表 2　序列 $(w_{8,n}^{(2)})_{n\geqslant 1}$[17]、$(Y_{t2,n}^{(2)})_{n\geqslant 1}$、$(w_{18,n}^{(3)})_{n\geqslant 1}$[17]和 $(Y_{t3,n}^{(3)})_{n\geqslant 1}$ 的数值精度

n	$\gamma-w_{8,n}^{(2)}$	$\gamma-Y_{t2,n}^{(2)}$	$\gamma-w_{18,n}^{(3)}$	$Y_{t3,n}^{(3)}-\gamma$
10	1.7624×10^{-11}	2.4968×10^{-11}	3.7494×10^{-12}	1.5250×10^{-12}
50	3.0232×10^{-15}	6.5531×10^{-17}	7.9683×10^{-18}	2.5179×10^{-18}
100	4.8185×10^{-17}	2.5618×10^{-19}	3.0920×10^{-20}	9.6608×10^{-21}
1000	4.8498×10^{-23}	2.5625×10^{-27}	3.0854×10^{-28}	9.6030×10^{-29}

注:n 为计算序列的前 n 项的项数。

3　结　论

本文研究了收敛于 Euler 常数 γ 的序列的收敛速度和逼近不等式问题。通过修改调和数项和引入连分数项,并选择最优的参数,获得了两类收敛到 Euler 常数的新序列,进一步证明了这些序列最快的收敛速度可达到 n^{-8},最后建立了 Euler 常数的几个逼近不等式。数值计算表明,新建立的逼近序列相较于文献[7,17]中的序列有更快的收敛速度,从而改进了相关结论。所建立的新序列可以快速计算 Euler 常数以便更好地研究它的性质;由于 Euler 常数与特殊函数论中的 Gamma 函数和 Psi 有着密切的联系,本文对特殊函数领域的研究也有重要的意义。

本文主要基于引入只有奇数项的调和序列和包含连分数的对数项两部分建立了改进序列。通过改变调和数项的形式或将对数项内的连分数改为其他多项式,本文提出的序列可进一步扩展,从而得到收敛速度更快的收敛到 Euler 常数的序列。

参考文献:

[1] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables[M]. Washington: US Government Printing Office, 1964: 1046.

[2] Lagarias J C. Euler's constant: Euler's work and modern developments[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 2013, 50(4): 527-628.

[3] 马欠欠,王伟平. 三类含 r-Stirling 数的无穷级数[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版),2022,47(2):256-261.

[4] Young R M. Euler's constant[J]. The Mathematical Gazette, 1991, 75(472): 187-190.

[5] DeTemple D W. A quicker convergence to Euler's constant[J]. The American Mathematical Monthly, 1993, 100(5): 468-470.

[6] DeTemple D W. A geometric look at sequences that converge to Euler's constant[J]. The College Mathematics Journal, 2006, 37(2): 128-131.

[7] Mortici C, Vernescu A. Some new facts in discrete asymptotic analysis[J]. Mathematica Balkanica, 2007, 21(3/4): 301-308.

[8] Mortici C. On new sequences converging towards the Euler-Mascheroni constant[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(8): 2610-2614.

[9] Mortici C. Optimizing the rate of convergence in some new classes of sequences convergent to Euler's constant[J]. Analysis and Applications, 2010, 8(1): 99-107.

[10] Mortici C. On some Euler-Mascheroni type sequences[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60(7): 2009-2014.

[11] Chen C P, Mortici C. New sequence converging towards the Euler-Mascheroni constant[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64(4): 391-398.

[12] Batir N, Chen C P. Improving some sequences convergent to Euler-Mascheroni constant[J]. Proyecciones(Antofagasta), 2012, 31(1): 29-38.

[13] Chen C P, Mortici C. Limits and inequalities associated with the Euler-Mascheroni constant[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(18): 9755-9761.

[14] 陈超平. 关于 Landau 常数和 Euler-Mascheroni 常数的渐近展开式以及 Stirling 级数的系数[J]. 数学年刊(A 辑), 2021, 42(1): 89-104.

[15] Lu D W. Some quicker classes of sequences convergent to Euler's constant[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 172-177.

[16] Lu D W, Song L X, Yu Y. Some new continued fraction approximation of Euler's constant[J]. Journal of Number Theory, 2015, 147: 69-80.

[17] Lu D W, Song L X, Yu Y. Some quicker continued fraction approximations and inequalities towards Euler's constant[J]. Journal of Number Theory, 2017, 175: 100-116.

[18] Yang S. On an open problem of Chen and Mortici concerning the Euler-Mascheroni constant[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012，396(2)：689-693.
[19] Gavrea I，Ivan M. A solution to an open problem on the Euler-Mascheroni constant[J]. Applied Mathematics and Computation，2013，224：54-57.
[20] 裘松良，蔡传宇. Gamma 函数和 Psi 函数的单调性与凹凸性[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版)，2018，39(1)：108-112.
[21] 赵婉莹. 有关不完全 Gamma 函数的渐近展式及不等式[J]. 东北师大学报(自然科学版)，2019，51(3)：30-33.
[22] 杜培培，王根娣. Gamma 函数的单调性与凹凸性[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版)，2022，47(4)：608-614.

(责任编辑:康　锋)