



预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响

魏义敏,杨乐红,刘 辉

(浙江理工大学浙江省机电产品可靠性技术研究重点实验室,杭州 310018)

摘 要: 振动以弹性波的形式在电梯钢丝绳传播时,会受到钢丝绳中预应力的影响,并降低曳引系统中振动监测的准确性,通过有限元仿真和实验分析研究预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响。首先采用半解析有限元法,确定了激励频率的范围;其次,采用 ABAQUS 有限元软件模拟弹性波在无应力以及预应力下电梯钢丝绳中的传播过程,分析了不同应力情况下的弹性波传播特性;最后搭建电梯钢丝绳中弹性波信号采集系统,通过实验分析弹性波在含预应力的电梯钢丝绳中传播特性。结果表明:电梯钢丝绳中的弹性波受到预应力的影响,当预应力增大,弹性波通带范围减少,阻带范围增加。该结果说明了轿厢中振动信号与曳引系统中振源信号存在差异的原因,为提高曳引系统中振动监测的准确性提供有效依据。

关键词: 电梯钢丝绳;预应力;弹性波;传播特性;通带;阻带

中图分类号: TH113.2

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2023)07-0525-08

引文格式:魏义敏,杨乐红,刘辉. 预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2023,49(4):525-532.

Reference Format: WEI Yimin, YANG Lehong, LIU Hui. Effects of prestress on elastic wave propagation characteristics in the elevator wire rope[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University,2023,49(4):525-532.

Effects of prestress on elastic wave propagation characteristics in the elevator wire rope

WEI Yimin, YANG Lehong, LIU Hui

(Zhejiang Provincial Key Laboratory of Mechanical & Electrical Product Reliability Technology Research, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: When the vibration propagates in the form of elastic waves in the elevator wire rope, it will be affected by the prestress in the wire rope and reduce the accuracy of vibration monitoring in the traction system. In this study, the influence of prestress on elastic wave propagation in the elevator wire rope was studied by finite element simulation and experimental analysis. Firstly, the semi-analytical finite element method was introduced to determine the excitation frequency range. Secondly, ABAQUS software was used to simulate the elastic wave propagating process in the elevator wire rope under non-stress and prestress conditions, and the elastic wave propagation characteristics under different stress conditions were analyzed. Finally, an experiment system for elastic wave signal acquisition was set up to analyze the change of elastic wave propagation characteristics in the elevator wire rope with prestress. The results show that the elastic wave is affected by the prestress, and when the prestress increases, the elastic wave passband range decreases and the stopband range increases. The result indicates the reason of the difference between the vibration signal in the car and the vibration source signal in the traction system, and provides effective reference for improving the accuracy of the vibration monitoring in the traction system of an elevator.

Key words: elevator wire rope; prestress; elastic wave; propagation characteristics; passband; stopband

收稿日期: 2022-12-27 网络出版日期:2023-05-05

基金项目: 国家自然科学基金项目(52075496,51975535)

作者简介: 魏义敏(1986—),男,湖南常德人,副教授,博士,主要从事机械系统动力学及机电产品故障预测、健康管理方面的研究。

0 引言

电梯曳引系统在长期、高频等使用条件下,会出现曳引电机轴承损坏、钢丝绳及曳引轮槽过度磨损等故障,而各故障引发的异常振动会通过电梯钢丝绳传播到轿厢。因此,通常只需要对轿厢的振动信号进行分析处理,便可以确定振动的真实来源,从而达到对曳引系统振动监测的目的。然而,当曳引系统同时存在多个振源时,直接通过轿厢的振动信号来判断振动的真实来源效果不佳。这主要是因为振动在振源处被激发后,会以弹性波的形式通过含有预应力的电梯钢丝绳,而弹性波受预应力的影响发生变化,因而在轿厢内测得的振动信号与振源的真实信号存在差异,导致通过用轿厢振动信号的幅值来监测曳引系统的振动存在一定的误差^[1]。因此,为了提高电梯曳引系统中振动监测的准确性,需要研究预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响。

钢丝绳作为索类结构不仅运用于曳引电梯,还用于土木、桥梁以及航空等领域。国内外学者对钢丝绳中弹性波的传播特性进行了一些研究,研究方法主要有以下2种:a)通过有限元理论构建钢丝绳中弹性波传播的波动模型,并对波动模型进行数值求解,研究弹性波在钢丝绳中传播时的频散特性,为钢丝绳中缺陷的检测与识别提供理论基础^[2-5]。如Treysède等^[6-9]采用半解析有限元法(Semi-analytical finite element method, SAFE)以及周期有限元法研究钢绞线、电缆等7芯钢丝绳结构中弹性波的频散特性,但是这些方法需要大量计算实现。b)采用有限元软件模拟弹性波在钢丝绳中的传播^[10]或设计弹性波采集实验^[11-12],对两者获取的弹性波信号进行时频分析以研究弹性波传播特性。如Bartoli等^[13]对加载和不加载的钢绞线中弹性波传播进行有限元仿真,对有限元计算得到的弹性波信号进行二维傅里叶变换,得到弹性波的频散特性;该研究表明,与不加载的钢绞线相比,加载的钢绞线由于内部的接触出现了新的波模态。Farhidzadeh等^[14]设计了一种实验装置,在钢绞线中发射超声导波,得到钢绞线中的弹性波频散曲线,并通过小波变换分析弹性波传播特性,以实现钢绞线的健康监测。Liu等^[15]采用超声导波技术,通过短时傅里叶变换研究拉伸载荷对钢丝绳中弹性波传播特性的影响,结果发现拉伸载荷会导致钢丝绳中弹性波能量衰减。李春雷等^[16]采用有限元方法研究螺旋曲杆

中弹性波的传播特性,运用坐标转换和二维快速傅里叶变换对弹性波信号进行处理,分析螺旋杆直径和角度变换对弹性波频散特性的影响。目前,对钢丝绳中弹性波频散特性的研究已经取得了许多成果,但有关钢丝绳中弹性波通带与阻带的范围以及预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响未见报道。

为了研究预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响,本文通过半解析有限元法研究钢丝绳中弹性波的传播特性,为ABAQUS有限元软件模拟无应力以及预应力下电梯钢丝绳中弹性波的传播提供激励频率范围,并对有限元模型中单一节点的弹性波信号进行时频分析,获得不同应力情况下弹性波通带与阻带的范围;在此基础上搭建电梯钢丝绳中弹性波信号采集系统,通过实验研究轿厢与对重块连接产生的预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响。

1 电梯钢丝绳中弹性波传播特性有限元仿真分析

本文采用半解析有限元法求解钢丝绳中弹性波的传播特性,确定电梯钢丝绳中弹性波的激励频率范围。采用ABAQUS有限元软件对无应力以及不同预应力下电梯钢丝绳中弹性波传播过程进行仿真分析,并对不同应力情况下有限元模型中节点弹性波信号进行时频分析,对比分析预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响。

1.1 钢丝绳中弹性波传播特性的数值求解

由于钢丝绳的结构复杂,使用解析法无法得到弹性波的传播特性。目前对钢丝绳中弹性波的传播特性研究主要采用半解析有限元法,其研究思路为:使用有限元单元对钢丝绳的截面进行离散化,并用简谐波函数的解析形式来表示弹性波在钢丝绳中传播的位移,再将位移代入基于虚功原理的弹性波运动方程,通过有限元计算可以得到钢丝绳中弹性波的频散方程^[7-8]。该频散方程可由式(1)表示:

$$|\mathbf{K}_1 + ik(\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2^T) + k^2\mathbf{K}_3 - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \quad (1)$$

其中: \mathbf{K}_1 、 \mathbf{K}_2 、 \mathbf{K}_3 为刚度矩阵; \mathbf{M} 为质量矩阵; k 为波数, m^{-1} ; ω 为圆频率, rad/s , i 为虚数单位。通过对式(1)进行数值求解得到波数与角频率的频散曲线,计算得到的波数为复数值,实部表示波的相位改变,虚部表示波的传播衰减系数。

根据文献^[7]求得的实波数频散曲线图与虚波数频散曲线图,实波数在0~20000 Hz频段范围内

都不为0,虚波数在该频段范围内为0;这表明钢丝绳中的弹性波能在0~20000 Hz频段内向前传播。因此,可以确定在有限元软件中模拟无应力以及预应力下电梯钢丝绳中弹性波传播的激励频率范围为0~20000 Hz。本文采用ABAQUS有限元软件对无应力以及预应力下电梯钢丝绳中弹性波传播进行模拟。

1.2 电梯钢丝绳在无应力下的有限元模型构建

在进行有限元仿真时,电梯钢丝绳的半径为4 mm,长度为2000 mm,电梯钢丝绳的主要性能参数见表1。

表1 电梯钢丝绳主要性能参数

参数	数值
电梯钢丝绳材料密度/(kg·m ⁻³)	7800
电梯钢丝绳材料泊松比	0.29
电梯钢丝绳材料弹性模量/GPa	138

由表1中的数据可以计算出弹性波的纵波波速 c_L 和横波波速 c_s ^[16],可用式(2)和式(3)计算:

$$c_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} = 4.82 \times 10^3 \quad (2)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} = 2.62 \times 10^3 \quad (3)$$

其中: E 为弹性模量,GPa; ν 为泊松比; ρ 为密度,kg/m³。

在进行有限元网格划分时,网格尺寸的计算与积分时间步长对计算结果的准确性和可靠性起到决定性作用。网格尺寸越小计算结果越精确,但网格尺寸过小,相应积分时间步长会变小,计算成本便会急剧增加;网格尺寸过大,则积分时间步长会增加,计算时高频部分的精度会降低。因此在确定网格尺寸和积分时间步长时,需要综合考虑实际情况选择合适的参数,以确保计算精度符合要求。

Moser等^[17]发现,离散后的网格尺寸与最小波长相关;为了保证仿真结果的精确性,一个满足计算精度的网格尺寸应保证每个波长至少有20个节点。当网格划分较小时,确保计算稳定性需控制时间积分步长,弹性波通过最小单元的时间 Δt_{stable} 要大于等于积分时间步长 Δt ,即:

$$\Delta t_{\text{stable}} \geq \Delta t = L_{\text{min}}/c_L \quad (4)$$

其中: L_{min} 为最小单元尺寸,mm。

在较高频率成分中获得波动效应,需要较高精度的网格划分以及更短的时间积分步长。考虑到有限元的计算效率,网格尺寸 Δl 设为:

$$\Delta l \leq c_s/(20-1) \times f_{\text{max}} \quad (5)$$

其中: f_{max} 为最大激励频率,Hz。

本文选定的网格尺寸为0.06 mm,积分时间步长为 1×10^{-9} s,并选择六面体单元网格,C3D8R作为单元类型。无应力下电梯钢丝绳有限元模型如图1所示,其中:图1(a)为无应力下电梯钢丝绳有限元计算整体模型图,图1(b)是图1(a)对应的有限元计算模型局部网格划分示意图。

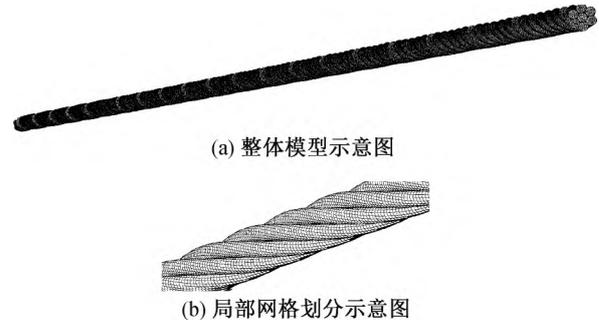


图1 无应力下电梯钢丝绳有限元模型示意图

通常,用单个或者一组脉冲信号作为弹性波的激励,能更容易地分析弹性波的传播特性^[18-19]。本文使用时间宽度为 0.1×10^{-3} s的脉冲信号激发弹性波,模拟其在无应力下电梯钢丝绳中的传播过程。有限元仿真采用的脉冲信号的时域图和频谱图如图2所示。从图2(b)可以得知,脉冲信号的能量集中在频率为0~20000 Hz的频带范围内,该范围包含了钢丝绳弹性波传播特性数值求解的频带范围。无应力下电梯钢丝绳有限元模型的一端为固定端,另一端为自由端。脉冲信号作用在无应力下电梯钢丝绳的固定端用来激励弹性波的产生,利用ABAQUS有限元软件可以计算得到无应力下电梯钢丝绳上任意一点的弹性波信号。

1.3 无应力下电梯钢丝绳有限元仿真结果分析

为了防止电梯钢丝绳中反射波信号对弹性波信号产生干扰,提取距离激发端1000 mm处节点的弹性波信号,该节点信号的时域图如图3(a)所示。仅从时域图无法获取弹性波的传播特性,需要对时域信号进行时频分析。本文采用短时傅里叶变换对该节点信号进行分析,得到能够描述信号的能量密度分布图,进而从能量分布的范围判断弹性波传播的通带及阻带。弹性波在通带范围内能够在介质中向前传播,阻带范围内不能在介质中向前传播。对图3(a)进行短时傅里叶变换,得到的信号能量分布如图3(b)所示。从图3(b)可以看出,弹性波在无应力下电梯钢丝绳内传播,其能量分布在整个频带,主要集中在0~9500、10500~13500 Hz和14000~17500 Hz等3个频带范围内,与理论分析相符合。

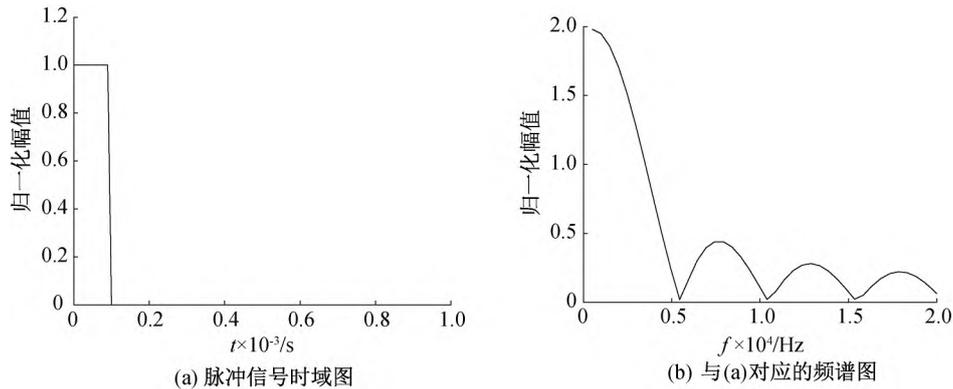


图2 有限元仿真采用的脉冲信号的时域图和频谱图

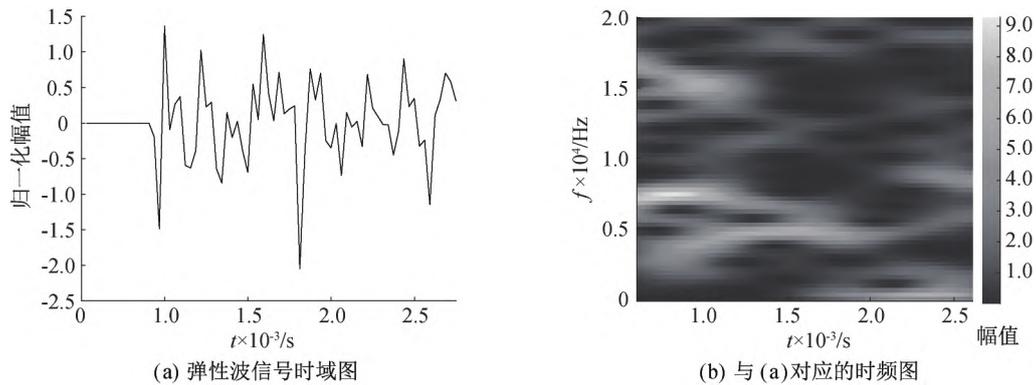


图3 无应力下电梯钢丝绳弹性波信号时域图及时频图

1.4 预应力下电梯钢丝绳仿真结果分析

电梯钢丝绳是曳引电梯的承重部件,一端连接轿厢,另一端连接对重块,两端的拉力导致电梯钢丝绳内部产生了预应力。本文利用 ABAQUS 有限元软件对预应力下电梯钢丝绳中弹性波的传播特性进行仿真,仿真模型的材料、长度等参数以及网格划分参数均与无应力下电梯钢丝绳仿真模型一致,且边界条件同样设置成一端为固定端,另一端为自由端。对自由端分别施加 100、400 N 以及 1200 N 的拉力,模拟电梯钢丝绳中的预应力。施加 100 N 与 400 N 的拉力是为了分析不同预应力对弹性波传播特性的影响;施加 1200 N 的拉力是因为该力为实验所用电梯轿厢在空载下的自重分配到实验电梯每根钢丝绳所需要承受的拉力。用图 2 所示的激励信号施加在电梯钢丝绳固定端,经 ABAQUS 有限元软件计算,得到预应力下电梯钢丝绳中任意节点的弹性波信号。

有限元仿真中电梯钢丝绳在不同预应力下得到的节点弹性波信号的时域图如图 4(a)、图 4(c)、图 4(e)所示,对节点弹性波信号进行短时傅里叶变换所得到的时频图如图 4(b)、图 4(d)、图 4(f)所示。图 4(b)中通带主要集中在 0~6500 Hz,少量集中在 8000~18000 Hz;图 4(d)中通带主要集中在 0~

5500 Hz,与图 4(b)相比高频部分的通带范围减少,阻带范围增加;图 4(f)中通带集中在 0~5000 Hz,与图 4(b)和图 4(d)相比,高频部分全为阻带。

从有限元仿真分析结果可以看出,随着预应力的增大,高频范围的弹性波无法通过电梯钢丝绳。这一特性为提高曳引系统中振动监测的准确性提供了依据。

2 电梯钢丝绳中弹性波传播特性实验分析

本文通过实验研究弹性波在含预应力的电梯钢丝绳中的通带与阻带,并与有限元中预应力下电梯钢丝绳的仿真结果进行对比验证。

2.1 实验方案设计

实验系统由电荷放大器、采集器上位机、数据采集仪、曳引机、加速度传感器、电梯钢丝绳、对重块、轿厢(100、400 N 作用力)、力锤和实验电梯组成,示意图如图 5 所示。实验时,分别采集电梯钢丝绳承受 100、400 N 的作用力以及轿厢处于空载状态下的弹性波信号。力锤用来敲击电梯曳引机模拟弹性波的产生,其内部传感器将采集的信号转换成电荷量,经由电荷放大器转换成电压,并通过曳引机机座和曳引钢丝绳上的加速度传感器测量。加速度传感器的安装位置如图 6 所示,其中:图 6(a)为安装在电

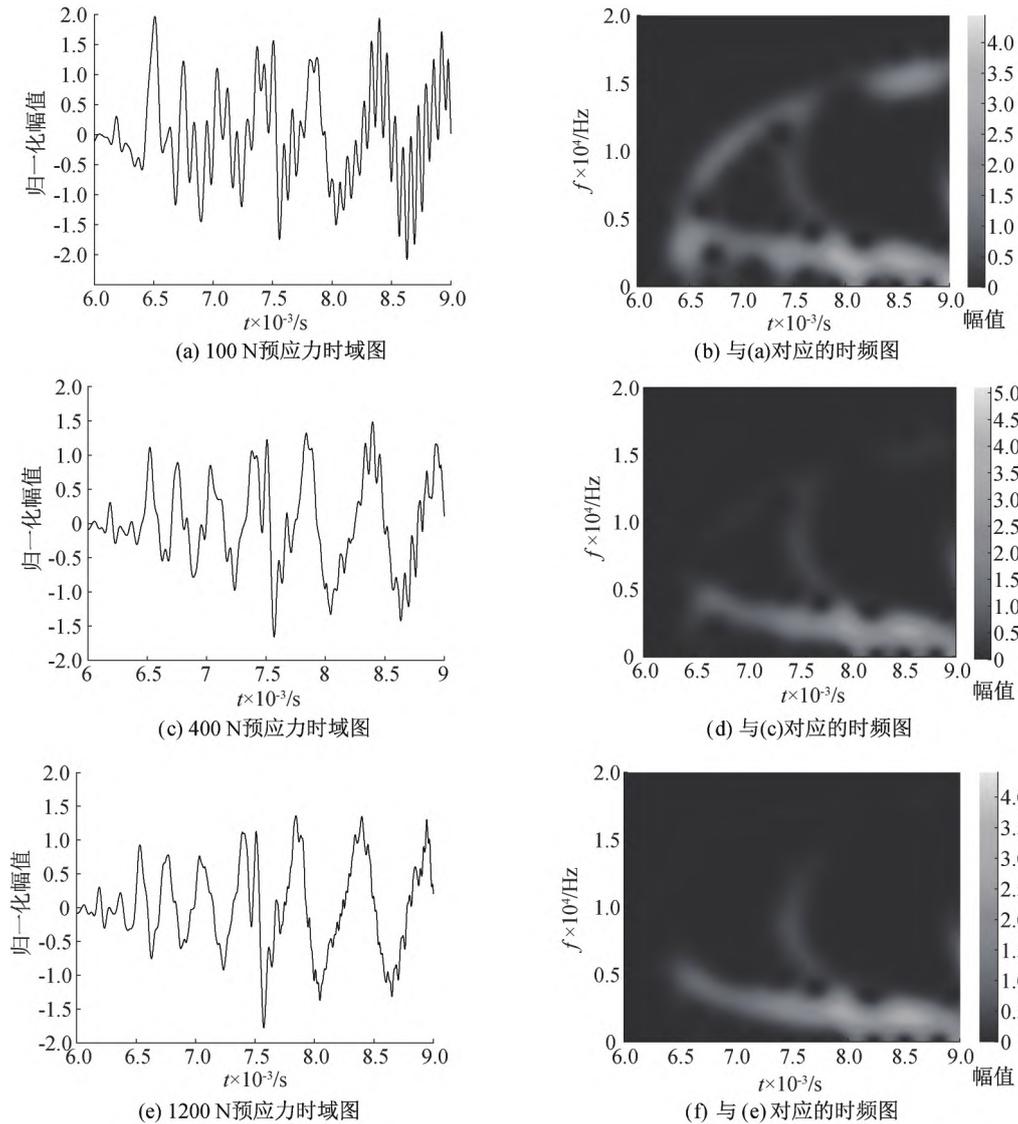
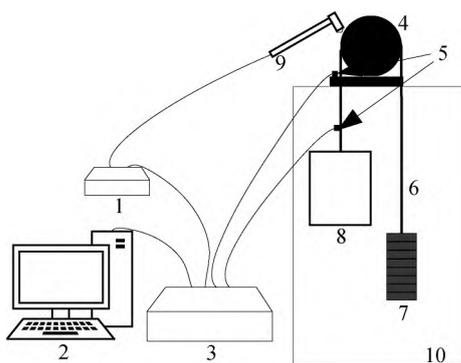


图 4 不同预应力下电梯钢丝绳中弹性波信号时域图及时频图



1. 电荷放大器; 2. 采集器上位机; 3. MI-7016 数据采集仪;
4. 曳引机; 5. 加速度传感器; 6. 电梯钢丝绳; 7. 对重块;
8. 轿厢 (100、400 N 作用力); 9. 力锤; 10. 实验电梯

图 5 电梯钢丝绳中弹性波信号采集实验系统示意图

梯钢丝绳上单轴加速度传感器的照片,图 6(b)为安装在电梯曳引机机座的三轴加速度传感器的照片。数据采集系统以同步采集的方式对电荷放大器以及

两个加速度传感器中的信号进行采集,并将采集的信号储存至本地。使用短时傅里叶变换对信号进行分析,得到能量密度分布图,分析能量密度分布图便可以得到弹性波的通带和阻带。

2.2 实验结果分析

力锤在敲击时力度可能过大或过小,以及重复敲击会产生两个或多个峰值,显然这两种情况不利于结果的分析。因此,选取 3 组锤击力范围相差 20 N 以内的数据进行分析,结果发现:在这 3 组数据中,在曳引机机座以及电梯钢丝绳上采集到的弹性波的时域信号虽稍有差别,但经过短时傅里叶变换所得的通带与阻带范围偏差极小,故选取其中 1 组进行分析。

图 7 为力锤信号的时域图以及频谱图。输入信号为脉冲信号,由于电梯顶部有磁场干扰,导致信号尾部有一些震荡信号。从频谱图可以看出,能量主要集中在 0~20000 Hz 范围内,符合有限元仿真分析结果。

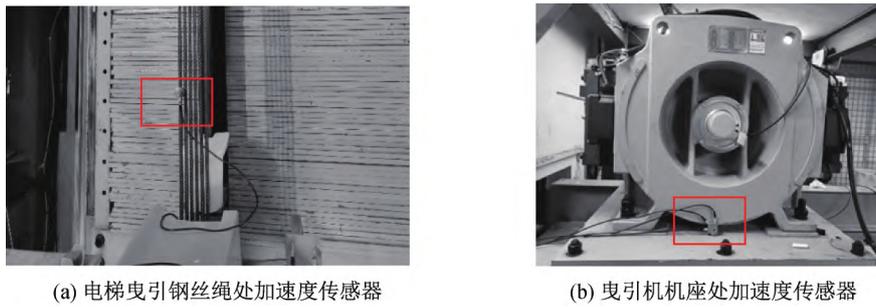


图6 弹性波信号采集实验加速度传感器照片

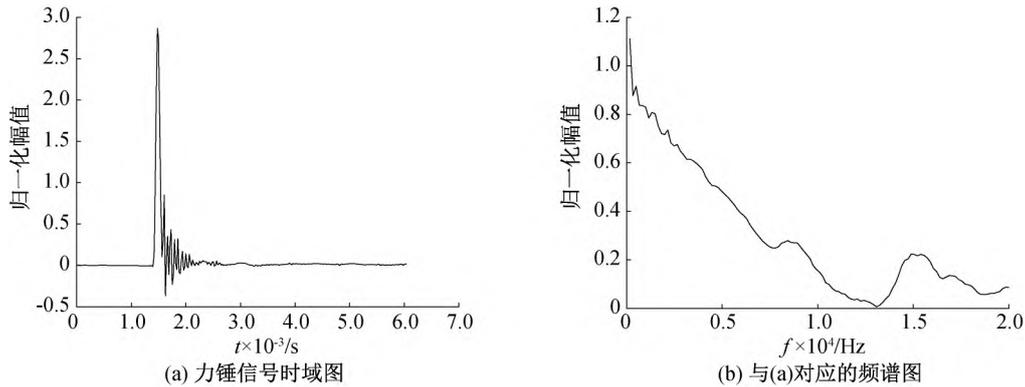


图7 力锤信号时域图与频谱图

曳引机机座采集的弹性波信号时域图如图8(a)所示;对信号进行短时傅里叶变换,得到弹性波信号在曳引机机座的信号能量密度分布图,如图8(b)所示。从图8(b)可以看出:能量在频带1150~20000 Hz内均有分布,说明弹性波能在该频带范围内向前传播,即该频带范围为弹性波传播的通带范

围;在频带0~1150 Hz内,没有能量分布,该频带范围为弹性波传播的阻带范围。该结果表明,弹性波在经曳引机传入电梯钢丝绳时,其频率范围仍然集中在0~20000 Hz范围内。这与有限元仿真分析中的激励频率范围一致。

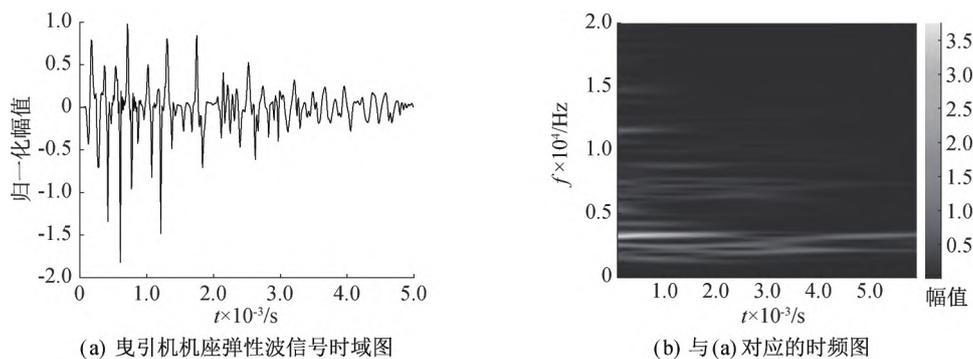


图8 曳引机机座弹性波信号时域图及时频图

弹性波在电梯钢丝绳内向前传播,信号由安装在电梯钢丝绳上的加速度传感器采集。电梯钢丝绳上弹性波信号时域图如图9(a)、图9(c)和图9(e)所示;同样对信号进行短时傅里叶变换,得到传播特性的能量密度分布图,如图9(b)、图9(d)和图9(f)所示。由于弹性波受到电梯钢丝绳内部预应力的影响,弹性波在传播过程中严重衰减,图9(b)中通带主要集中在1000~1700 Hz;图9(d)中通带主要集中在650~1600 Hz,与图9(b)相比高频部分的通带

范围减少;图9(f)中通带集中在200~690 Hz,与图9(b)和图9(d)相比,高频部分全为阻带。与电梯钢丝绳在预应力为100、400、1200 N的有限元仿真结果对比可知,由实验得到的电梯钢丝绳中弹性波的通带范围包含在有限元仿真得到的电梯钢丝绳中弹性波的通带范围内,实验结果与有限元仿真结果吻合。通过实验可以发现,预应力对电梯钢丝绳中弹性波传播特性的影响不可忽略。

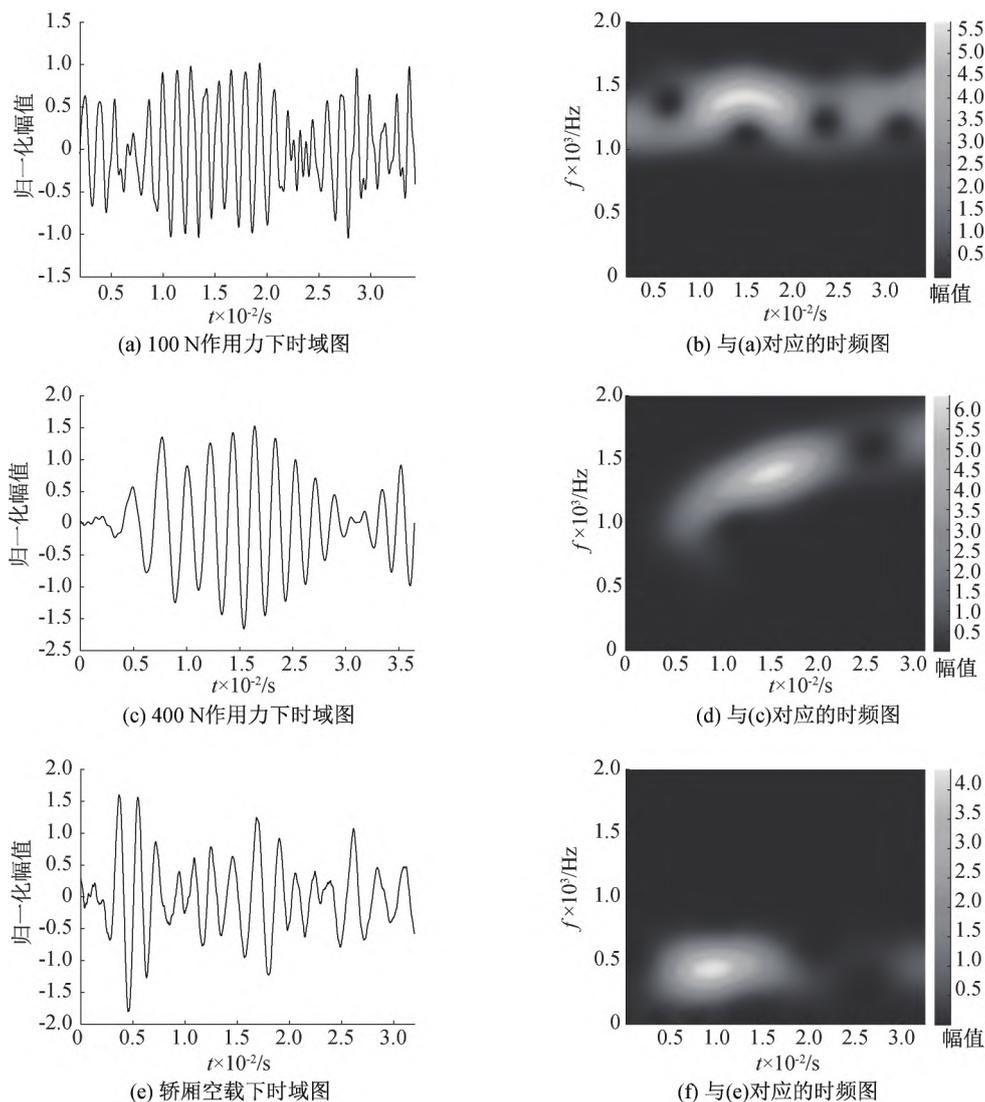


图 9 曳引钢丝绳上弹性波信号时域图及时频图

3 结 论

为了探索电梯钢丝绳中预应力对弹性波传播特性的影响,本文通过有限元仿真研究了在无应力以及预应力下电梯钢丝绳中弹性波的传播特性,并进一步通过实验研究电梯钢丝绳中弹性波的传播特性的变化,分析了电梯钢丝绳中预应力对传播特性产生的影响,所得主要结论如下:

a)弹性波在无应力下钢丝绳中传播时,其通带范围主要集中在 $0\sim 8300\text{ Hz}$ 和 $14000\sim 17500\text{ Hz}$;弹性波经过含预应力的钢丝绳之后,其通带范围减少,并且随着预应力的增大而减小,当预应力在 1200 N 时主要集中在 $0\sim 5000\text{ Hz}$ 。

b)在曳引系统中振动被激发后,以弹性波的形式通过含有预应力的电梯钢丝绳最后传至空载下轿厢,其信号严重衰减,弹性波通带范围减少,阻带范

围增大;弹性波成分主要集中在 $200\sim 690\text{ Hz}$ 。

c)预应力会阻碍高频段弹性波信号在电梯钢丝绳中的传播,故预应力对弹性波传播特性的影响不可忽略。

该结论说明了轿厢中振动信号与曳引系统中振源信号的差异,为提高曳引系统中振动监测的准确性提供指导。

参考文献:

[1] 包继虎, 张鹏, 朱昌明, 等. 基于张紧装置的高速电梯提升系统振动控制[J]. 振动与冲击, 2017, 36(14): 221-226.

[2] Raišutis R, Kažys R, Mažeika L, et al. Ultrasonic guided wave-based testing technique for inspection of multi-wire rope structures[J]. NDT & E International, 2014, 62: 40-49.

- [3] Dubuc B, Ebrahimkhanlou A, Salamone S. Higher order longitudinal guided wave modes in axially stressed seven-wire strands[J]. *Ultrasonics*, 2018, 84: 382-391.
- [4] Qu Z G, Fu Y K, Zhang Q P, et al. Structural health monitoring for multi-strand aircraft wire insulation layer based on ultrasonic guided waves[J]. *Applied Acoustics*, 2022, 201: 109109.
- [5] Itner D, Gravenkamp H, Dreiling D, et al. Efficient semi-analytical simulation of elastic guided waves in cylinders subject to arbitrary non-symmetric loads[J]. *Ultrasonics*, 2021, 114: 106389.
- [6] Treyssède F, Frikha A, Cartraud P. Mechanical modeling of helical structures accounting for translational invariance. Part 2: Guided wave propagation under axial loads[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50(9): 1383-1393.
- [7] Treyssède F. Mode propagation in curved waveguides and scattering by inhomogeneities: application to the elastodynamics of helical structures[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, 129(4): 1857-1868.
- [8] Treyssède F. Investigation of the interwire energy transfer of elastic guided waves inside prestressed cables [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2016, 140(1): 498-509.
- [9] Treyssède F. Dispersion curve veering of longitudinal guided waves propagating inside prestressed seven-wire strands[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 367: 56-68.
- [10] Zhang J M, Zhang Y B, Guan Y G. Analysis of time-domain reflectometry combined with wavelet transform for fault detection in aircraft shielded cables[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(11): 4579-4586.
- [11] 魏义敏, 潘骏, 杨世锡, 等. 变截面轴中弹性波传播特性试验研究[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(4): 258-264.
- [12] 魏义敏, 刘琪, 陈文华, 等. 基于弹性波传播特性的变截面转轴横向裂纹检测方法[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(10): 42-49.
- [13] Bartoli I, Castellazzi G, Marzani A, et al. Prediction of stress waves propagation in progressively loaded seven wire strands[C]// *Conference on Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems*. San Diego, California. SPIE, 2012: 834505.
- [14] Farhidzadeh A, Salamone S. Reference-free corrosion damage diagnosis in steel strands using guided ultrasonic waves[J]. *Ultrasonics*, 2015, 57: 198-208.
- [15] Liu X C, Wu B, Qin F, et al. Observation of ultrasonic guided wave propagation behaviours in pre-stressed multi-wire structures[J]. *Ultrasonics*, 2017, 73: 196-205.
- [16] 李春雷, 韩强, 刘义捷, 等. 螺旋曲杆中导波传播特性的有限元分析[J]. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2014, 42(8): 6-13.
- [17] Moser F, Jacobs L J, Qu J M. Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method[J]. *NDT & E International*, 1999, 32(4): 225-234.
- [18] Žak A, Krawczuk M. Certain numerical issues of wave propagation modelling in rods by the Spectral Finite Element Method[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, 47(9): 1036-1046.
- [19] Gan C B, Wei Y M, Yang S X. Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(2): 434-445.

(责任编辑:康 锋)