



下卧基岩层状横观各向同性地基在移动荷载作用下的动力响应解

姜奇松¹, 张智卿², 刘开富¹

(1. 浙江理工大学建筑工程学院, 杭州 310018; 2. 温州理工学院建筑与能源工程学院, 浙江温州 325035)

摘要: 针对现有研究基于无限弹性半空间模型难以准确求解刚性基底地基的动力响应问题, 采用半解析方法研究下卧基岩层状横观各向同性地基受匀速移动荷载作用的动力响应。首先, 将移动荷载及由其引起的位移和应力展开为傅里叶级数形式, 并代入地基控制方程, 进而通过代数运算得到任意层地基响应的通解; 然后, 利用可靠和高效的对变量位置法, 建立位移和应力的传递矩阵; 最后, 结合系统顶部和底部的边界条件, 得到移动荷载作用下下卧基岩层状横观各向同性地基动力响应问题的半解析解。在此基础上, 根据所得解分析地基位移随介质各向异性、成层性和荷载移动速度等因素的变化规律。结果表明: 在实际工程中, 通过提高地基材料强度、表层地基杨氏模量和对行驶车辆做合理限速等方法可以减小地表沉降, 并要控制好影响地基材料各向异性的施工工艺, 而且在路面设计中应考虑夹层的影响。研究得到的解析解为路面工程研究提供了一种高效的分析手段, 同时可为实际工程的道路铺设提供一定的指导。

关键词: 移动荷载; 横观各向同性; 下卧基岩; 层状地基; 动力响应; 数值解析

中图分类号: TU470

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2025) 05-0341-11

引文格式: 姜奇松, 张智卿, 刘开富. 下卧基岩层状横观各向同性地基在移动荷载作用下的动力响应解[J]. 浙江理工大学学报(自然科学), 2025, 53(3): 341-351.

Reference Format: JIANG Qisong, ZHANG Zhiqing, LIU Kaifu. Solution to the dynamic response of the layered transversely isotropic subgrade resting on an overlying bedrock and subjected to a moving load[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University, 2025, 53(3): 341-351.

Solution to the dynamic response of the layered transversely isotropic subgrade resting on an overlying bedrock and subjected to a moving load

JIANG Qisong¹, ZHANG Zhiqing², LIU Kaifu¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China; 2. College of Architecture and Energy Engineering, Wenzhou University of Technology, Wenzhou 325035, China)

Abstract: Based on the fact that it is difficult for current studies to accurately solve the dynamic response problem of subgrades resting on a rigid base based on the infinite elastic half-space model, the dynamic response of layered transversely isotropic subgrade resting on an overlying bedrock and subjected to uniform moving loads was studied by means of the semi-analytical method. First, the moving load and the induced displacements and stresses were expressed as Fourier series which were then substituted into the governing equation of the subgrade, and the corresponding general solution was obtained via algebraic operation. Then, the transfer matrix of displacements and stresses was established by using the reliable and efficient dual-variable and position method. Finally, combined with the boundary conditions of the top

收稿日期: 2024-06-21 网络出版日期: 2024-11-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(52178367, 51878619, 52078465, 52478370); 浙江省公益技术应用研究项目(LGG22E080015)

作者简介: 姜奇松(1999—), 男, 辽宁营口人, 硕士研究生, 主要从事岩土工程方面的研究。

通信作者: 刘开富, E-mail: liukaifu@zstu.edu.cn

and bottom of the system, the semi-analytical solution of the dynamic response of the layered transversely isotropic subgrade resting on an overlaying bedrock and subjected to a moving load was obtained. On this basis, based on the obtained solution, the variations of medium anisotropy, stratification and load velocity on displacement were analyzed. The results show that the surface settlement can be reduced by improving the strength of foundation materials, increasing the Young's modulus of the surface foundation and setting reasonable speed limits for driving vehicles in practical engineering, that the construction technology which affects the anisotropy of the subgrade material should be controlled well and that the influence of interlayer should be considered in pavement design. The analytical solution obtained from the study provides an efficient analytical means for pavement engineering research and offers practical guidance for road construction in practical engineering.

Key words: moving load; transverse isotropy; overlaying bedrock; layered subgrade; dynamic response; numerical analysis

0 引 言

近年来,随着经济的发展,交通运输量显著增加。道路在车辆荷载高负荷和高频率使用条件下,很容易出现结构疲劳、路面损坏等问题^[1-2]。为了分析此类问题,需对移动荷载进行有效处理,因此关于移动荷载的动力响应问题越来越受到关注。目前,已有许多研究者使用各种方法对移动荷载进行了分析,取得了一系列成果。Beskou 等^[3-5]采用傅里叶级数展开法将移动荷载展开,并对表面移动条形荷载和矩形荷载作用下各向异性半平面上覆弹性薄板的动力响应问题进行了研究,验证了傅里叶级数展开法在处理这类复杂问题中的有效性。周凤玺等^[6]使用了移动坐标系法和傅里叶级数展开法处理移动荷载,并研究了移动荷载作用下二维非均匀地基的动力响应问题,拓展了该方法在非均匀介质中的应用。Ai 等^[7]使用移动坐标系法处理移动荷载,给出了三维横观各向同性多层介质在垂直或水平矩形动荷载作用下的一般解,这为三维复杂介质中的动荷载分析提供了理论依据。此外,处理移动荷载的常用方法还有积分变换法,其中:傅里叶变换法^[8-10]适用于理论分析和连续信号的频谱分析,但计算复杂度高、计算速度慢;而快速傅里叶变换法^[11]因其高效性在工程实践中更为常见。Zhang 等^[12]较成功地应用了离散卷积快速傅里叶变换法(Discrete convolution fast Fourier transform, DC-FFT)研究了埋置荷载作用下地基的动力响应问题,研究结果显示 DC-FFT 在空间-时间域中能有效地获得准确的结果。这些移动荷载的处理方法在处理不同类型的移动荷载问题中具有广泛的适用性和精确性,然而这些研究均考虑地基地部为无限弹性半空间,没有涉及下卧基岩这类刚性基底。

在实际工程中,土体通常为层状^[13],因此在地基动力响应研究中考虑地基为层状介质更符合实际情况。处理层状介质通常有以下几种方法:解析层元法^[14-15]、透射和反射矩阵法^[16-17]、传递矩阵法^[18]、刚度矩阵法^[19-20]、精确积分法^[21]、谱元法^[22]、对变量位置法(Dual-variable and position, DVP)^[23]。解析层元法通过力学方程求解移动荷载在每一层的动力响应,在层间界面处根据应力和位移的连续性条件,将相邻层的解耦合,最后通过叠加各层的解析解得到整个体系的响应;该方法在处理分层介质中的动力学问题时具有较高的精度,但计算复杂度较高。透射和反射矩阵法根据波动穿过每一层介质时的透射和反射矩阵,将每一层的透射和反射特性叠加起来,得到整个体系的波动响应,然后考虑各层的边界条件,得到波动在分层介质中的解;该方法在波动分析中具有较好的适用性,但在处理过厚或过薄的介质时数值稳定性较差。传递矩阵法将层状介质分解为若干子层,每个子层的输入与输出用矩阵表示,然后通过矩阵乘法将各子层连接起来,求解整个层状介质的响应;其在复杂介质中的层间耦合问题处理方面展现了优势,但在处理多层介质时计算效率低且易受累计误差的影响。刚度矩阵法首先通过基本方程计算每一层的刚度矩阵,然后按照层间接触方式将各层的刚度矩阵组装成整体结构的刚度矩阵,最后求解整体刚度方程,得到整个体系的位移和应力分布;该方法在处理线性弹性问题时具有广泛应用性,但在处理复杂边界条件时过程繁琐不够灵活。精确积分法采用数值积分精确求解常微分方程,通过分段积分的方法,将介质划分为若干小段,然后每段逐步积累得到精确解;该方法在连续介质问题中尤为有效,但计算效率较低。谱元法将介质划分为多个谱元,在每个谱元内使用高阶多项式来

逼近解,可以在较少的节点下获得高精度解,然后将每个谱元的局部刚度矩阵拼接成全局矩阵,以此求解全局方程;该方法尤其适用于复杂介质结构的动力响应分析,但极度依赖网格划分的精度。DVP 法将每一层介质中的动力方程表示为一个包含位置和动力响应的矩阵,然后通过代入每层介质的边界条件,将各层的传递矩阵连接起来,最终求解整个分层介质系统的响应;该方法在高效求解复杂分层介质中的动力学问题方面展现了独特优势。相比于上述多种方法,DVP 法具有较高的计算效率、良好的数值稳定性、更为灵活的边界条件处理能力,在多层介质系统中表现优异。因此,本文在处理层状系统问题时选择采用 DVP 法。

随着相关理论推导方法的发展,数值解析方法能够更为精确地纳入多种实际因素,如复杂的荷载条件和地层特性等,从而提升解的准确性。现有研究多集中在介质底部为无限弹性半空间方面,但在真实工程环境中,部分地基地部往往由具有一定刚性的下卧基岩构成,无法用简单的无限延展的弹性半空间模型来描述,因此基于无限弹性半空间的模型可能无法准确反映实际工况中的该类地基动力响应。针对这一局限性,本文研究针对下卧基岩这一特定边界条件构建了地基模型,研究移动荷载作用下下卧基岩层状横观各向同性地基的动力响应问题。对于移动荷载问题,采用傅里叶级数展开法的解析算法的运行速度远快于傅里叶变换法。传递矩阵是解决层状问题的核心;较可靠且高效的传递矩阵方法为 DVP 法,该方法相较于其他方法具有计算结果精确、处理边界条件灵活等优点,而且在计算时不需要额外增加矩阵的维度,可以对于同一层的动力响应实现直接传递。目前,DVP 法在静荷载问

题、时谐荷载问题和地基土之间相互作用问题中得到了成功的应用^[24-25]。因此,本文首先通过傅里叶级数展开移动荷载,推导得出任意层的通解;然后利用 DVP 法建立层状系统的递推关系,并结合边界条件求解,得到了移动荷载作用下下卧基岩层状横观各向同性地基动力响应问题的半解析解;最后,分析了地基的各向异性、成层性以及荷载速度等主要参数对垂直位移的影响,以期在实际工程的道路铺设提供一定的指导。

1 问题描述

假设一个条形均布荷载沿正 x 方向以速度 V 匀速移动,经过 t_1 时间后,荷载位置与初始位置的水平距离为 $2L$,其作用示意图如图 1 所示,其中:荷载密度为 F ,荷载宽度为 $2l$,介质波长为 $2L$,荷载移动时间为 t 。地基的层状系统如图 2 所示,地基共由 m 层层状体组成,总厚度为 H ,底部为刚性基底,层状体水平,任意层均为横观各向同性介质,且相邻层之间完全连续接触。设任意一研究点 f , f 在第 p 层, f 点所在的水平线将第 p 层分为上下 2 个子层 p_1 、 p_2 ,厚度分别为 h_{p1} 、 h_{p2} 。为了推导该问题的理论解,在图 2 中建立笛卡尔坐标系,其中:坐标原点 O 位于地基表面, z 轴正方向垂直向下。

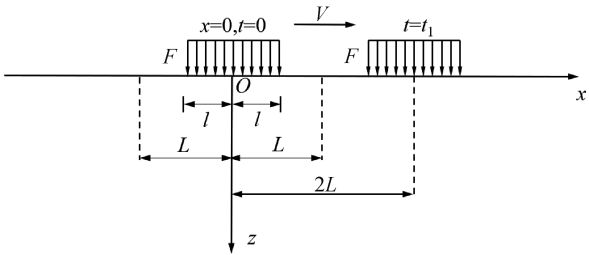


图 1 条形移动荷载作用示意图

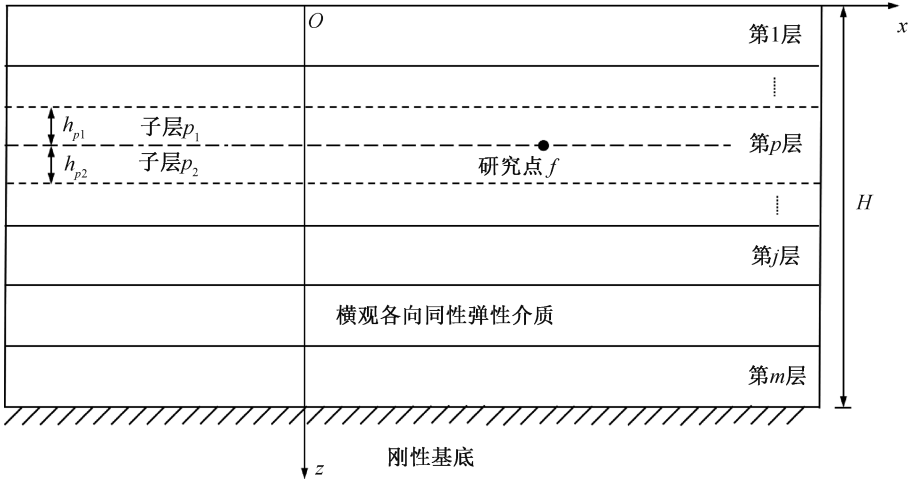


图 2 地基层状系统划分示意图

1.1 基本方程

平面应变条件下横观各向同性介质的运动方程可以表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

其中: σ_x 、 σ_{xz} 和 σ_z 分别表示任意点的应力分量; u_x 和 u_z 分别表示任意点水平位移和垂直位移; ρ 表示介质密度。

平面应变条件下横观各向同性介质的应力应变关系可以表示为

$$\begin{cases} \sigma_x = c_{11}\epsilon_{xx} + c_{13}\epsilon_{zz}, \\ \sigma_z = c_{13}\epsilon_{xx} + c_{33}\epsilon_{zz}, \\ \sigma_{xz} = c_{44}\epsilon_{xz} \end{cases} \quad (2)$$

其中: ϵ_{xx} 、 ϵ_{xz} 和 ϵ_{zz} 表示任意点的应变分量; c_{11} 、 c_{13} 、 c_{33} 和 c_{44} 为横观各向同性介质的弹性常数。在工程中,这些弹性常数通常可以由工程参数进一步表示为

$$\begin{cases} c_{11} = \frac{E_h[1 - (E_h/E_v)v_v^2]}{(1 + v_h)[1 - v_h - (2E_h/E_v)v_v^2]}, \\ c_{13} = \frac{E_h v_v}{1 - v_h - (2E_h/E_v)v_v^2}, \\ c_{33} = \frac{E_v(1 - v_h)}{1 - v_h - (2E_h/E_v)v_v^2}, \\ c_{44} = G_v \end{cases} \quad (3)$$

其中: E_h 和 E_v 分别表示水平杨氏模量和垂直杨氏模量; v_h 和 v_v 分别表示水平泊松比和垂直泊松比; G_v 表示垂直剪切模量。

横观各向同性介质的几何位移关系可以表示为

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \end{cases} \quad (4)$$

1.2 边界和连续条件

当地基表面仅受到垂直移动荷载的作用,顶部边界条件可以表示为

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(x, 0, t) = 0, \\ \sigma_z(x, 0, t) = -F(x, t) \end{cases} \quad (5)$$

设路基底部有下卧基岩,即底部为刚性基底。刚性基底表面的位移为0,则底部边界条件可以表示为

$$u_x(x, H, t) = u_z(x, H, t) = 0 \quad (6)$$

考虑到相邻两层之间完全连续接触,层间连续条件可以表示为

$$\begin{cases} u_x(x, z_{k+}) = u_x(x, z_{k-}), \\ u_z(x, z_{k+}) = u_z(x, z_{k-}), \\ \sigma_{xz}(x, z_{k+}) = \sigma_{xz}(x, z_{k-}), \\ \sigma_z(x, z_{k+}) = \sigma_z(x, z_{k-}) \end{cases} \quad (7)$$

2 问题求解

2.1 任意层的通解

根据 Theodorakopoulos^[26]的研究,可将移动荷载通过傅里叶级数展开为

$$F(x - Vt, t) = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i\lambda_n(x-Vt)} \quad (8)$$

其中:

$$\lambda_n = n\pi/L \quad (9)$$

$i = (-1)^{0.5}$; n 为整数; F_n 表示荷载作用的幅值; t 表示时间; λ_n 表示波数; L 表示半波长。

在移动荷载作用下,地基中产生的任意场量 $\varphi(x, z, t)$ 可以表示为

$$\varphi(x, z, t) = \text{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(z) e^{i\lambda_n(x-Vt)} \quad (10)$$

其中: $\Phi_n(x, z, t)$ 为仅与 z 相关的函数。考虑到指数函数 $e^{i\lambda_n(x-Vt)}$ 出现在每一项中,为表达简洁,该指数函数在推导过程中不再显示。

联立式(1)~(3),移动荷载作用下横观各向同性介质的控制方程可以写为

$$\begin{cases} c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + c_{44} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (11)$$

将式(10)代入式(11)中,可得

$$\begin{cases} \left(s_1 + s_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U_{xn} + s_3 \frac{\partial U_{zn}}{\partial z} = 0, \\ s_3 \frac{\partial U_{xn}}{\partial z} + \left(s_4 \frac{\partial^2 U_{zn}}{\partial z^2} + s_5\right) U_{zn} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中:

$$\begin{cases} s_1 = -c_{11}\lambda_n^2 + \rho\lambda_n^2 V^2, \\ s_2 = c_{44}, \\ s_3 = i\lambda_n(c_{13} + c_{44}), \\ s_4 = c_{33}, \\ s_5 = -c_{44}\lambda_n^2 + \rho\lambda_n^2 V^2 \end{cases} \quad (13)$$

联立式(12)并消除 U_{xn} ,可以得到以下方程:

$$s_2 s_4 \frac{\partial^4 U_{zn}}{\partial z^4} + (s_1 s_4 + s_2 s_5 - s_3^2) \frac{\partial^2 U_{zn}}{\partial z^2} + s_1 s_5 U_{zn} = 0 \quad (14)$$

其中: U_{zn} 解的形式可以假设为

$$U_{zn}=\bar{U}_{zn}e^{\gamma z} \tag{15}$$

根据式(12)可知, U_{zn} 解的形式需要满足 $U_{zn}=\bar{U}_{zn}e^{\gamma z}$ 。将式(15)代入式(14)中,可得

$$s_2s_4\gamma^4+(s_1s_4+s_2s_5-s_3^2)\gamma^2+s_1s_5=0 \tag{16}$$

式(16)有 4 个根,即 $\pm\gamma_1$ 和 $\pm\gamma_2$,且 γ_1 和 γ_2 可以表示为

$$\gamma_{1,2}=\frac{\left(-(s_1s_4+s_2s_5-s_3^2)\pm\sqrt{(s_1s_4+s_2s_5-s_3^2)^2-4s_1s_2s_4s_5}\right)^{0.5}}{2s_2s_4} \tag{17}$$

式(12)的通解进一步可以写为

$$\begin{cases} U_{xn}=\sum_{i=1}^2A_ie^{\gamma_iz}+\sum_{i=1}^2B_ie^{-\gamma_iz}, \\ U_{zn}=\sum_{i=1}^2C_ie^{\gamma_iz}+\sum_{i=1}^2D_ie^{-\gamma_iz} \end{cases} \tag{18}$$

将式(18)代入式(12)中,可得系数 A_i 、 B_i 、 C_i 和 D_i 之间的关系为

$$\begin{cases} C_i=\delta_iA_i,i=1,2; \\ D_i=-\delta_iB_i,i=1,2 \end{cases} \tag{19}$$

其中:

$$\delta_i=-\frac{s_3\gamma_i}{s_4\gamma_i^2+s_5} \tag{20}$$

因此,移动荷载作用下横观各向同性介质位移和应力的通解可以表示为:

$$\begin{cases} u_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^2A_ie^{\gamma_iz}+\sum_{i=1}^2B_ie^{-\gamma_iz}\right)e^{i\lambda_n(x-Vt)}, \\ u_z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^2A_i\delta_ie^{\gamma_iz}-\sum_{i=1}^2B_i\delta_ie^{-\gamma_iz}\right)e^{i\lambda_n(x-Vt)} \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^2(\gamma_i+\delta_i i\lambda_n)c_{44}A_ie^{\gamma_iz}-\sum_{i=1}^2(\gamma_i+\delta_i i\lambda_n)c_{44}B_ie^{-\gamma_iz}\right]e^{i\lambda_n(x-Vt)}, \\ \sigma_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^2(c_{11}i\lambda_n+c_{13}\delta_i\gamma_i)A_ie^{\gamma_iz}+\sum_{i=1}^2(c_{11}i\lambda_n+c_{13}\delta_i\gamma_i)B_ie^{-\gamma_iz}\right]e^{i\lambda_n(x-Vt)}, \\ \sigma_z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^2(c_{13}i\lambda_n+c_{33}\delta_i\gamma_i)A_ie^{\gamma_iz}+\sum_{i=1}^2(c_{13}i\lambda_n+c_{33}\delta_i\gamma_i)B_ie^{-\gamma_iz}\right]e^{i\lambda_n(x-Vt)} \end{cases} \tag{22}$$

2.2 DVP 传递矩阵

为解决层状系统问题,需根据 DVP 方法构建相应的传递矩阵。为简化表达,在接下来的公式推导中均略去 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\)e^{i\lambda_n(x-Vt)}$ 项。根据式(21)和式(22),任意层场量可以构造成以下矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(z) \\ \boldsymbol{T}(z) \end{bmatrix}=\left[\boldsymbol{M}\right]<\boldsymbol{e}(z)>\boldsymbol{K} \tag{23}$$

其中:矩阵 $[\boldsymbol{M}]$ 的元素详见附录 A; \boldsymbol{K} 为由边界条件确定的未知向量,且

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}(z)\equiv[u_x,u_z]^T, \\ \boldsymbol{T}(z)\equiv[\sigma_{xz},\sigma_{zz}]^T, \\ <\boldsymbol{e}(z)>=\text{diag}[e^{\gamma_1z},e^{\gamma_2z},e^{-\gamma_1z},e^{-\gamma_2z}] \end{cases} \tag{24}$$

对于第 j 层地基,为了矩阵计算的精度需要保证指数项实部为负值,因此式(24)可以重写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(z) \\ \boldsymbol{T}(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} <\boldsymbol{e}_{12}(z-z_j)> & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & <\boldsymbol{e}_{34}(z-z_{j-1})> \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

其中: z_j 和 z_{j-1} 分别表示第 j 层底部的深度和第 $(j-1)$ 层底部的深度,且

$$\begin{cases} <\boldsymbol{e}_{12}(z)>=\text{diag}[e^{\gamma_1z},e^{\gamma_2z}], \\ <\boldsymbol{e}_{34}(z)>=\text{diag}[e^{-\gamma_1z},e^{-\gamma_2z}] \end{cases} \tag{26}$$

根据 DVP 方法, j 层上下界面的传递矩阵可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(z_{j-1}) \\ \boldsymbol{T}(z_j) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{11}^j & \boldsymbol{S}_{12}^j \\ \boldsymbol{S}_{21}^j & \boldsymbol{S}_{22}^j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(z_j) \\ \boldsymbol{T}(z_{j-1}) \end{bmatrix} \tag{27}$$

其中:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{11}^j & \boldsymbol{S}_{12}^j \\ \boldsymbol{S}_{21}^j & \boldsymbol{S}_{22}^j \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11}<\boldsymbol{e}_{12}(-h_j)> & \boldsymbol{M}_{12} \\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22}<\boldsymbol{e}_{34}(h_j)> \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}<\boldsymbol{e}_{34}(h_j)>^{-1} \\ \boldsymbol{M}_{21}<\boldsymbol{e}_{12}(-h_j)> & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \tag{28}$$

根据式(27),层间传递矩阵可以进一步写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(z_{j-1}) \\ \boldsymbol{T}(z_{j+1}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{11}^{j,j+1} & \boldsymbol{S}_{12}^{j,j+1} \\ \boldsymbol{S}_{21}^{j,j+1} & \boldsymbol{S}_{22}^{j,j+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(z_{j+1}) \\ \boldsymbol{T}(z_{j-1}) \end{bmatrix} \tag{29}$$

其中: j 层向 $(j+1)$ 层的传递矩阵 $[\boldsymbol{S}^{j,j+1}]$ 的表达式详见附录 B。利用式(29)的递推关系

和系统的边界条件,即可得到边值问题的半解析解。

根据边界条件式(5)–(6),可以得到

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}(z_0)=[0,F_n]^T, \\ \boldsymbol{U}(z_m)=\boldsymbol{0} \end{cases} \tag{30}$$

采用以上的传递方法,最终可以得到以下整体矩阵:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}(z_0) \\ \boldsymbol{U}(z_p) \\ \boldsymbol{T}(z_p) \\ \boldsymbol{T}(z_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}_{11}^{1:p_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}_{21}^{1:p_1} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}_{12}^{p_2:m} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{S}_{22}^{p_2:m} & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{S}_{12}^{1:p_1}] \boldsymbol{T}(z_0) \\ -[\boldsymbol{S}_{22}^{1:p_1}] \boldsymbol{T}(z_0) \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{31}$$

此矩阵即为该问题的解。

表 1 在不同截断数 N 的情况下,介质在不同荷载速度 V 下的表面垂直位移 u_z

$V/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$u_z\times 10^{-3}/\text{m}$					
	$N=256$	$N=512$	$N=1024$	$N=2048$	$N=4096$	$N=8192$
10	1.6411	1.6254	1.6268	1.6253	1.6256	1.6256
20	1.6467	1.6309	1.6322	1.6308	1.6309	1.6309
40	1.6692	1.6532	1.6546	1.6531	1.6534	1.6534
60	1.7091	1.6926	1.6941	1.6925	1.6928	1.6928

为了提高计算效率,联立正的 n 值和负的 n 值,移动荷载傅里叶级数可以进一步展开为

$$F_n = \begin{cases} Fl/L, & n=0; \\ (2/n\pi)\sin(n\pi l/L)F, & n>0 \end{cases} \tag{32}$$

于是式(10)可以进一步表示为

$$\varphi(x,z,t)=\text{Re}\sum_0^N\Phi_n(z)\text{e}^{\text{i}\lambda_n(x-Vt)} \tag{33}$$

当 $n=0$ 时,存在 $\lambda_n=0$,式(12)出现若干等于 0 的系数,无法直接采用本文的方法得到相应解。因此,采用 $\lambda_n=10^{-6}$ 进行相应的计算,该取值也可以保证计算精度。值得注意的是,当 $\lambda_n=0$ 时,也可以采用以下方法,即对式(12)进行简单的代数运算,进而得到精确表达式: $U_{z0}(z)=F_n(H-z)/c_{33}$ 。

3.2 本文解的验证

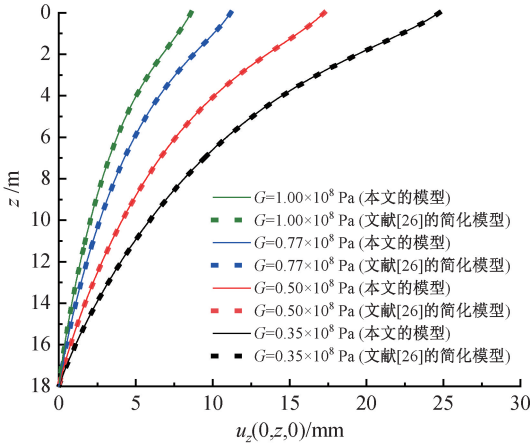
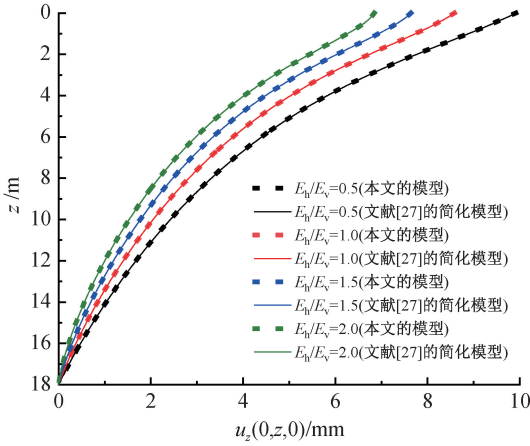
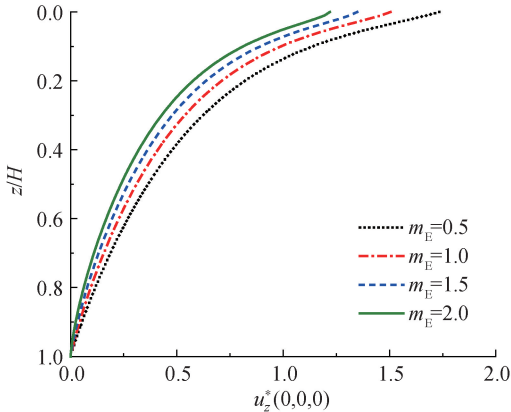
为了验证本文解的可靠性与准确性,先将退化为各向同性介质的本文解与 Theodorakopoulos^[26]的解进行比较。为了实现同条件下对比,特将 Theodorakopoulos^[26]的解退化为单相介质,即将孔

3 数值分析与讨论

3.1 解的收敛性

根据 Theodorakopoulos^[26]的研究,傅里叶级数展开法的运行速度远快于傅里叶变换法;傅里叶级数展开对应的波长 $2L$ 需要足够大,即 $L>100l$ 。此外,移动荷载在波长 $2L$ 内离散为 $2N+1$ 个等间隔点,每段间隔 δ_x 与荷载宽度 $2l$ 相比足够小。当级数被有限的极限 N 截断时,本文解的收敛性问题需要验证。假设介质为各向同性,计算基本参数如下:剪切模量 $G=10^8$ Pa,泊松比 $\nu=0.35$,阻尼比 $\zeta=0.05$,介质密度 $\rho=1816$ kg/m³,荷载大小 $F=4\times 10^5$ Pa,半波长 $L=40$ m,荷载半宽 $l=0.2$ m,深度 $H=18$ m。根据参数得出了介质在不同截断数 N 的情况下,介质在不同荷载速度 V 下的表面中心垂直位移 u_z 的具体数值,如表 1 所示。从表 1 可以看出,当 N 大于等于 2048 时,介质表面垂直位移的小数点后 3 位的数字已经相同。因此,在后续计算中,取 $N=2048$ (即 $\delta_x=0.0195$ m)。

隙弹性介质模型中的流体密度、孔隙率等取为 0.001,该取值既能保证多孔弹性介质解的结构模型完整,又能在极大程度上消除孔隙效应,从而使运算结果逼近单相介质解。其余介质参数及荷载参数如下:剪切模量 $G=0.35\times 10^8\sim 1.00\times 10^8$ Pa,泊松比 $\nu=0.35$,阻尼比 $\zeta=0.05$,土颗粒密度 $\rho_s=1816$ kg/m³,半波长 $L=204.8$ m,荷载半宽 $l=2$ m,深度 $H=18$ m,荷载移动速度 $V=20$ m/s。代入这些参数并将本文解的计算结果与 Theodorakopoulos^[26]的解对比,结果如图 3 所示。由图 3 可知,本文退化后的计算结果与 Theodorakopoulos^[26]的解一致。将 Liu 等^[27]的解退化成横观各向同性单相介质解,并在上述介质参数及荷载参数的基础上令剪切模量 $G=10^8$ Pa,垂直杨氏模量 $E_v=2.7\times 10^8$ Pa。代入参数后将本文解的计算结果与 Liu 等^[27]的解对比,结果如图 4 所示。由图 4 可知,本文的计算结果与 Liu 等^[27]的解一致。因此本文解的可靠性与准确性得到了验证。

图 3 均匀各向同性单相介质中垂直位移沿 z 方向的分布图图 4 层状横观各向同性单相介质中垂直位移沿 z 方向的分布图(a) 垂直位移沿 z 方向的分布曲线

3.3 参数分析

根据求得的半解析解,将介质的各向异性、成层性以及荷载移动速度对地基竖向位移分布的影响进行分析。为方便起见,各向异性模量比定义为 $m_E = E_h/E_v$ 和 $m_G = G_v/E_v$ 。后续分析中如无特别说明,基本计算参数均取为:垂直杨氏模量 $E_v = 5.4 \times 10^8$ Pa,泊松比 $\nu = 0.35$,垂直剪切模量 $G_v = 2 \times 10^8$ Pa,介质密度 $\rho = 2100$ kg/m³,荷载大小 $F = 4 \times 10^5$ Pa,介质总厚度 $H = 5$ m,荷载半宽 $l = 0.2$ m,半波长 $L = 40$ m,荷载移动速度 $V = 20$ m/s。鉴于弹性介质存在弱阻尼作用,波在介质中传播会出现黏性损耗的现象。为了更真实地反映介质在移动荷载作用下的行为,引入频率无关的滞回阻尼,以反映弱阻尼作用;弹性常数 c_{ij} 进一步修正为 $c_{ij}(1 + 2\beta i)$,其中 β 取为 0.005。为了分析方便,引入归一化的位移 $u_z^* = G_0 u_z / (Fl)$,其中 $G_0 = 2 \times 10^8$ Pa。

3.3.1 各向异性模量比的影响

图 5 给出了各向异性模量比 m_E 对移动荷载作用下垂直位移沿 z 和 x 方向分布的影响。从图 5(a)可看出,垂直位移随 m_E 的增大而减小,并且随着深度增加, m_E 对垂直位移的影响逐渐减弱;从图 5(b)可看出,近场的垂直位移随着 m_E 的增大而显著减小,并且随着与加载区域距离的增加, m_E 对垂直位移的影响逐渐减弱。

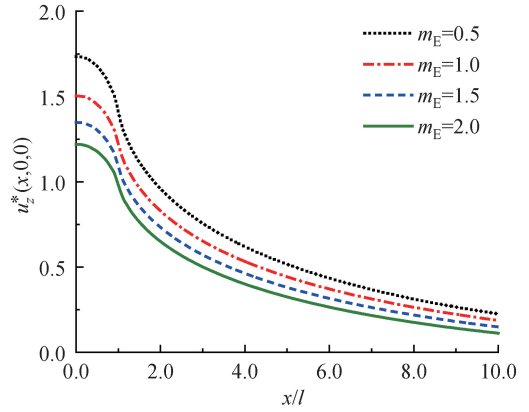
(b) 垂直位移沿 x 方向的分布曲线图 5 在不同各向异性模量比 m_E 的影响下垂直位移沿 z 和 x 方向的分布曲线

图 6 给出了各向异性模量比 m_G 对移动荷载作用下垂直位移沿 z 和 x 方向分布的影响。从图 6(a)可看出,在一定深度范围内,垂直位移随 m_G 的增大而减小。因此,实际工程中,可合理提高铺设路面所用材料的硬度,从而增强路面的结构强度。从图 6(b)可看出,在距加载区域较近的位置,近场的

垂直位移随着 m_G 的增大而减小,而在距加载区域较远的位置, m_G 对近场垂直位移的影响不明显。

3.3.2 成层性影响

由于沉积环境的多样性,地基土体在深度上呈现出分层结构,因此分析介质成层性对动力特性的影响具有重要意义。为模拟工程中典型的分层结

构,分别绘制了双层和三层横观各向同性介质的成层性对垂直位移影响的曲线(见图 7、图 8)来研究软、硬夹层对动力响应的影响,其中:双层结构的层

厚为 $h_1=0.8\text{ m}$, $h_2=4.2\text{ m}$;三层结构的层厚为 $h_1=0.4\text{ m}$, $h_2=0.4\text{ m}$, $h_3=4.2\text{ m}$;各层各向异性模量比固定为 $m_E=0.8$, $m_G=0.37$ 。

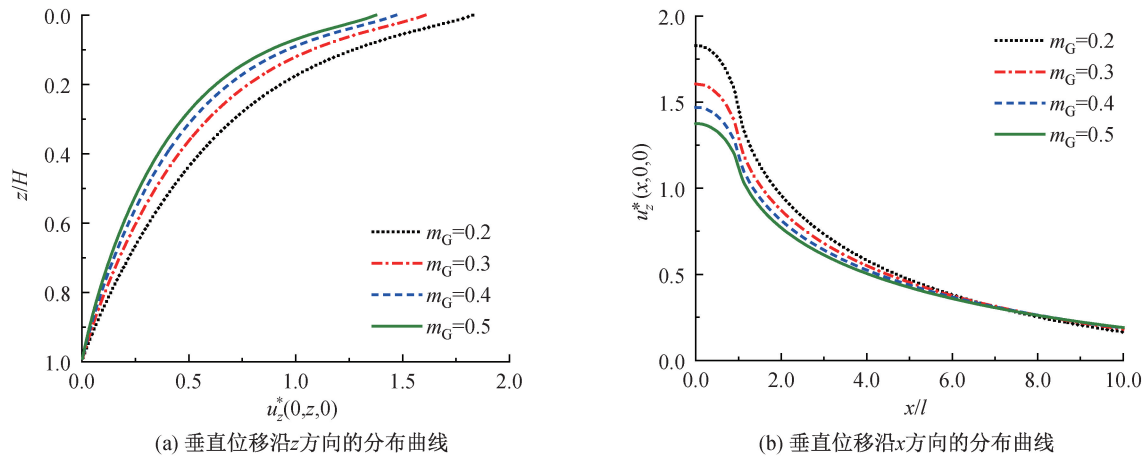


图 6 在不同各向异性模量比 m_G 影响下垂直位移沿 z 和 x 方向的分布曲线

图 7 给出了双层地基的成层性对移动荷载作用下垂直位移沿 z 和 x 方向分布的影响。从图 7 (a)可看出,介质的垂直位移随杨氏模量的增大而减小,且上层杨氏模量(E_{v1})对垂直位移影响较大。因此在实际工程中,提高表层地基杨氏模量

可以有效减小地表沉降。从图 7(b)可看出,在距加载区域较近的位置,垂直位移随着上层杨氏模量(E_{v1})的增大而显著减小;在距加载区域较远的位置,上层杨氏模量(E_{v1})对垂直位移的影响不明显。

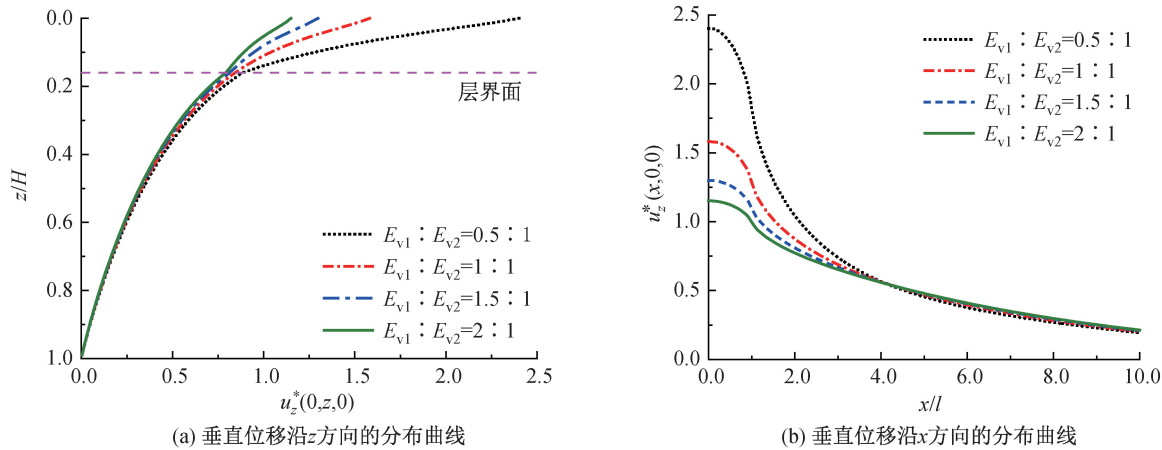


图 7 在不同杨氏模量比的影响下双层地基的垂直位移沿 z 和 x 方向的分布曲线

图 8 给出了三层地基的成层性对移动荷载作用下垂直位移沿 z 和 x 方向分布的影响。从图 8(a)可看出,地基的垂直位移随杨氏模量的增大而显著减小。杨氏模量对动力响应有着显著的影响,即使第 1、3 层的杨氏模量相同($E_{v1}=E_{v3}$),当第 2 层杨氏模量(E_{v2})发生变化时,地基的垂直位移也会表现出很大的差异。因此,在实际工程中应考虑夹层的影响,并据此优化设计。从图 8(b)可看出,在距加载区域较近的位置,垂直位移随着第 2 层杨氏模量(E_{v2})的增大而显著减小;在距加载区域较远的位置,第 2 层杨氏模量(E_{v2})对垂直位移的影响不

明显。

3.3.3 荷载速度影响

图 9 给出了 $m_E=0.5$ 时地基上的荷载速度对移动荷载作用下垂直位移沿 z 和 x 方向分布的影响。从图 9(a)可看出,在一定深度范围内,垂直位移随着荷载速度的增大而增大。因此,实际工程中应对车辆行驶速度做出合理限制,避免对路面造成损伤。从图 9(b)可看出,在距加载区域较近的位置,垂直位移随着荷载速度的增大而增大,而在距加载区域较远的位置,速度对垂直位移的影响不明显。

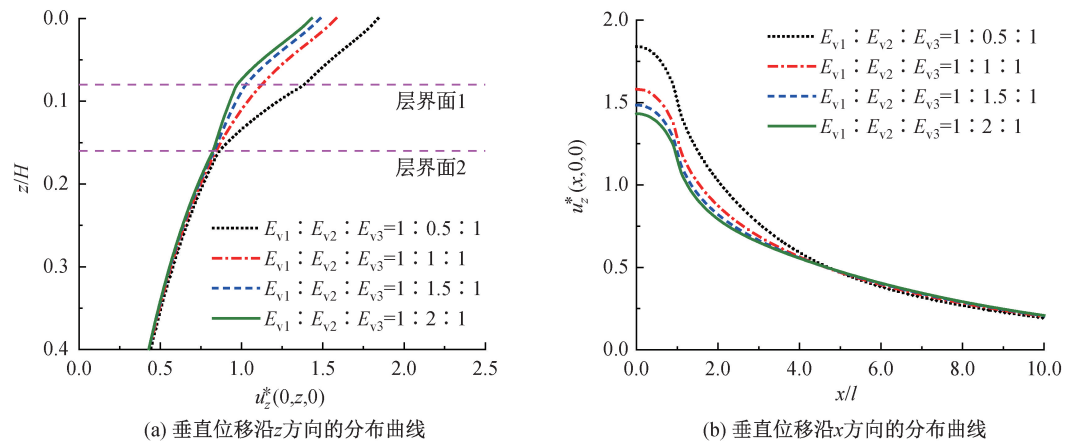


图 8 在不同杨氏模量比的影响下三层地基的垂直位移沿 z 和 x 方向的分布曲线

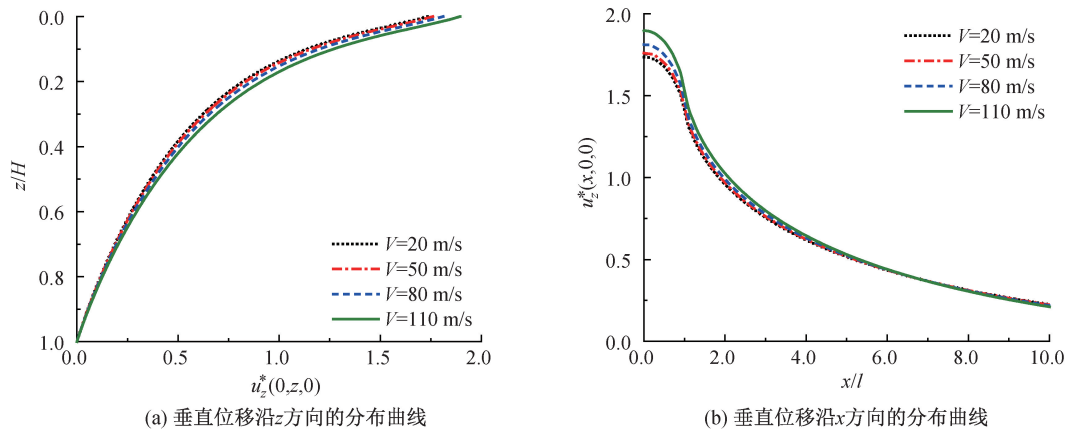


图 9 在不同荷载速度 V 影响下垂直位移沿 z 和 x 方向的分布曲线

3.3.4 时程曲线

图 10 给出了荷载速度 $V=20\text{ m/s}$ 时不同各向异性模比下垂直位移随时间的变化情况。从图 10 可以看出,在观测点 $x=3\text{ m}$ 处($z=0$),垂直位移在 $t=0.15\text{ s}$ 处几乎对称,且在 $t=0.15\text{ s}$ 处出现峰值。

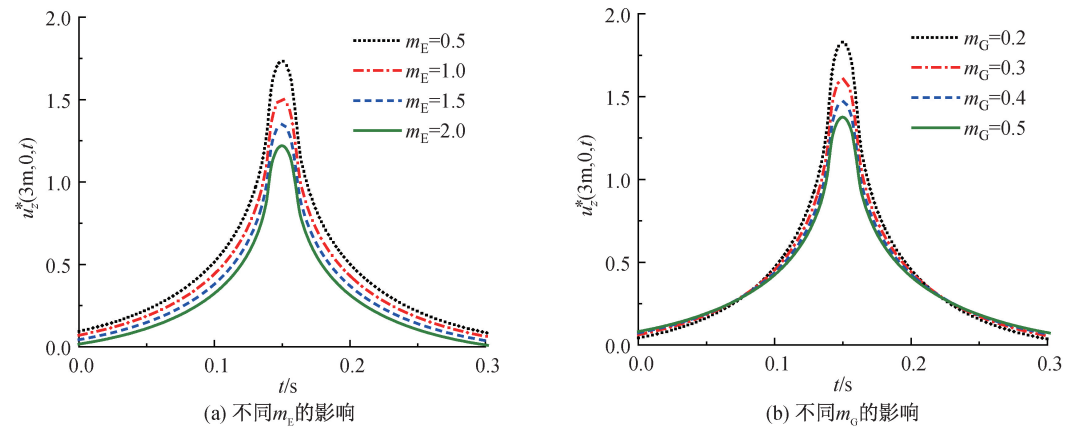


图 10 在不同各向异性模量比影响下观测点垂直位移随时间变化的分布曲线

4 结 论

本文针对现有研究多基于无限弹性半空间模型而难以准确求解刚性基地基的动力响应问题,通过

各向异性模量比对垂直位移的时程影响显著,位移峰值随各向异性模比 m_E 的增大而减小。在接近 0.15 s 的时间段内,位移峰值随各向异性模比 m_G 的增大而减小,而在此时间段之外,位移峰值受各向异性模比 m_G 的影响不明显。

傅里叶级数展开法和 DVP 法,得到了移动荷载作用下下卧基岩层状横观各向同性地基动力响应问题的半解析解,并通过与现有解的对比,验证了本文解的可靠性和准确性,在此基础上分析了材料各向异

性、材料成层性和荷载速度对动力响应的影响,所得主要结论如下:

a)材料各向异性对垂直位移的垂直分布和水平分布均有显著影响。垂直分布和水平分布的垂直位移均随 m_E 或 m_G 的增大而显著减小,但与加载区域距离较远时,水平分布的垂直位移受 m_G 的影响不明显。实际工程中,合理提高铺设路面所用材料的硬度能够增强路面的结构强度。

b)材料成层性对动力响应有显著影响,层状结构的动力行为与单层结构有显著差异。垂直分布和水平分布的垂直位移随 E_{v1} 或 E_{v2} 的增大而减小,但与加载区域距离较远时,水平分布的垂直位移受杨氏模量的影响不明显。因此,实际工程中可合理提高表层地基杨氏模量以减小地表沉降,而且在路面设计中还应考虑夹层的影响。

c)荷载速度对垂直位移的垂直分布有显著影响。垂直分布和水平分布的垂直位移随荷载速度的增大而增大,但与加载区域距离较远时,水平分布的垂直位移受荷载速度的影响不明显。因此,实际工程中应对车辆行驶速度作出一定限制,避免对路面造成损伤。

d)各向异性模量比对垂直位移的时程有显著影响。对于给定深度水平位置的垂直位移的时程,它们在时域上相对于给定时间几乎是对称的。位移峰值随 m_E 的增大而减小。在曲线的对称轴附近,位移峰值随 m_G 的增大而减小,远离对称轴处 m_G 对位移影响不明显。

本文所得解析解为路面工程的分析提供了一种高效的方法,同时对实际工程中的道路铺设具有一定的指导意义。然而,本文究仅对二维介质进行了分析,未考虑三维介质的影响,相关内容有待后续研究。

参考文献:

- [1] 王震强,李奎奎,汪过兵.摩擦效应影响下矩形移动荷载作用对地面的动力响应分析[J/OL].力学与实践;1-10.(2024-4-28)[2024-06-26].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2064.o3.20240428.1453.002.html>.
- [2] 钱劲松,陈正,欧阳韦,等.多层交通荷载下非对称一体化地下结构的动力响应[J].振动与冲击,2024,43(8):178-185.
- [3] Beskou N D, Chen Y, Qian J. Dynamic response of an elastic plate on a cross-anisotropic elastic half-plane to a load moving on its surface[J]. Transportation Geotechnics, 2018, 14: 98-106.
- [4] Beskou N D, Muho E V, Qian J. Dynamic analysis of an elastic plate on a cross-anisotropic elastic half-space under a rectangular moving load[J]. Acta Mechanica, 2020, 231(11): 4735-4759.

- [5] Beskou N D. Dynamic analysis of an elastic plate on a cross-anisotropic and continuously nonhomogeneous viscoelastic half-plane under a moving load[J]. Acta Mechanica, 2020, 231(4): 1567-1585.
- [6] 周凤玺,曹永春,赵王刚.移动荷载作用下非均匀地基的动力响应分析[J].岩土力学,2015,36(7):2027-2033.
- [7] Ai Z Y, Wang X M, Zhao Y Z. 3D dynamic analysis of layered transversely isotropic saturated media subjected to circular moving loads[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 95: 783-805.
- [8] 艾智勇,李博.横观各向同性层状地基平面应变问题的解析层元解[J].岩土工程学报,2012,34(10):1787-1791.
- [9] 钱建固,周仁义,黄茂松.高速移动荷载下弹性半空间饱和地基动力响应[J].工程力学,2016,33(3):39-46.
- [10] Fan H S, Zhang J H, Zheng J L. Dynamic response of a multi-layered pavement structure with subgrade modulus varying with depth subjected to a moving load[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2022, 160: 107358.
- [11] Yang W Y, Bai P P, Fang J B, et al. Contact responses of transversely isotropic layered material with imperfect interface[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 272: 109145.
- [12] Zhang Z Q, Liu S B, Pan E N, et al. Dynamic loading in a transversely isotropic and layered elastic half-space [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2023, 260: 108626.
- [13] Birkeland P W. Soils and Geomorphology[M]. New York: Oxford University Press, 1984: 48-132.
- [14] Yang S, Jia M C. Analytical layer-element solution for layered transversely isotropic saturated media subjected to rectangular moving loads[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2023, 171: 107877.
- [15] Ye Z, Ai Z Y. Dynamic analysis of multilayered unsaturated poroelastic media subjected to a vertical time-harmonic load[J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 90: 394-412.
- [16] Khojasteh A, Rahimian M, Eskandari M, et al. Three-dimensional dynamic Green's functions for a multilayered transversely isotropic half-space[J]. International Journal of Solids and Structures, 2011, 48(9): 1349-1361.
- [17] 马强,黄业禹,周凤玺,等.基于TRM法的移动荷载作用下层状非饱和土地基动力响应研究[J/OL].工程力学;1-11.(2023-04-12)[2024-06-26].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2595.O3.20230411.1654.002.html>.
- [18] Haskell N A. The dispersion of surface waves on multilayered media[M]//Ben-Menahem A. Vinct Veritas: A Portrait of the Life and Work of Norman Abraham Haskell, 1905-1970. Washington, D. C.: American Geophysical Union, 1990: 86-103.
- [19] 冯多,徐林荣,蔡雨,等.移动荷载作用下横观各向同性层状地基-薄板结构动力响应半解析研究[J].岩土工程学报,2021,43(5):858-866.
- [20] 马宪永,全蔚闻,董泽蛟.横观各向同性黏弹性沥青路面动力

响应解析解[J]. 中国公路学报, 2020, 33(10): 135-145.

[21] Ye Z, Ai Z Y. Poroelastodynamic response of layered unsaturated media in the vicinity of a moving harmonic load [J]. Computers and Geotechnics, 2021, 138: 104358.

[22] 王妍,林皋,李志远. 移动荷载下各向异性层状地基-柔性路面结构动力响应的半解析解[J]. 工程力学, 2023, 40(12): 1-12.

[23] Zhang Z Q, Pan E N, Zhou J C, et al. Indentation over a transversely isotropic, poroelastic, and layered half-space[J]. Applied Mathematical Modelling, 2024, 127: 588-606.

[24] Zhang Z Q, Pan E N. Time-harmonic response of transversely isotropic and layered poroelastic half-spaces under general buried loads[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 80: 426-453.

[25] Zhang Z Q, Pan E N. Coupled horizontal and rocking vibrations of a rigid circular disc on the surface of a transversely isotropic and layered poroelastic half-space [J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 114: 270-290.

[26] Theodorakopoulos D D. Dynamic analysis of a poroelastic half-plane soil medium under moving loads[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003, 23(7): 521-533.

[27] Liu K F, Zhang Z Q, Pan E N. Dynamic response of a transversely isotropic and multilayered poroelastic medium subjected to a moving load[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2022, 155: 107154.

附录 A 矩阵[*M*]的元素

4×4 的矩阵[*M*]可以表示为

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{A1}$$

它的子矩阵[*M*₁₁],[*M*₁₂],[*M*₂₁],[*M*₂₂]均为 2×2 的矩阵,具体如下:

$$[M_{11}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} \tag{A2}$$

$$[M_{12}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\delta_1 & -\delta_2 \end{bmatrix} \tag{A3}$$

$$[M_{21}] = \begin{bmatrix} (\gamma_1 + \delta_1 i \lambda_n) c_{44} & (\gamma_2 + \delta_2 i \lambda_n) c_{44} \\ (c_{13} i \lambda_n + c_{33} \delta_1 \gamma_1) & (c_{13} i \lambda_n + c_{33} \delta_2 \gamma_2) \end{bmatrix} \tag{A4}$$

$$[M_{22}] = \begin{bmatrix} -(\gamma_1 + \delta_1 i \lambda_n) c_{44} & -(\gamma_2 + \delta_2 i \lambda_n) c_{44} \\ (c_{13} i \lambda_n + c_{33} \delta_1 \gamma_1) & (c_{13} i \lambda_n + c_{33} \delta_2 \gamma_2) \end{bmatrix} \tag{A5}$$

附录 B 矩阵*S*的元素

矩阵中 *S*^{*j,j+1*} 的元素可以表示为

$$\begin{cases} [S_{11}^{j,j+1}] = [S_{11}^j S_{11}^{j+1}] + [S_{11}^j S_{12}^{j+1}] [I - S_{21}^j S_{12}^{j+1}] [S_{21}^j S_{11}^{j+1}], \\ [S_{12}^{j,j+1}] = [S_{12}^j] + [S_{11}^j S_{12}^{j+1}] [I - S_{21}^j S_{12}^{j+1}]^{-1} [S_{22}^j], \\ [S_{21}^{j,j+1}] = [S_{21}^{j+1}] + [S_{22}^{j+1}] [I - S_{21}^j S_{12}^{j+1}]^{-1} [S_{21}^j S_{11}^{j+1}], \\ [S_{22}^{j,j+1}] = [S_{22}^{j+1}] [I - S_{21}^j S_{12}^{j+1}]^{-1} [S_{22}^j] \end{cases} \tag{B1}$$

(责任编辑:康 锋)