浙江理工大学学报，2022，47(6)：941-949
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2022.06.018

Hopf 双 Ore 扩张的余乘和对极

雷思佳，沈　远
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：为丰富 Hopf 代数的构造方法以及获得更多 Hopf 代数实例，引入一般的 Hopf(右)双 Ore 扩张，刻画该扩张的 Hopf 代数结构。通过余结合性、余单位性和次数的对比，得到 Hopf(右)双 Ore 扩张余乘应具有的 3 种形式；利用对极是反代数同态，获得 Hopf(右)双 Ore 扩张对极的形式。结果表明：Hopf(右)双 Ore 扩张中添加的变量在余乘与对极作用下均不包含二元多项式，具有较为简洁的形式。该结果可为后续 Hopf 代数构造提供帮助。

关键词：Hopf 代数；双 Ore 扩张；Hopf 双 Ore 扩张；余乘；对极
中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2022) 11-0941-09

The comultiplications and antipodes of Hopf double Ore extensions

LEI Sijia，*SHEN Yuan*
(School of Science，Zhengjiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：In order to enrich construction methods for Hopf algebras and obtain more examples of Hopf algebras，the general Hopf (right) double Ore extension is proposed. We aim to describe the Hopf structure of this kind of extensions. We show that there are three cases of the comultiplications of Hopf (right) double Ore extensions by coassociativity，counit and an argument of degrees. Using the fact that any antipode is an anti-algebra homomorphism，we obtain the form of the antipodes of Hopf (right) double Ore extensions. The results show that comultiplication and antipode acting on two new indeterminates of (right) double Ore extensions have concise forms which do not involve polynomials in two variables. The result is helpful for construction of Hopf algebras.

Key words：Hopf algebra；double Ore extension；double Hopf Ore extension；comultiplication；antipode

0　引　言

Hopf 代数是代数学的重要研究分支，在代数拓扑、量子群以及量子物理等方面有着重要应用，例如 Hopf 代数可以刻画几何对象和物理系统等的量子对称性，并提供丰富的结构信息帮助深入理解研究对象。研究一些代数上的 Hopf 代数结构是 Hopf 代数研究领域中的一个重要内容，构造和分类 Hopf 代数是研究 Hopf 代数的核心课题。

借鉴结合代数的研究方法是研究 Hopf 代数结构的一种常用途径。对于结合代数，Ore 扩张[1]是一类常用的代数构造方法。具体地，代数 R 的 Ore 扩张，在一元多项式构成的线性空间 $R[x]$上存在一种代数结

收稿日期：2022—06—20　　网络出版日期：2022—09—06
基金项目：国家自然科学基金项目(11701515)
作者简介：雷思佳(1997—　)，女，河南信阳人，硕士研究生，主要从事代数学方面的研究。
通信作者：沈　远，E-mail：yuanshen@zstu.edu.cn

构,其乘法满足 $xr=\sigma(r)x+\delta(r)$,其中:$r\in R$;σ 是 R 的代数自同态;δ 是 σ-导子,即对任意 $a,b\in R$,有 $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$。通常记 Ore 扩张为 $R[x;\sigma,\delta]$。基于该扩张,Panov[2] 提出了一个问题:当 R 是 Hopf 代数时,Ore 扩张 $R[x;\sigma,\delta]$何时具有 Hopf 代数结构,且 R 是它的 Hopf 子代数? 同时,称满足问题中要求的 Hopf 代数 $R[x;\sigma,\delta]$是 R 的 Hopf Ore 扩张。Panov[2] 在余乘满足 $\Delta(x)=a_1\otimes x+x\otimes a_2$,$a_1,a_2\in R$ 的条件下,给出了 Hopf Ore 扩张存在的充要条件。

然而,有具体实例表明 Hopf Ore 扩张的余乘并不总是满足上述假设。因此,找出 Hopf Ore 扩张的运算形式是研究该类扩张的基础。Brown 等[3] 证明:若 $R[x;\sigma,\delta]$是 R 的 Hopf Ore 扩张且 $R\otimes R$ 是整环,则余乘和对极满足 $\Delta(x)=s(1\otimes x)+t(x\otimes 1)+v(x\otimes x)+w$,$S(x)=\alpha x+\beta$,其中:$s,t,v,w\in R\otimes R$,$\alpha,\beta\in R$。在此基础上,Huang[4] 在附加 R 是诺特的条件下证明:经适当变量替换后,余乘可简化为 $\Delta(x)=s\otimes x+x\otimes 1+w$,其中:$w\in R\otimes R$,$s$ 是 R 的群像元。

Zhuang[5] 率先系统研究了 Gelfand-Kirillov 维数有限的连通仿射 Hopf 代数。随着研究的深入,研究者们发现,Hopf Ore 扩张在连通 Hopf 代数的研究,特别是在分类工作中起着十分重要的作用[6-8]。Zhou 等[9] 证明:设 k 是特征为 0 的域,如果 H 是 k 上 Gelfand-Kirillov 维数有限的连通分次 Hopf 代数,那么 H 是 k 的累次 Hopf Ore 扩张。因此寻找更多的 Hopf 代数构造方法对深入理解 Hopf 代数具有重要意义。

作为 Ore 扩张的推广,Zhang 等[10] 提出了一种同时添加两个变量的代数构造方法,被称为(右)双 Ore 扩张。一般(右)双 Ore 扩张相较于两次 Ore 扩张能够获得更多的代数类[11-12]。于是,自然地对应 Hopf Ore 扩张,引入 Hopf(右)双 Ore 扩张,有助于获得更多的 Hopf 代数。特别地,当 Hopf 代数 R 添加变量 y_1 和 y_2 的 Hopf 右双 Ore 扩张的余乘满足以下条件:

$$\Delta(y_1)=y_1\otimes 1+a_1\otimes y_1,\ \Delta(y_2)=y_2\otimes 1+a_2\otimes y_2,$$

其中 $a_1,a_2\in R$,李启宁[13] 给出了这种情况下 Hopf 右双 Ore 扩张成立的必要条件,并讨论了连通性、环结构等基本性质。

然而,对于一般的 Hopf(右)双 Ore 扩张,余乘应具有更丰富和复杂的选取可能性。Wang 等[14] 提到如果能够深入理解 Hopf(右)双 Ore 扩张理论,有助于对特征为 0 的域上 Gelfand-Kirillov 维数为 3 的仿射非 PI 点态 Hopf 整环进行完全分类。因此,给出 Hopf(右)双 Ore 扩张的运算形式,对该类扩张的应用具有帮助。本文利用 Hopf 代数的余代数和对极性质,给出 Hopf(右)双 Ore 扩张余乘和对极满足的具体条件。

本文约定:k 表示域,本文中所有的代数和 Hopf 代数都表示为域 k 上的,R 和 T 表示不同的代数,张量 $\otimes$ 表示 $\otimes_k$;Δ 表示 Hopf 代数的余乘,ε 表示 Hopf 代数的余单位,S 表示 Hopf 代数的对极,其他 Hopf 代数相关的符号和术语可参考文献[15]。

1 预备知识

定义 1[10] 设 T 是由代数 R 和两个变量 y_1 和 y_2 生成的代数,并满足条件:

a)变量$\{y_1,y_2\}$满足关系:

$$y_2y_1=p_{12}y_1y_2+p_{11}y_1^2+\tau_1y_1+\tau_2y_2+\tau_0 \tag{1}$$

其中:$\{p_{12},p_{11}\}\subseteq k$,$\{\tau_1,\tau_2,\tau_0\}\subseteq R$;

b)$T=\sum\limits_{i,j\geqslant 0}Ry_1^iy_2^j$ 是以$\{y_1^iy_2^j\mid i\geqslant 0,j\geqslant 0\}$为基的自由左 R-模;

c)$y_1R+y_2R\subseteq Ry_1+Ry_2+R$,

则称 T 是 R 的右双 Ore 扩张。

设 T 是 R 的右双 Ore 扩张,则条件 c)等价于存在两个线性映射:

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}:R\to M_{2\times 2}(R),\delta=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{pmatrix}:R\to M_{2\times 1}(R),$$

使得

$$y_ur=\sigma_{u1}(r)y_1+\sigma_{u2}(r)y_2+\delta_u(r) \tag{2}$$

其中:$r\in R$,$u=1,2$,$M_{2\times 2}(R)$和 $M_{2\times 1}(R)$分别表示 R 上所有 2 行 2 列和所有 2 行 1 列矩阵构成的集合。

由条件 b)，σ 是代数同态，δ 是 σ-导子，即对任意 $r,s\in R$，有：

$$\delta(rs)=\sigma(r)\delta(s)+\delta(r)s。$$

于是，通常记右双 Ore 扩张 $T=R_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$，其中：$P=\{p_{12},p_{11}\}$，$\tau=\{\tau_1,\tau_2,\tau_0\}$。

定义 2[10]　设 T 是由代数 R 和两个变量 y_1 和 y_2 生成的代数，并满足条件：

a)变量 $\{y_1,y_2\}$ 满足关系：

$$y_1y_2=p'_{12}y_2y_1+p'_{11}y_1^2+y_1\tau'_1+y_2\tau'_2+\tau'_0,$$

其中：$\{p'_{12},p'_{11}\}\subseteq k$，$\{\tau'_1,\tau'_2,\tau'_0\}\subseteq R$；

b)$T=\sum\limits_{n_1,n_2\geqslant 0}y_2^{n_1}y_1^{n_2}R$ 是以 $\{y_2^{n_1}y_1^{n_2}\mid n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0\}$ 为基的自由右 R－模；

c)$Ry_1+Ry_2\subseteq y_1R+y_2R+R$，

则称 T 是 R 的左双 Ore 扩张。

定义 3[10]　如果代数 T 既是代数 R 的右双 Ore 扩张，又是 R 的左双 Ore 扩张，且这两种扩张中变量集 $\{y_1,y_2\}$ 相同，则称 T 是 R 的双 Ore 扩张。

定义 4[10]　设 $\sigma:R\to M_{2\times 2}(R)$ 是代数同态，如果存在代数同态：

$$\phi=\begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{pmatrix}:R\to M_{2\times 2}(R),$$

使得

$$\begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\phi_{11} & \phi_{12}\\ \phi_{21} & \phi_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Id_R & 0\\ 0 & Id_R\end{pmatrix},$$

其中：Id_R 是 R 上的恒等变换，则称 σ 是可逆的。

定义 5　如果集合 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上存在一个偏序，满足：$(s,t)<(s',t')$，当且仅当 $s+t<s'+t'$，或 $s+t=s'+t'$ 且 $t<t'$，则称该偏序为集合 $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ 上的分次反字典序，其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集。

设 $T=R_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是代数 R 的右双 Ore 扩张。规定对任意 $a\in R$ 有 $\deg(a)=0$，而 $\deg(y_1)=\deg(y_2)=1$。因为 T 中元素都可表示成代数 R 上由变量 y_1 和 y_2 构成的二元多项式，所以规定 T 中零多项式的次数为 $-\infty$；任一非零单项式的次数为 $\deg(ay_1^iy_2^j)=i+j$，其中：a 为 R 中非零元，i 和 j 为非负整数；T 中任一非零元素 $\sum a_{ij}y_1^iy_2^j$ 的次数为：

$$\deg(\sum a_{ij}y_1^iy_2^j)=\max\{\deg(a_{ij}y_1^iy_2^j)\}。$$

对张量积 $T\otimes T$ 中的元素 $\sum\limits_i f_i\otimes g_i$，规定：

$$\deg_1(\sum_i f_i\otimes g_i)=\max_i\{\deg(f_i)\},\ \deg_2(\sum_i f_i\otimes g_i)=\max_i\{\deg(g_i)\}。$$

类似地，可在 $T\otimes T\otimes T$ 上分别定义 $\deg_i$，$i=1,2,3$。

定义 6　设 R 是 Hopf 代数，$T=R_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是代数 R 的右双 Ore 扩张。如果 T 是 Hopf 代数，R 是 T 的 Hopf 子代数，则称 T 是 R 的 Hopf 右双 Ore 扩张。

类似地可以定义 Hopf 左双 Ore 扩张和 Hopf 双 Ore 扩张。本文主要讨论 Hopf 右双 Ore 扩张的情形，Hopf 左双 Ore 扩张和 Hopf 双 Ore 扩张的相关结果可类似得到。

2　Hopf 右双 Ore 扩张的余乘

引理 1　设 $T=R_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是代数 R 的右双 Ore 扩张。若 R 是整环，$p_{12}\neq 0$ 且 σ 可逆，则对于任意 $f,g\in T$ 有 $\deg(fg)=\deg(f)+\deg(g)$ 成立。

证明　只需说明当 f 和 g 分别为 T 的单项式时结论成立即可。当 f 和 g 中至少有一个为零，则结论显然成立。下设 f 和 g 都不为零且 s、t、s'、t'、i、j、i'、j' 是任意非负整数。

首先，证明 $\deg(y_1^sy_2^ty_1^{s'}y_2^{t'})=s+t+s'+t'$。

对任意非负整数 s 和 t，由式(1)$y_2y_1=p_{12}y_1y_2+p_{11}y_1^2+\tau_1y_1+\tau_2y_2+\tau_0$ 可计算得：

$$y_2^t y_1^s = p_{12}^{st} y_1^s y_2^t + \sum_{l=0}^{t-1} \alpha_l y_1^{s+t-l} y_2^l + h,$$

其中：$\alpha_l \in k, h \in T$ 且 $\deg h < s+t$。由于 $p_{12} \neq 0$，从而 $\deg(y_2^t y_1^s) = s+t$，所以有：

$$\deg(y_1^s y_2^t y_1^{s'} y_2^{t'}) = s + t + s' + t' \tag{3}$$

其次，证明 $\deg(y_u^n a) = n$，其中 $u = 1, 2$。

对任意非零元 $a \in R$，由 σ 可逆，可得式(2)中的 $\sigma_{u1}(a)$ 和 $\sigma_{u2}(a)$ 至少有一项非零。所以有 $\deg(y_u a) = 1$。假设对任意正整数 j，有 $\deg(y_u^j a) = j$，即：

$$y_u^j a = a_{s_0 t_0} y_1^{s_0} y_2^{t_0} + \sum_{(s,t)<(s_0,t_0)} a_{st} y_1^s y_2^t,$$

其中：s_0 和 t_0 是非负整数满足 $s_0 + t_0 = j$，$a_{s_0 t_0}, a_{st} \in k$，且 $a_{s_0 t_0} \neq 0$。于是

$$y_u^{j+1} a = y_u a_{s_0 t_0} y_1^{s_0} y_2^{t_0} + \sum_{(s,t)<(s_0,t_0)} y_u a_{st} y_1^s y_2^t = \sigma_{u1}(a_{s_0 t_0}) y_1^{s_0+1} y_2^{t_0} + \sigma_{u2}(a_{s_0 t_0}) y_2 y_1^{s_0} y_2^{t_0} + \delta_u(a_{s_0 t_0}) y_1^{s_0} y_2^{t_0} + \sum_{(s,t)<(s_0,t_0)} \sigma_{u1}(a_{st}) y_1^{s+1} y_2^t + \sum_{(s,t)<(s_0,t_0)} \sigma_{u2}(a_{st}) y_2 y_1^s y_2^t + \sum_{(s,t)<(s_0,t_0)} \delta_u(a_{st}) y_1^s y_2^t。$$

由式(3)知 $\deg(y_u^{j+1} a) \leqslant j+1$。又因为 σ 可逆，所以 $\sigma_{u1}(a_{s_0 t_0})$ 和 $\sigma_{u2}(a_{s_0 t_0})$ 中至少有一个非零。结合式(3)可得，$\deg(y_u^{j+1} a) = j+1$。所以，对任意非负整数 n，有

$$\deg(y_u^n a) = n \tag{4}$$

综上所述，当 f 和 g 分别为 T 的单项式时，对任意非零元 $a, a' \in R$ 有 $\deg(fg) = \deg((a y_1^i y_2^j)(a' y_1^{i'} y_2^{j'})) = i + j + i' + j' = \deg(a y_1^i y_2^j) + \deg(a' y_1^{i'} y_2^{j'}) = \deg(f) + \deg(g)$。由此完成证明。

本文以下部分总是假设 R 是 Hopf 代数。设 $T = R_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 是 R 的 Hopf 右双 Ore 扩张。记 T 上的余乘为：

$$\Delta(y_u) = \sum_{i,j,s,t \geqslant 0} w_{ijst}^{(u)} y_1^i y_2^j \otimes y_1^s y_2^t \tag{5}$$

其中：$w_{ijst}^{(u)} \in R \otimes R$，$u = 1, 2$，$i, j, s, t \geqslant 0$。对任意 $u = 1, 2$，记：

$$B_u = \{(i,j) \mid w_{ijst}^{(u)} \neq 0\},\ C_u = \{(s,t) \mid w_{ijst}^{(u)} \neq 0\}。$$

设 (i_u, j_u) 和 (s_u, t_u) 分别是集合 B_u 和 C_u 中在分次反字典序下的最大元。于是，

$$\deg_1(\Delta(y_u)) = i_u + j_u, \deg_2(\Delta(y_u)) = s_u + t_u \tag{6}$$

由 Hopf 代数的余单位性

$$y_u = (\varepsilon \otimes id)\Delta(y_u) = (id \otimes \varepsilon)\Delta(y_u),$$

可得：$(1,0) \in B_1$，$(1,0) \in C_1$，$(0,1) \in B_2$，$(0,1) \in C_2$。

引理 2 设 $T = R_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 是 R 的 Hopf 右双 Ore 扩张，其中 $p_{12} \neq 0$ 且 σ 可逆。若 R 是整环，则对任意非负整数 p 和 q 有：

$$\deg_1(\Delta(y_1^p y_2^q)) = p(i_1 + j_1) + q(i_2 + j_2),\ \deg_2(\Delta(y_1^p y_2^q)) = p(s_1 + t_1) + q(s_2 + t_2)。$$

证明 由于余乘是代数同态，所以：

$$\Delta(y_1^p y_2^q) = \Delta(y_1)^p \Delta(y_2)^q = \Big(\sum_{i,j,s,t \geqslant 0} w_{ijst}^{(1)} y_1^i y_2^j \otimes y_1^s y_2^t\Big)^p \Big(\sum_{i,j,s,t \geqslant 0} w_{ijst}^{(2)} y_1^i y_2^j \otimes y_1^s y_2^t\Big)^q。$$

因为 R 是整环，所以由式(6)和引理 1 可得结论成立。

定理 1 设 $T = R_P[y_1, y_2; \sigma, \delta, \tau]$ 是 R 的 Hopf 右双 Ore 扩张，其中 $p_{12} \neq 0$ 且 σ 可逆。若 $R \otimes R$ 是整环，则余乘有以下 3 种情形：

情形 1：

$$\Delta(y_1) = w_{0101}^{(1)}(y_2 \otimes y_2) + w_{0110}^{(1)}(y_2 \otimes y_1) + w_{0100}^{(1)}(y_2 \otimes 1) + w_{1001}^{(1)}(y_1 \otimes y_2) + w_{1010}^{(1)}(y_1 \otimes y_1) + w_{1000}^{(1)}(y_1 \otimes 1) + w_{0001}^{(1)}(1 \otimes y_2) + w_{0010}^{(1)}(1 \otimes y_1) + w_{0000}^{(1)}(1 \otimes 1),$$

$$\Delta(y_2) = w_{0101}^{(2)}(y_2 \otimes y_2) + w_{0110}^{(2)}(y_2 \otimes y_1) + w_{0100}^{(2)}(y_2 \otimes 1) + w_{1001}^{(2)}(y_1 \otimes y_2) + w_{1010}^{(2)}(y_1 \otimes y_1) + w_{1000}^{(2)}(y_1 \otimes 1) + w_{0001}^{(2)}(1 \otimes y_2) + w_{0010}^{(2)}(1 \otimes y_1) + w_{0000}^{(2)}(1 \otimes 1)。$$

情形 2:

$$\Delta(y_1)=w_{1010}^{(1)}(y_1\otimes y_1)+w_{1000}^{(1)}(y_1\otimes 1)+w_{0010}^{(1)}(1\otimes y_1)+w_{0000}^{(1)}(1\otimes 1),$$

$$\Delta(y_2)=\sum_{i=0}^{i_2}w_{i001}^{(2)}(y_1^i\otimes y_2)+\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{s=0}^{s_2}w_{i0s0}^{(2)}(y_1^i\otimes y_1^s)+\sum_{s=0}^{s_2}w_{01s0}^{(2)}(y_2\otimes y_1^s)+w_{0101}^{(2)}(y_2\otimes y_2),$$

其中:$i_2\geqslant 2$ 或 $s_2\geqslant 2$。

情形 3:

$$\Delta(y_1)=\sum_{t=0}^{t_1}\sum_{j=0}^{j_1}w_{0j0t}^{(1)}(y_2^j\otimes y_2^t)+\sum_{t=0}^{t_1}w_{100t}^{(1)}(y_1\otimes y_2^t)+\sum_{j=0}^{j_1}w_{0j10}^{(1)}(y_2^j\otimes y_1)+w_{1010}^{(1)}(y_1\otimes y_1),$$

$$\Delta(y_2)=w_{0101}^{(2)}(y_2\otimes y_2)+w_{0100}^{(2)}(y_2\otimes 1)+w_{0001}^{(2)}(1\otimes y_2)+w_{0000}^{(2)}(1\otimes 1),$$

其中:$j_1\geqslant 2$ 或 $t_1\geqslant 2$。

证明　任取 $u\in\{1,2\}$,从式(5)出发可得:

$$(\Delta\otimes 1)\Delta(y_u)=\sum_{i,j,s,t\geqslant 0}((\Delta\otimes 1)(w_{ijst}^{(u)}))(\Delta(y_1^iy_2^j)\otimes y_1^sy_2^t)\tag{7}$$

因为 $R\otimes R$ 是整环,所以:

$$\deg_3((\Delta\otimes 1)\Delta(y_u))=s_u+t_u\tag{8}$$

另一方面有:

$$(1\otimes\Delta)\Delta(y_u)=\sum_{i,j,s,t\geqslant 0}((1\otimes\Delta)(w_{ijst}^{(u)}))(y_1^iy_2^j\otimes\Delta(y_1^sy_2^t))\tag{9}$$

第一步,确定 B_1、B_2 和 C_1、C_2 元素构成范围。

对任意$(s,t)\in C_u$,由引理 2 知,$\deg_2(\Delta(y_1^sy_2^t))=s(s_1+t_1)+t(s_2+t_2)$。因为存在某个 $w_{ijst}^{(u)}\neq 0$,所以有 $s(s_1+t_1)+t(s_2+t_2)\leqslant\deg_3((1\otimes\Delta)\Delta(y_u))$。由余乘的余结合性和式(8),有:

$$s(s_1+t_1)+t(s_2+t_2)\leqslant s_u+t_u\tag{10}$$

取(s,t)为(s_u,t_u),由式(10)可得 $s_u(s_1+t_1-1)+t_u(s_2+t_2-1)\leqslant 0$,其中:$s_1$、$t_1$、$s_2$、$t_2$ 为非负整数,且 $s_1+t_1\geqslant 1$,$s_2+t_2\geqslant 1$。因此式(10)中等号成立,进一步有 $s_u(s_1+t_1-1)=t_u(s_2+t_2-1)=0$。然后分成如下 3 种情形,讨论 C_1 和 C_2 中的元素组成。

a)当 $s_1+t_1=1$,$s_2+t_2=1$ 时,

对$(s,t)\in C_1$ 或 C_2,均可由式(10)得 $s+t\leqslant 1$,得:

$$\{(1,0)\}\subseteq C_1\subseteq\{(0,0),(1,0),(0,1)\},\ \{(0,1)\}\subseteq C_2\subseteq\{(0,0),(1,0),(0,1)\}。$$

b)当 $s_1+t_1=1$,$s_2+t_2\neq 1$ 时,由 $t_u(s_2+t_2-1)=0$,则有:$s_1=1$,$t_1=0$,$s_2\geqslant 2$,$t_2=0$。

设$(s,t)\in C_1$,因为$(1,0)$是 C_1 中的最大元,所以得$\{(1,0)\}\subseteq C_1\subseteq\{(0,0),(1,0)\}$。

设$(s,t)\in C_2$,由式(10)得 $s+(t-1)s_2\leqslant 0$,得:

$$\{(0,1),(s_2,0)\}\subseteq C_2\subseteq\{(s,0)\mid s\leqslant s_2\}\cup\{(0,1)\}。$$

c)当 $s_1+t_1\neq 1$,$s_2+t_2=1$ 时,由 $s_u(s_1+t_1-1)=0$,则有:$s_1=0$,$t_1\geqslant 2$,$s_2=0$,$t_2=1$。

设$(s,t)\in C_1$,由式(10)得$(s-1)t_1+t\leqslant 0$。因此,

$$\{(1,0),(0,t_1)\}\subseteq C_1\subseteq\{(0,t)\mid t\leqslant t_1\}\cup\{(1,0)\}。$$

设$(s,t)\in C_2$,由式(10)得 $st_1+t\leqslant 1$。从而$\{(0,1)\}\subseteq C_2\subseteq\{(0,0),(0,1)\}$。

同理,利用 $\deg_1((1\otimes\Delta)\Delta(y_u))=\deg_1((\Delta\otimes 1)\Delta(y_u))$,讨论 B_1 和 B_2 中的元素构成。

d)当 $i_1+j_1=1$,$i_2+j_2=1$ 时,有:

$$\{(1,0)\}\subseteq B_1\subseteq\{(0,0),(1,0),(0,1)\},\ \{(0,1)\}\subseteq B_2\subseteq\{(0,0),(1,0),(0,1)\}。$$

e)当 $i_1=1$,$j_1=0$,$i_2\geqslant 2$,$j_2=0$ 时,有:

$$\{(1,0)\}\subseteq B_1\subseteq\{(0,0),(1,0)\},\ \{(i_2,0),(0,1)\}\subseteq B_2\subseteq\{(i,0)\mid i\leqslant i_2\}\cup\{(0,1)\}。$$

f)当 $i_1=0$,$j_1\geqslant 2$,$i_2=0$,$j_2=1$ 时,有:

$\{(0,j_1),(1,0)\}\subseteq B_1\subseteq\{(0,j)\mid j\leqslant j_1\}\cup\{(1,0)\}$，$\{(0,1)\}\subseteq B_2\subseteq\{(0,0),(0,1)\}$。

第二步，由以上的结果得 B_1、B_2 和 C_1、C_2 共有 9 种组合。通过对每种组合进行更细致地讨论，给出余乘形式。

再次利用式(7)和式(9)得：

$$\deg_2((\Delta\otimes 1)\Delta(y_u))=\max_{(i,j)\in B_u}\{i(s_1+t_1)+j(s_2+t_2)\},$$
$$\deg_2((1\otimes\Delta)\Delta(y_u))=\max_{(s,t)\in C_u}\{s(i_1+j_1)+t(i_2+j_2)\}。$$

由余结合性得，对于任意 $u=1,2$ 有：

$$\max_{(i,j)\in B_u}\{i(s_1+t_1)+j(s_2+t_2)\}=\max_{(s,t)\in C_u}\{s(i_1+j_1)+t(i_2+j_2)\}\tag{11}$$

对 a)和 d)组合：当 $i_1+j_1=i_2+j_2=s_1+t_1=s_2+t_2=1$ 时，易得：

$\max\limits_{(s,t)\in C_1}\{s+t\}=\max\limits_{(i,j)\in B_1}\{i+j\}=1$ 和 $\max\limits_{(s,t)\in C_2}\{s+t\}=\max\limits_{(i,j)\in B_2}\{i+j\}=1$。

因此式(11)总是成立。从而余乘形式为：

$$\begin{cases}\Delta(y_1)=w^{(1)}_{0101}(y_2\otimes y_2)+w^{(1)}_{0110}(y_2\otimes y_1)+w^{(1)}_{0100}(y_2\otimes 1)+\\ \qquad w^{(1)}_{1001}(y_1\otimes y_2)+w^{(1)}_{1010}(y_1\otimes y_1)+w^{(1)}_{1000}(y_1\otimes 1)+\\ \qquad w^{(1)}_{0001}(1\otimes y_2)+w^{(1)}_{0010}(1\otimes y_1)+w^{(1)}_{0000}(1\otimes 1),\\ \Delta(y_2)=w^{(2)}_{0101}(y_2\otimes y_2)+w^{(2)}_{0110}(y_2\otimes y_1)+w^{(2)}_{0100}(y_2\otimes 1)+\\ \qquad w^{(2)}_{1001}(y_1\otimes y_2)+w^{(2)}_{1010}(y_1\otimes y_1)+w^{(2)}_{1000}(y_1\otimes 1)+\\ \qquad w^{(2)}_{0001}(1\otimes y_2)+w^{(2)}_{0010}(1\otimes y_1)+w^{(2)}_{0000}(1\otimes 1)\end{cases}\tag{12}$$

对于 a)和 e)组合，当 $i_1=1,j_1=0,i_2\geqslant 2,j_2=0,s_1+t_1=1,s_2+t_2=1$ 时，由式(11)得：

$$\max_{(s,t)\in C_1}\{s+ti_2\}=\max_{(i,j)\in B_1}\{i+j\}=1,\ \max_{(s,t)\in C_2}\{s+ti_2\}=\max_{(i,j)\in B_2}\{i+j\}=i_2。$$

于是有$\{(1,0)\}\subseteq C_1\subseteq\{(0,0),(1,0)\}$和$\{(0,1)\}\subseteq C_2\subseteq\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$，从而余乘形式为：

$$\begin{cases}\Delta(y_1)=w^{(1)}_{1010}(y_1\otimes y_1)+w^{(1)}_{1000}(y_1\otimes 1)+w^{(1)}_{0010}(1\otimes y_1)+w^{(1)}_{0000}(1\otimes 1),\\ \Delta(y_2)=\sum\limits_{i=0}^{i_2}w^{(2)}_{i001}(y_1^i\otimes y_2)+\sum\limits_{i=0}^{i_2}w^{(2)}_{i010}(y_1^i\otimes y_1)+\sum\limits_{i=0}^{i_2}w^{(2)}_{i000}(y_1^i\otimes 1)\\ \qquad +w^{(2)}_{0101}(y_2\otimes y_2)+w^{(2)}_{0110}(y_2\otimes y_1)+w^{(2)}_{0100}(y_2\otimes 1)\end{cases}\tag{13}$$

对 a)和 f)组合：当 $i_1=0,j_1\geqslant 2,i_2=0,j_2=1,s_1+t_1=1,s_2+t_2=1$ 时，由式(11)得：

$$\max_{(s,t)\in C_1}\{sj_1+t\}=\max_{(i,j)\in B_1}\{i+j\}=j_1,\ \max_{(s,t)\in C_2}\{sj_1+t\}=\max_{(i,j)\in B_2}\{i+j\}=1。$$

于是有$\{(1,0)\}\subseteq C_1\subseteq\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$和$\{(0,1)\}\subseteq C_2\subseteq\{(0,0),(0,1)\}$，从而余乘形式为：

$$\begin{cases}\Delta(y_1)=\sum\limits_{j=0}^{j_1}w^{(1)}_{0j01}(y_2^j\otimes y_2)+\sum\limits_{j=0}^{j_2}w^{(1)}_{0j10}(y_2^j\otimes y_1)+\sum\limits_{j=0}^{j_2}w^{(1)}_{0j00}(y_2^j\otimes 1)+\\ \qquad w^{(1)}_{1001}(y_1\otimes y_2)+w^{(1)}_{1010}(y_1\otimes y_1)+w^{(1)}_{1000}(y_1\otimes 1),\\ \Delta(y_2)=w^{(2)}_{0101}(y_2\otimes y_2)+w^{(2)}_{0100}(y_2\otimes 1)+w^{(2)}_{0010}(1\otimes y_2)+w^{(2)}_{0000}(1\otimes 1)\end{cases}\tag{14}$$

对 b)和 d)组合：当 $i_1+j_1=1,i_2+j_2=1,s_1=1,t_1=0,s_2\geqslant 2,t_2=0$ 时，由式(11)得：

$$\max_{(i,j)\in B_1}\{i+js_2\}=\max_{(s,t)\in C_1}\{s+t\}=1,\ \max_{(i,j)\in B_2}\{i+js_2\}=\max_{(s,t)\in C_2}\{s+t\}=s_2。$$

于是有$\{(1,0)\}\subseteq B_1\subseteq\{(0,0),(1,0)\}$和$\{(0,1)\}\subseteq B_2\subseteq\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$，从而余乘形式为：

$$\begin{cases}\Delta(y_1)=w^{(1)}_{1010}(y_1\otimes y_1)+w^{(1)}_{1000}(y_1\otimes 1)+w^{(1)}_{0010}(1\otimes y_1)+w^{(1)}_{0000}(1\otimes 1),\\ \Delta(y_2)=\sum\limits_{s=0}^{s_2}w^{(2)}_{01s0}(y_{\otimes}\, y_1^s)+\sum\limits_{s=0}^{s_2}w^{(2)}_{10s0}(y_1\otimes y_1^s)+\sum\limits_{s=0}^{s_2}w^{(2)}_{00s0}(1\otimes y_1^s)+\\ \qquad w^{(2)}_{0101}(y_2\otimes y_2)+w^{(2)}_{1001}(y_1\otimes y_2)+w^{(2)}_{0001}(1\otimes y_2)\end{cases}\tag{15}$$

对 b)和 e)组合：当 $i_1=1,j_1=0,i_2\geqslant 2,j_2=0,s_1=1,t_1=0,s_2\geqslant 2,t_2=0$ 时，得：

$$\max_{(i,j)\in B_1}\{i+js_2\}=\max_{(s,t)\in C_1}\{s+ti_2\}=1,\ \max_{(i,j)\in B_2}\{i+js_2\}=\max_{(s,t)\in C_2}\{s+ti_2\}=\max\{i_2,s_2\}。$$

即式(11)总是成立。从而余乘形式为：

$$\begin{cases}\Delta(y_1)=w_{1010}^{(1)}(y_1\otimes y_1)+w_{1000}^{(1)}(y_1\otimes 1)+w_{0010}^{(1)}(1\otimes y_1)+w_{0000}^{(1)}(1\otimes 1),\\ \Delta(y_2)=\sum_{i=0}^{i_2}w_{i001}^{(2)}(y_1^i\otimes y_2)+\sum_{i=0}^{i_2}\sum_{s=0}^{s_2}w_{i0s0}^{(2)}(y_1^i\otimes y_1^s)+\sum_{s=0}^{s_2}w_{01s0}^{(2)}(y_2\otimes y_1^s)+w_{0101}^{(2)}(y_2\otimes y_2)\end{cases}\tag{16}$$

对 b)和 f)组合：当 $i_1=0,j_1\geqslant 2,i_2=0,j_2=1,s_1=1,t_1=0,s_2\geqslant 2,t_2=0$ 时，代入式(11)得：

$$\max_{(i,j)\in B_1}\{i+js_2\}=s_2j_1\neq j_1=\max_{(s,t)\in C_1}\{sj_1+t\},\ \max_{(i,j)\in B_2}\{i+js_2\}=s_2\neq s_2j_1=\max_{(s,t)\in C_2}\{sj_1+t\},$$

所以该组合不存在。

对 c)和 d)组合：当 $i_1+j_1=1,i_2+j_2=1,s_1=0,t_1\geqslant 2,s_2=0,t_2=1$ 时，由式(11)得

$$\max_{(i,j)\in B_1}\{it_1+j\}=\max_{(s,t)\in C_1}\{s+t\}=t_1,\ \max_{(i,j)\in B_2}\{it_1+j\}=\max_{(s,t)\in C_2}\{s+t\}=1。$$

于是有$\{(1,0)\}\subseteq B_1\subseteq\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$，$\{(0,1)\}\subseteq B_2\subseteq\{(0,0),(0,1)\}$，从而余乘形式为：

$$\begin{cases}\Delta(y_1)=\sum_{t=0}^{t_1}w_{010t}^{(1)}(y_2\otimes y_2^t)+\sum_{t=0}^{t_1}w_{100t}^{(1)}(y_1\otimes y_2^t)+\sum_{t=0}^{t_1}w_{000t}^{(1)}(1\otimes y_2^t)+\\ \qquad w_{0110}^{(1)}(y_2\otimes y_1)+w_{1010}^{(1)}(y_1\otimes y_1)+w_{0010}^{(1)}(1\otimes y_1),\\ \Delta(y_2)=w_{0101}^{(2)}(y_2\otimes y_2)+w_{0100}^{(2)}(y_2\otimes 1)+w_{0001}^{(1)}(1\otimes y_2)+w_{0000}^{(1)}(1\otimes 1)\end{cases}\tag{17}$$

对 c)和 e)组合：与 b)和 f)的组合类似，此时式(11)不成立，不构成 Hopf 代数。

对 c)和 f)组合：当 $i_1=0,j_1\geqslant 2,i_2=0,j_2=1,s_1=0,t_1\geqslant 2,s_2=0,t_2=1$ 时，代入(11)式成立。从而余乘形式为：

$$\begin{cases}\Delta(y_1)=\sum_{t=0}^{t_1}\sum_{j=0}^{j_1}w_{0j0t}^{(1)}(y_2^j\otimes y_2^t)+\sum_{t=0}^{t_1}w_{100t}^{(1)}(y_1\otimes y_2^t)+\sum_{j=0}^{j_1}w_{0j10}^{(1)}(y_2^j\otimes y_1)+w_{1010}^{(1)}(y_1\otimes y_1),\\ \Delta(y_2)=w_{0101}^{(2)}(y_2\otimes y_2)+w_{0100}^{(2)}(y_2\otimes 1)+w_{0001}^{(2)}(1\otimes y_2)+w_{0000}^{(2)}(1\otimes 1)\end{cases}\tag{18}$$

综上所述式(12)为情形 1，式(13)，式(15)和式(16)组合得情形 2，式(14)，式(17)和式(18)组合得情形 3。

注 1　Zhang 等[10]证明：当 $T=R_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$是 R 的双 Ore 扩张时，则 $p_{12}\neq 0$ 且 σ 可逆。因此，Hopf 整环的 Hopf 双 Ore 扩张一定具有定理 1 的余乘形式。

3　Hopf 右双 Ore 扩张的对极

引理 3　设 T 是 Hopf 代数 R 的 Hopf 右双 Ore 扩张。若对极 S 是 T 上的双射，则 T 是代数 R 关于变量 $S(y_1)$和 $S(y_2)$的 Hopf 左双 Ore 扩张。

证明　因为 $T=\sum_{i,j\geqslant 0}Ry_1{}^iy_2^j$ 且对极 S 是 T 上的双射，所以 $T=\sum_{i,j\geqslant 0}S(y_2)^jS(y_1)^iR$，即 T 由 R，$S(y_1)$和 $S(y_2)$生成。

若 $\sum_{i,j\geqslant 0}S(y_2)^jS(y_1)^ir_{ji}=0$，则 $\sum_{i,j\geqslant 0}S^{-1}(r_{ji})y_1{}^iy_2{}^j=0$。由右双 Ore 扩张的条件 b)得，$r_{ji}=0$。因此 T 是以$\{S(y_2)^jS(y_1)^i\mid j\geqslant 0,i\geqslant 0\}$为基的自由右 R－模。

由式(1)得：

$$S(y_1)S(y_2)=p_{12}S(y_2)S(y_1)+p_{11}S(y_1)^2+S(y_1)S(\tau_1)+S(y_2)S(\tau_2)+S(\tau_0)。$$

对任意 $r\in R$ 以及 $u=1,2$，由式(2)得：

$$\begin{aligned}rS(y_u)&=S(y_uS^{-1}(r))=S(\sigma_{u1}S^{-1}(r)y_1+\sigma_{u2}S^{-1}(r)y_2+\delta_uS^{-1}(r))\\&=S(y_1)S\sigma_{u1}S^{-1}(r)+S(y_2)S\sigma_{u2}S^{-1}(r)+S\delta_uS^{-1}(r)\end{aligned}\tag{19}$$

由式(19)得：

$$RS(y_1)+RS(y_2)\subseteq S(y_1)R+S(y_2)R+R。$$

综上满足定义 2 的条件,所以 T 是代数 R 关于变量 $S(y_1)$ 和 $S(y_2)$ 的左双 Ore 扩张。

定理 2　设 $T=R_P[y_1,y_2;\sigma,\delta,\tau]$ 是 R 的 Hopf 右双 Ore 扩张,其中 $p_{12}\neq 0$ 且 σ 可逆。若 R 是整环且对极 S 是 T 上的双射,则 S 形式如下:

$$S(y_1)=a_1y_1+a_2y_2+a_0,\ S(y_2)=b_1y_1+b_2y_2+b_0,$$

其中:$a_1,a_2,a_0,b_1,b_2,b_0\in R$。

证明　由 T 是 R 的右双 Ore 扩张,设:

$$S(y_1)=\sum_{i,j\geqslant 0}a_{ij}{y_1}^i{y_2}^j,S(y_2)=\sum_{i,j\geqslant 0}b_{ij}y'_1y'_2 \tag{20}$$

其中:$a_{ij},b_{ij}\in R$。记 $\deg(S(y_1))=g,\deg(S(y_2))=h$,且 h,g 为非负整数。由引理 3 可设:

$$y_1=\sum_{p,q\geqslant 0}S(y_2)^pS(y_1)^qc_{pq},y_2=\sum_{e,f\geqslant 0}S(y_2)^eS(y_1)^fd_{ef} \tag{21}$$

其中:$c_{pq},d_{ef}\in R$。令 p_1 和 q_1 分别为集合 $\{p\mid c_{pq}\neq 0\}$ 和 $\{q\mid c_{pq}\neq 0\}$ 中的最大元,e_1 和 f_1 分别为集合 $\{e\mid d_{ef}\neq 0\}$ 和 $\{f\mid d_{ef}\neq 0\}$ 中的最大元。易知,(p_1,q_1) 和 (e_1,f_1) 都不等于 $(0,0)$。

将式(20)代入式(21)得:

$$y_1=\sum_{i,j,p,q\geqslant 0}(b_{ij}y_1^iy_2^j)^p(a_{ij}y_1^iy_2^j)^qc_{pq},\ y_2=\sum_{i,j,e,f\geqslant 0}(b_{ij}y_1^iy_2^j)^e(a_{ij}y_1^iy_2^j)^fd_{ef}。$$

又由引理 1 知 $p_1h+q_1g\leqslant 1,e_1h+f_1g\leqslant 1$。若 h 和 g 中至少有一个为零,那么 $h+g\leqslant 1$ 时,结论显然成立。若 h 和 g 都不为零,那么必有 $p_1+q_1=1,e_1+f_1=1$。具体地,可分为 a)和 d)两种情形:

a)当 $p_1=0$ 时,则 $q_1=1,g=1$。有 a1)和 a2)两种子情形。

a1)若 $e_1=0$,则 $f_1=1,h>0$。于是,

$$S(y_1)=a_{10}y_1+a_{01}y_2+a_{00},\ S(y_2)=\sum_{i+j\geqslant 0}b_{ij}y_1^iy_2^j,$$

$$y_1=S(y_1)c_{01}+c_{00},\ y_2=S(y_1)d_{01}+d_{00}。$$

将 y_1,y_2 的表达式代入 $S(y_2)$,则:

$$\begin{aligned}S(y_2)&=\sum_{i+j\geqslant 0}b_{ij}(S(y_1)c_{01}+c_{00})^i(S(y_1)d_{01}+d_{00})^j\\&=S(\sum_{i+j\geqslant 0}(S^{-1}(d_{01})y_1+S^{-1}(d_{00}))^j(S^{-1}(c_{01})y_1+S^{-1}(c_{00}))^i(S^{-1}(b_{ij})))。\end{aligned}$$

由 S 是双射和引理 1 得 $h=1$,即 $S(y_2)=b_{10}y_1+b_{01}y_2+b_{00}$。

a2)若 $e_1=1$,则 $f_1=0,h=1$。于是,

$$S(y_1)=a_{10}y_1+a_{01}y_2+a_{00},\ S(y_2)=b_{10}y_1+b_{01}y_2+b_{00},$$

$$y_1=S(y_1)c_{01}+c_{00},\ y_2=S(y_2)d_{10}+d_{00}。$$

b)当 $p_1=1$ 时,则 $q_1=0,h=1$。有 b1)和 b2)两种子情形。

b1)若 $e_1=0$,则 $f_1=1,g=1$。于是,

$$S(y_1)=a_{10}y_1+a_{01}y_2+a_{00},\ S(y_2)=b_{10}y_1+b_{01}y_2+b_{00},$$

$$y_1=S(y_2)c_{10}+c_{00},\ y_2=S(y_1)d_{01}+d_{00}。$$

b2)若 $e_1=1$,则 $f_1=0,g>0$。于是,

$$S(y_1)=\sum_{i+j\geqslant 0}a_{ij}y_1^iy_2^j,\ S(y_2)=b_{10}y_1+b_{01}y_2+b_{00},$$

$$y_1=S(y_2)c_{10}+c_{00},\ y_2=S(y_2)d_{10}+d_{00}。$$

类似于情形 a)的子情形 a1),可得此时 $g=1$,即 $S(y_1)=a_{10}y_1+a_{01}y_2+a_{00}$。

综合以上 4 种情形,结论成立。

4　结　论

本文首先对右双 Ore 扩张中元素赋予次数,并讨论乘法与次数的关系,而后利用 Hopf 代数的余结合性和余单位性进行次数对比,给出 Hopf 右双 Ore 扩张余乘的形式。其次,当 Hopf 右双 Ore 扩张的对极是反

代数自同构时，获得 Hopf 右双 Ore 扩张对极的形式。可以发现，文献[13]中的余乘形式是本文所得形式的特例。后续可以在此基础上研究 Hopf(右)双 Ore 扩张的基本性质，并将其运用于 Hopf 代数的分类。

参考文献：

[1] Ore O. Theory of non-commutative polynomials[J]. The Annals of Mathematics，1933，34(3)：480-508.

[2] Panov A N. Ore extensions of Hopf algebras[J]. Mathematical Notes，2003，74(3)：401-410.

[3] Brown K A，O'Hagan S，Zhang J J，et al. Connected Hopf algebras and iterated Ore extensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2015，219(6)：2405-2433.

[4] Huang H D. Hopf Ore extensions[J]. Algebras and Representation Theory，2020，23(4)：1477-1486.

[5] Zhuang G B. Properties of pointed and connected Hopf algebras of finite Gelfand-Kirillov dimension[J]. Journal of the London Mathematical Society，2013，87(3)：877-898.

[6] Wang D G，Zhang J J，Zhuang G. Connected Hopf algebras of Gelfand-Kirillov dimension four[J]. Transactions of the American Mathematical Society，2015，367(8)：5597-5632.

[7] Goodearl K R，Zhang J J. Non-affine Hopf algebra domains of Gelfand-Kirillov dimension two[J]. Glasgow Mathematical Journal，2017，59(3)：563-593.

[8] Brown K A，Zhang J J. Survey on Hopf algebras of GK-dimension 1 and 2[EB/OL]. (2020-03-31)[2022-06-20]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.14251.

[9] Zhou G S，Shen Y，Lu D M. The structure of connected (graded) Hopf algebras[J]. Advances in Mathematics，2020，372：107292.

[10] Zhang J J，Zhang J. Double Ore extensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra，2008，212(12)：2668-2690.

[11] Carvalho P A A B，Lopes S A，Matczuk J. Double Ore extensions versus iterated Ore extensions[J]. Communications in Algebra，2011，39(8)：2838-2848.

[12] Zhang J J，Zhang J. Double extension regular algebras of type (14641) [J]. Journal of Algebra，2009，322(2)：373-409.

[13] 李启宁. Hopf 代数的二重 Ore 扩张[J]. 数学年刊 A 辑，2021，42(4)：441-458.

[14] Wang D G，Zhang J J，Zhuang G. Primitive cohomology of Hopf algebras[J]. Journal of Algebra，2016，464：36-96.

[15] Sweedler M E. Hopf Algebras[M]. New York：W A Benjamin Inc，1969：3-108.

（责任编辑：康　锋）