浙江理工大学学报,第 49 卷,第 3 期,2023 年 5 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2023.03.013

二维单向强退化抛物型方程的参数识别反问题

洪宇翔[1],王泽文[1],徐定华[2]
(1.东华理工大学理学院,南昌 330013;2.浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要:针对矩形区域内两种形式的强退化扩散系数,研究了二维单向强退化抛物型方程中扩散项的参数识别反问题。首先,利用 Hölder 不等式等证明了扩散项参数识别的唯一性和条件稳定性;然后,给出了数值计算强退化抛物型方程正问题的一种交替方向有限差分隐格式;最后,通过将退化扩散项的参数识别反问题归结为泛函优化问题,提出了基于遗传算法的退化项参数识别方法。计算模拟结果表明,退化项参数能被附加的测量数据有效识别出来,且提出的基于遗传算法的退化项参数识别方法具有很强的鲁棒性。

关键词:强退化;抛物型方程;参数识别;有限差分;遗传算法

中图分类号:O175.26　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2023) 05-0388-08

引文格式:洪宇翔,王泽文,徐定华. 二维单向强退化抛物型方程的参数识别反问题[J]. 浙江理工大学学报(自然科学),2023,49(3):388-395.

Reference Format: HONG Yuxiang, WANG Zewen, XU Dinghua. Inverse problems of the parameter identification for two dimensional one-way strongly degenerate parabolic equations[J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University,2023,49(3):388-395.

Inverse problems of the parameter identification for two dimensional one-way strongly degenerate parabolic equations

HONG Yuxiang[1], *WANG Zewen*[1], *XU Dinghua*[2]
(1. School of Science, East China University of Technology, Nanchang 330013, China;
2. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The inverse problems of the parameter identification of diffusion terms in two-dimensional unidirectional strongly degenerate parabolic equation were studied for two forms of strongly degenerate diffusion coefficients in the rectangular domain. Firstly, the uniqueness and conditional stability of the parameter identification of the diffusion terms were proved by using such mathematical tools as Hölder inequality. Then, an alternating direction finite difference implicit scheme was proposed for the numerical calculation of the forward problem of strongly degenerate parabolic equations. Finally, a parameter identification method of degenerate terms based on genetic algorithm was proposed by reducing the inverse problems of the parameter identification of degenerate diffusion terms to a functional optimization problem. The simulation results show that the degenerate parameters can be effectively identified by the additional measurement data, and the proposed method based on genetic algorithm has strong robustness.

Key words: strongly degenerate; parabolic equation; parameter identification; finite difference; genetic algorithm

0 引　言

本文主要考虑带强退化扩散系数抛物型方程的退化项参数识别问题,此类问题在金融数学、流体力学、

收稿日期:2022－08－17　　网络出版日期:2022－11－01

基金项目:国家自然科学基金项目(11961002,11861007);江西省自然科学基金重点项目(20212ACB201001);东华理工大学研究生创新项目(DHYC-201929)

作者简介:洪宇翔(1998－　),男,安徽淮南人,硕士研究生,主要从事反问题建模与计算方面的研究。

通信作者:王泽文,E-mail:zwwang6@163.com

车辆工程等许多应用科学领域有重要意义。Rao 等[1]研究了一维退化抛物型方程源项反问题,证明了该反问题的唯一性,同时给出了正问题的有限体积计算方法,然后利用 Landweber 迭代方法重建源项。类似地,Yang 等[2]研究了重建退化抛物型方程初始分布的反问题,其中正问题采用有限差分方法计算;相关方法被作者推广到二维退化抛物型方程初始分布的反演问题上[3]。Kamynin[4]研究了非局部附加数据下源项系数的反演问题,证明了反问题解的唯一性和稳定性。Kawamoto[5]研究了多维线性退化抛物方程和强耦合系统的反问题,通过适当子边界上的测量数据和任意固定时刻的测量数据来确定源项,并基于 Carleman 估计讨论了反源问题的 Lipschitz 类型的稳定性结果。Ivanchov 等[6]研究了一类二维矩形域内退化项系数与时间变量有关的强退化抛物方程,通过将反问题归结为关于退化系数的方程,应用 Schauder 不动点定理,证明了反问题解的存在性,同时给出了唯一性的证明。近期,Cannarsa 等[7]研究了一维抛物方程中识别退化项参数的反问题,证明了反问题的唯一性和 Lipschitz 稳定性。关于非退化抛物型方程反问题受到了众多学者的关注和研究,相关研究参见文献[8-12]及其参考文献。

本文在 Cannarsa 等[7]的启发下,在矩形区域内考虑二维单向强退化抛物型方程的退化项参数识别反问题,针对两种形式的强退化扩散系数,研究了在适当的测量数据下退化项参数识别反问题的唯一性和条件稳定性。然后,针对考虑的退化项参数识别反问题,提出了基于遗传算法的参数识别方法,即将参数识别归结为泛函优化问题,并利用遗传算法求解该优化问题。本文将退化项参数识别相关研究结果推广到二维强化退化抛物型方程的情形,为强退化抛物型方程退化扩散项参数识别反问题相关研究提供参考。

1　问题描述

本文考虑二维单向强退化抛物型方程定解问题Ⅰ(简称退化问题Ⅰ)和其定解问题Ⅱ(简称退化问题Ⅱ):

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x(ax\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u), & (x,y) \in (0,l)\times(0,l), t\in(0,T]; \\ x\partial_x u(x,y,t) = 0, & (x,y)\in \Lambda_1, t\in(0,T]; \\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in\Lambda_i, i=2,3,4, t\in(0,T]; \\ u(x,y,0)=u_0(x,y), & (x,y)\in(0,l)\times(0,l) \end{cases} \tag{1}$$

和

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x(x^\gamma\partial_x u) + \partial_y(\partial_y u), & (x,y) \in (0,l)\times(0,l), t\in(0,T]; \\ x^\gamma\partial_x u(x,y,t) = 0, & (x,y)\in \Lambda_1, t\in(0,T]; \\ u(x,y,t)=0, & (x,y)\in\Lambda_i, i=2,3,4, t\in(0,T]; \\ u(x,y,0)=u_0(x,y), & (x,y)\in(0,l)\times(0,l) \end{cases} \tag{2}$$

其中:$a>0$ 为常数;$1\leqslant\gamma<2$ 为退化指数(常数);$u_0(x,y)$为已知的初始分布;$\bigcup_{i=1}^{4}\Lambda_i$ 是矩形域$(0,l)\times(0,l)$的边界,$\Lambda_1=0\times[0,l]$,$\Lambda_2=(0,l]\times l$,$\Lambda_3=l\times[0,l)$,$\Lambda_4=(0,l]\times 0$。

上述两个定解问题之所以称为是强退化的,是因为在 $x=0$ 处扩散系数的值为 0,且当 $x\to 0$ 时扩散系数趋于 0 的速度大于或等于 x 趋于 0 的速度。

本文考虑的退化项参数识别反问题是:

a)参数识别反问题Ⅰ。已知初始分布 $u_0(x,y)$,给定附加的测量数据 $\partial_t u(x,y,t_0)$、$\partial_x u(x,y,t_0)$、$\partial_y u(x,y,t_0)$,识别退化扩散项中的参数 a,其中:$(x,y)\in(0,l)\times(0,l)$,$t_0\in(0,T]$是某个固定时刻。

b)参数识别反问题Ⅱ。已知初始分布 $u_0(x,y)$,给定附加数据 $\partial_t u(x,y,t_0)$、$\partial_x u(x,y,t_0)$、$\partial_y u(x,y,t_0)$,识别退化扩散项中的参数 γ,其中:$(x,y)\in(0,l)\times(0,l)$,$t_0\in(0,T]$是某个固定时刻。

本文主要研究在二维矩形区域内上述两个参数识别反问题的唯一性和条件稳定性,以及能有效识别参数 a 和 γ 的反演方法。

2　参数识别的理论分析

对任意 $l>0$,$(x,y)\in(0,l)\times(0,l)$,记 $H=L^2((0,l)\times(0,l))$。对于 $\gamma\in[1,2)$,记函数空间

$$H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))=\left\{u\in H\left|\int_0^l\int_0^l x^\gamma\,|\partial_x u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,\int_0^l\int_0^l|\partial_y u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right.\right\}$$

和

$$H_\gamma^2((0,l)\times(0,l))=\{u\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))\,|\,x^\gamma\partial_x u\in H^1((0,l)\times(0,l))\}。$$

本节利用 Hölder 不等式等证明参数识别反问题的唯一性和条件稳定性。

2.1 参数识别反问题Ⅰ的唯一性和稳定性

定理1 设 $u_0(x,y)\in L^2((0,l)\times(0,l))$ 且 $u_0(x,y)\neq 0$，$u_1\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$ 和 $u_2\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$ 分别对应退化问题Ⅰ中 $0<a=a_1<\infty$ 和 $0<a=a_2<\infty$ 的解，且存在 $\mu>0$ 使得

$$\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x u_i(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\mu,\ i=1,2 \tag{3}$$

则存在常数 C 使得

$$\begin{aligned}|a_1-a_2|\leqslant C\Big(&\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_t u_1(x,y,t_0)-\partial_t u_2(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big)+\\&\Big(\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x u_2(x,y,t_0)-\partial_x u_1(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}+\\&\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_y u_2(x,y,t_0)-\partial_y u_1(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big)\end{aligned}\tag{4}$$

且不等式(4)意味着参数识别反问题Ⅰ的解是唯一的。

证明 不妨设 $a_2>a_1$，令 $w=u_1-u_2$，则有

$$\partial_t w-a_1\partial_x(x\partial_x w)-\partial_y(\partial_y w)=(a_1-a_2)\partial_x(x\partial_x u_2)\tag{5}$$

式(5)等号两边分别同乘以 u_2，并在区域 $(0,1)\times(0,1)$ 上积分，得

$$\begin{aligned}(a_1-a_2)\int_0^l\int_0^l\partial_x(x\partial_x u_2)u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(a_1-a_2)\int_0^l(x\partial_x u_2u_2\,|_0^l-\int_0^l x(\partial_x u_2)^2\mathrm{d}x)\mathrm{d}y=\\(a_2-a_1)\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{6}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_0^l\int_0^l(\partial_t w-a_1\partial_x(x\partial_x w)-\partial_y(\partial_y w))u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_0^l\int_0^l\partial_t wu_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-a_1\int_0^l\int_0^l\partial_x(x\partial_x w)u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^l\int_0^l\partial_y(\partial_y w)u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_0^l\int_0^l\partial_t wu_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a_1\int_0^l\int_0^l x\partial_x w\partial_x u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^l\int_0^l\partial_y w\partial_y u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}\tag{7}$$

利用 Hölder 不等式，即可得

$$\int_0^l\int_0^l\partial_t wu_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_t w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^l\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\tag{8}$$

$$a_1\int_0^l\int_0^l x\partial_x w\partial_x u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant a_1\Big(\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\tag{9}$$

和

$$\int_0^l\int_0^l\partial_y w\partial_y u_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_y w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_y u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\tag{10}$$

注意到 $u_1\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$ 和 $u_2\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$，综合式(5)—(10)得

$$\begin{aligned}&(a_2-a_1)\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_t w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^l\int_0^l|u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}+\\&a_1\Big(\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^l\int_0^l x\,|\partial_x u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}+\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_y w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_y u_2|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\end{aligned}\tag{11}$$

再根据条件(3),即可得存在常数 C 使得不等式(4)成立。

若有 $\partial_t u_1(x,y,t_0)=\partial_t u_2(x,y,t_0)$ 和 $\nabla u_1(x,y,t_0)=\nabla u_2(x,y,t_0)$,由不等式(4)可得 $a_1=a_2$,即参数识别反问题Ⅰ的唯一性成立。

证毕。

2.2 参数识别反问题Ⅱ的唯一性和稳定性

定理 2 设 $0<l\leqslant 1$,$u_0(x,y)\in L^2((0,l)\times(0,l))$ 且 $u_0(x,y)\neq 0$,$u_1\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$ 和 $u_2\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$ 分别对应退化问题Ⅱ中 γ_1 和 γ_2 的解,且存在 $\mu>0$ 使得

$$\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_i}\,|\partial_x u_i(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\mu,\ i=1,2 \tag{12}$$

对 $t_0\in(0,T]$,若 $\partial_t u_1(x,y,t_0)=\partial_t u_2(x,y,t_0)$、$\partial_x u_1(x,y,t_0)=\partial_x u_2(x,y,t_0)$、$\partial_y u_1(x,y,t_0)=\partial_y u_2(x,y,t_0)$ 对所有 $(x,y)\in(0,l)\times(0,l)$ 成立,则 $\gamma_1=\gamma_2$。

证明 不失一般性,假设 $\gamma_1<\gamma_2$,令 $w(x,y,t)=u_2(x,y,t)-u_1(x,y,t)$,则有

$$\partial_t w-\partial_x(x^{\gamma_2}\partial_x w)-\partial_y(\partial_y w)=\partial_x((x^{\gamma_2}-x^{\gamma_1})\partial_x u_1)。$$

上式等号两边分别乘以 u_1 后在区域 $(0,l)\times(0,l)$ 上积分,注意到边界条件,经分部积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^l\int_0^l(\partial_t w-\partial_x(x^{\gamma_2}\partial_x w)-\partial_y(\partial_y w))u_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_0^l\int_0^l\partial_t w u_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_2}\partial_x w\partial_x u_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^l\int_0^l\partial_y w\partial_y u_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{13}$$

$$\int_0^l\int_0^l\partial_x((x^{\gamma_2}-x^{\gamma_1})\partial_x u_1)u_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^l\int_0^l(x^{\gamma_1}-x^{\gamma_2})\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{14}$$

已知 $\partial_t u_1(x,y,t_0)=\partial_t u_2(x,y,t_0)$、$\partial_x u_1(x,y,t_0)=\partial_x u_2(x,y,t_0)$、$\partial_y u_1(x,y,t_0)=\partial_y u_2(x,y,t_0)$ 对所有 $(x,y)\in(0,l)\times(0,l)$ 成立,即得

$$\int_0^l\int_0^l(x^{\gamma_1}-x^{\gamma_2})\,|\partial_x u_1(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

又因 $x^{\gamma_1}>x^{\gamma_2}$,$x\in(0,l)$,故有

$$\partial_x u_1(x,y,t_0)=0,$$

从而

$$\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_i}\,|\partial_x u_1(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

这与定理的假设条件相矛盾,故 $\gamma_1=\gamma_2$,即唯一性得证。

定理 3 设 $0<l<1$,$u_0(x,y)\in L^2((0,l)\times(0,l))$ 且 $u_0(x,y)\neq 0$,$u_1\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$ 和 $u_2\in H_\gamma^1((0,l)\times(0,l))$ 分别是对应于退化问题Ⅱ中 γ_1 和 γ_2 的解,且存在 $\mu>0$ 使得

$$\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_i}\,|\partial_x u_i(x,y,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\mu,\ i=1,2 \tag{15}$$

则存在大于 0 的常数 C 使得

$$\begin{aligned}|\gamma_2-\gamma_1|\leqslant C\Big(&\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_t u_1(x,y,t_0)-\partial_t u_2(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}+\\&\Big(\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_2}\,|\partial_x u_1(x,y,t_0)-\partial_x u_2(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}+\\&\Big(\int_0^l\int_0^l|\partial_y u_1(x,y,t_0)-\partial_y u_2(x,y,t_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)^{\frac12}\Big)\end{aligned} \tag{16}$$

证明 不失一般性,不妨设 $1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<2$,并令

$$w(x,y,t)=u_2(x,y,t)-u_1(x,y,t)。$$

于是,由定理 2 中的证明及 $l<1$,即知

$$\int_0^l\int_0^l(x^{\gamma_1}-x^{\gamma_2})\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^l\int_0^l(1-x^{\gamma_2-\gamma_1})x^{\gamma_1}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant(1-l^{\gamma_2-\gamma_1})\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_1}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

注意到 $1\leqslant\gamma_1<\gamma_2<2$ 和 $0<l<1$,可得

$$1-l^{\gamma_2-\gamma_1}=\int_l^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}s^{\gamma_2-\gamma_1}\mathrm{d}s=(\gamma_2-\gamma_1)\int_l^1 s^{\gamma_2-\gamma_1-1}\mathrm{d}s\geqslant(\gamma_2-\gamma_1)l(1-l)。$$

于是,有

$$(\gamma_2-\gamma_1)l(1-l)\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_1}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\int_0^l\int_0^l(x^{\gamma_1}-x^{\gamma_2})\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

另一方面,由式(13)和 Hölder 不等式,得

$$\int_0^l\int_0^l(\partial_t w-\partial_x(x^{\gamma_2}\partial_x w)-\partial_y(\partial_y w))u_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\left(\int_0^l\int_0^l|\partial_t w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\int_0^l|u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left(\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_2}\,|\partial_x w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_2}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^l\int_0^l|\partial_y\omega|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\int_0^l|\partial_y u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}。$$

注意到

$$\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_2}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_2-\gamma_1+\gamma_1}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant l^{\gamma_2-\gamma_1}\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_1}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

和

$$\int_0^l\int_0^l(x^{\gamma_1}-x^{\gamma_2})\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^l\int_0^l(\partial_t w-\partial_x(x^{\gamma_2}\partial_x w)-\partial_y(\partial_y w))u_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

易知

$$(\gamma_2-\gamma_1)l(1-l)\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_1}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\left(\int_0^l\int_0^l|\partial_t w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\int_0^l|u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}+l^{\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}$$

$$\left(\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_2}\,|\partial_x w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\int_0^l x^{\gamma_1}\,|\partial_x u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^l\int_0^l|\partial_y w|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^l\int_0^l|\partial_y u_1|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}。$$

由 $u_1\in H_\gamma^1$,结合条件(15)可知式(16)成立。定理3得证。

3 强退化方程正问题的数值方法

本文采用交替方向隐格式[13]求解退化问题Ⅰ和退化问题Ⅱ。设 J,N 为正整数,取步长 $h=h_x=h_y=\frac{l}{J}$ 对空间区域 $[0,l]\times[0,l]$ 作等距剖分;取步长 $\tau=\frac{T}{N}$,对时间域 $[0,T]$ 作 N 等分,所得网格点记为 (x_i,y_j,t_n),其中 $x_i=ih$,$y_j=jh$,$t_n=n\tau$。记 $u(ih,jh,n\tau)$ 的有限差分近似为 $u_{i,j}^n$,记 $u\left(ih,jh,n\tau+\frac{1}{2}\tau\right)$ 的有限差分近似为 $u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$。同时,记 $a_{i,j}=a(ih,jh)$、$a_{i-\frac{1}{2},j}=a(ih-\frac{h}{2},jh)$ 和 $a_{i-\frac{1}{2},j}=a\left(ih-\frac{h}{2},jh\right)$。对于退化型扩散方程 $\partial_t u=\partial_x(a(x)\partial_x u)+\partial_y(\partial_y u)$,其交替方向隐格式归纳为以下两步。

第一步:从第 n 层到第 $n+\frac{1}{2}$ 层,即:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^n}{\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{h_1}\left(a_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1}-a_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1}\right)+\frac{1}{h_2}\left(\frac{u_{i,j+1}^n-u_{i,j}^n}{h_2}-\frac{u_{i,j}^n-u_{i,j-1}^n}{h_2}\right)\quad(17)$$

第二步:从第 $n+\frac{1}{2}$ 层到第 $n+1$ 层,即:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{h_1}\left(a_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1}-a_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}-u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_1}\right)+\frac{1}{h_2}\left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1}-u_{i,j}^{n+1}}{h_2}-\frac{u_{i,j}^{n+1}-u_{i,j-1}^{n+1}}{h_2}\right)\quad(18)$$

显然,在本文考虑的问题中 $a(x)$ 为:

$$a(x)=\begin{cases}ax, & \text{退化问题 Ⅰ};\\ x^{\gamma}, & \text{退化问题 Ⅱ}。\end{cases}$$

初始条件离散为:

$$u_{ij}^{0}=u_{0}(ih,jh),0\leqslant i,j\leqslant J。$$

退化的左边界条件按下述极限意义下进行离散:

$$\lim_{x\to 0}x^{\gamma}\partial_{x}u=0,\gamma\in[1,2),$$

即给定一个大于零的小数 $x=\dfrac{h}{2}$,边界条件在 $x=\dfrac{h}{2}$ 处离散为

$$x^{\gamma}\partial_{x}u\mid_{x=\frac{h}{2}}\approx\left(\frac{h}{2}\right)^{\gamma}\frac{u(h,y)-u(0,y)}{h}=\varepsilon。$$

综上,即得到强退化方程正问题数值求解的交替方向隐格式。

4　基于遗传算法的参数识别方法

记 $\partial_{t}u(x,y,t_{0})$、$\partial_{x}u(x,y,t_{0})$ 和 $\partial_{y}u(x,y,t_{0})$ 的测量值分别 $\beta^{\delta}(x,y)$、$\zeta^{\delta}(x,y)$ 和 $\eta^{\delta}(x,y)$,且

$$\|\partial_{t}u(x,y,t_{0})-\beta^{\delta}(x,y)\|\leqslant\delta,\|\partial_{x}u(x,y,t_{0})-\zeta^{\delta}(x,y)\|\leqslant\delta,\|\partial_{y}u(x,y,t_{0})-\eta^{\delta}(x,y)\|\leqslant\delta \tag{19}$$

其中:δ 为误差水平。

设待识别的参数为 θ,并记对应的附加测量数据为 $\partial_{t}u(x,y,t_{0};\theta)$、$\partial_{x}u(x,y,t_{0};\theta)$ 和 $\partial_{y}u(x,y,t_{0};\theta)$。于是,退化项参数识别反问题Ⅰ和反问题Ⅱ均可归结为下述优化问题:

$$\begin{aligned}\min\nolimits_{\theta}J(\theta)=\min\nolimits_{\theta}\Big\{&\int_{0}^{l}\int_{0}^{l}\mid\partial_{t}u(x,y,t_{0};\theta)-\beta^{\delta}(x,y)\mid^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\\&\int_{0}^{l}\int_{0}^{l}\mid x\partial_{x}u(x,y,t_{0};\theta)-x\zeta^{\delta}(x,y)\mid^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{0}^{l}\int_{0}^{l}\mid\partial_{y}u(x,y,t_{0};\theta)-\eta^{\delta}(x,y)\mid^{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big\}\end{aligned} \tag{20}$$

遗传算法[14-16]源于对生物系统的计算机模拟研究,是一种随机搜索全局最优解的方法。它的基本步骤可以概括为:从任意初始种群出发,设计适应度函数,设定控制参数;通过随机选择、交叉和变异操作,产生更适合环境的个体;数代进化繁衍,直至收敛到问题的最优解。与传统优化算法相比,其不依赖于步长信息,对参数的初始解不敏感,而且无需计算目标函数的导数,从而某种程度上避免了数值求解的不稳定性。利用遗传算法识别退化项参数的步骤如下:

第一步,将退化项参数识别反问题归结为函数优化问题(20)。

第二步,将 $J(\theta)$ 作为适应度函数,利用遗传算法求解优化问题(20)。其中,$J(\theta)$ 中的 $\partial_{t}u(x,y,t_{0};\theta)$,$\partial_{x}u(x,y,t_{0};\theta)$,$\partial_{y}u(x,y,t_{0};\theta)$ 是待识别参数取遗传算法迭代值 θ 后,由正问题的有限差分格式(17)—(18)计算得到。

众所周知,当搜索种群足够大、繁衍代数足够多时,理论上遗传算法可以收敛到优化问题的最优解。因此,只要优化问题(20)存在唯一的极小元,则上述方法是收敛的。显然,优化问题(20)极小元的存在唯一性蕴含在定理 1—定理 3 的结论中。但是,因参数识别反问题的强非线性性,本文未能给出优化问题(20)极小元的存在唯一性的严格证明。

另一方面,本文对基于遗传算法的退化项参数识别进行计算模拟实验,以此来验证方法的收敛性和稳定性。在计算模拟中,空间区域为$[0,1]\times[0,1]$,内部某一测量时刻 $t_{0}=0.1$。取 a 或 γ 的精确值,由差分格式(17)—(18)求解正问题。加上随机噪声后得到符合式(19)的测量数据 $\beta^{\delta}(x,y)$、$\zeta^{\delta}(x,y)$ 和 $\eta^{\delta}(x,y)$,其中带噪声的测量数据描述为 $\beta^{\delta}(x,y)=\beta(x,y)(1+\varepsilon r(x,y))$,$r(x,y)$ 是一个服从均值为 0,方差为 1 的 Gauss 随机噪声,噪声水平 $\partial_{t}u(x,y,t_{0})$ 分别取 0.10、0.05、0.01、0.005 和 0.001 进行计算。参数识别时,设置遗传算法的进化代数为 100,重复计算 5 次取平均作为参数识别反问题的解。

算例 1　参数识别反问题Ⅰ。取精确值 $a=0.2,1.0,1.7$,不同噪声水平下的识别结果见表 1。从表 1 的计算结果可以看出:由 $\partial_{t}u(x,y,t_{0})$、$\partial_{x}u(x,y,t_{0})$、$\partial_{y}u(x,y,t_{0})$ 的测量数据能有效识别出退化扩散项中的参数 a,且识别结果的相对误差均小于数据的相对误差水平。

表 1 参数 a 在不同误差水平下的识别结果

噪声水平/%	a 精确值	a 识别值	相对误差/%	相对误差平均值/%
0.1	0.2000	0.1999	0.0502	
0.5	0.2000	0.2005	0.2388	
1.0	0.2000	0.1992	0.3832	
5.0	0.2000	0.2017	0.8562	
10.0	0.2000	0.2126	6.2776	
0.1	1.0000	1.0003	0.0253	
0.5	1.0000	1.0023	0.2259	
1.0	1.0000	1.0010	0.1039	1.0713
5.0	1.0000	1.0126	1.2568	
10.0	1.0000	0.9809	1.9708	
0.1	1.7000	1.7003	0.0193	
0.5	1.7000	1.6995	0.0302	
1.0	1.7000	1.6957	0.2520	
5.0	1.7000	1.6767	1.3692	
10.0	1.7000	1.7512	3.0108	

算例 2 参数识别反问题Ⅱ。取精确值 $\gamma=1.1$，1.6，1.9，不同噪声水平下的识别结果见表 2。从表 2 的计算结果可以看出：由 $\partial_t u(x,y,t_0)$、$\partial_x u(x,y,t_0)$、$\partial_y u(x,y,t_0)$ 的测量数据能有效识别出退化扩散项中的参数 $\partial_y u(x,y,t_0)$，且所有情形的识别结果的平均相对误差为 0.7078%，故该识别结果的总体精度要比算例 1 的要高些。

表 2 参数 γ 在不同误差水平下的识别结果

噪声水平/%	γ(精确值)	γ(识别值)	相对误差/%	相对误差平均值/%
0.1	1.1000	1.1012	0.1123	
0.5	1.1000	1.0961	0.3523	
1.0	1.1000	1.0937	0.5688	
5.0	1.1000	1.0875	1.1335	
10.0	1.1000	1.1140	3.9987	
0.1	1.6000	1.5990	0.0625	
0.5	1.6000	1.6030	0.1875	
1.0	1.6000	1.5979	0.1312	0.7078
5.0	1.6000	1.5936	0.4000	
10.0	1.6000	1.5625	2.3437	
0.1	1.9000	1.9011	0.0559	
0.5	1.9000	1.9016	0.0874	
1.0	1.9000	1.9027	0.1452	
5.0	1.9000	1.9071	0.3753	
10.0	1.9000	1.8874	0.6629	

5 结 论

本文研究了一类矩形区域内二维强退化抛物型方程中两种退化扩散项的参数识别反问题。首先，利用 Hölder 不等式等数学工具分析了两个参数识别反问题解的唯一性和条件稳定性；然后，将参数识别反问题归结泛函优化问题，利用遗传算法求解该优化问题，结合退化抛物型方程正问题的有限差分格式，给出退化扩散项参数识别的方法；最后，通过计算模拟实验来验证所提出的参数识别方法的有效性。本文的研究结果表明，某个时刻空间域上的数据 $\partial_y u(x,y,t_0)$、$\partial_y u(x,y,t_0)$ 和 $\partial_y u(x,y,t_0)$ 可以唯一识别退化扩散项 ax 中的未知参数 a，而在边长小于等于 1 的矩形域中这些数据可以唯一识别退化扩散项 x^γ 中的未知参数 γ；计算模拟结果表明，基于遗传算法的参数识别方法具有很强的鲁棒性和识别精度。本文考虑的是退化项中的

单个参数识别的反问题;对于多个参数同时识别的反问题以及非单侧退化的抛物型方程退化项参数识别的反问题等,有待后续研究。

参考文献:

[1] Rao X B, Wang Y X, Qian K, et al. Numerical simulation for an inverse source problem in a degenerate parabolic equation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(23/24): 7537-7553.

[2] Yang L, Deng Z C. An inverse backward problem for degenerate parabolic equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2017, 33(6): 1900-1923.

[3] Deng Z C, Liu F L, Yang L, et al. Numerical simulations for initial value inversion problem in a two-dimensional degenerate parabolic equation[J]. AIMS Mathematics, 2021, 6(4): 3080-3104.

[4] Kamynin V L. On the solvability of the inverse problem for determining the right-hand side of a degenerate parabolic equation with integral observation[J]. Mathematical Notes, 2015, 98(5/6): 765-777.

[5] Kawamoto A. Inverse problems for linear degenerate parabolic equations by"time-like"Carleman estimate[J]. Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2015, 23(1): 1-21.

[6] Ivanchov M, Vlasov V. Inverse problem for a two-dimensional strongly degenerate heat equation[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2018, 2018(77): 1-17.

[7] Cannarsa P, Doubova A, Yamamoto M. Inverse problem of reconstruction of degenerate diffusion coefficient in a parabolic equation[J]. Inverse Problems, 2021, 37(12): 125002.

[8] Wang Z W, Chen S L, Qiu S F, et al. A non-iterative method for recovering the space-dependent source and the initial value simultaneously in a parabolic equation[J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2020, 28(4): 499-516.

[9] Wang Z W, Ruan Z S, Huang H L, et al. Determination of an unknown time-dependent heat source from a nonlocal measurement by finite difference method[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2020, 36(1): 151-165.

[10] 邱淑芳,王泽文,曾祥龙,等. 一类时间分数阶扩散方程中的源项反演解法[J]. 江西师范大学学报(自然科学版),2018,42(6):610-615.

[11] 曹庆发,胡彬,万殊,等. 生物传热方程中灌注率函数的数值反演算法[J]. 井冈山大学学报(自然科学版),2022,43(2):22-27.

[12] 黄何露,王泽文,阮周生,等. 一类扩散方程寻源反问题的有限差分法[J]. 赣南师范大学学报,2018,39(3):20-23.

[13] 胡健伟,汤怀民. 微分方程数值方法[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2007.

[14] 王爱华. 基于遗传算法的改进及在非线性方程组的应用研究[J]. 青海师范大学学报(自然科学版),2015,31(1):21-25.

[15] 郑义. 基于遗传算法的多址通信信道编码优化方法[J]. 科技通报,2019,35(8):121-124.

[16] 彭颖,朱南海. 基于遗传算法的数据最大熵概率分布计算[J]. 南昌大学学报(工科版),2020,42(1):40-45.

(责任编辑:康　锋)