浙江理工大学学报，2022，47(6)：931-940
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2022.06.017

带有输运型噪声的三维 Euler 型 Leray-α 模型解的存在性及极限行为

龚园园，陈　涌
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：在确定性 Leray-α 模型上添加输运型噪声，构造带有输运型噪声的 Euler 型 Leray-α 模型，研究在三维情况下输运型噪声趋于 0 时该随机 Euler 型 Leray-α 模型解的存在性及极限行为。通过 Galerkin 逼近和紧性方法，探究随机 Euler 型 Leray-α 模型在分布意义下整体弱解的存在性；利用取特殊值的方法，使噪声趋于 0，结合 Prohorov 定理和 Skorokhod 定理探究其解的极限行为。研究结果表明：带有输运型噪声的 Euler 型 Leray-α 模型的解是收敛到确定性 Leray-α 模型的唯一解。该结果解答了 Barbato 等提出噪声趋于 0 时解的极限行为问题。

关键词：随机 Euler 型 Leray-α 模型；输运型噪声；Prohorov 定理；Skorokhod 定理；Galerkin 逼近方法；紧性方法
中图分类号：O211.63　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2022) 11-0931-10

Existence and scaling limit of solutions of Leray-α model of three-dimensional Euler equations with transport noises

GONG Yuanyuan，*CHEN Yong*
(School of Science，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：In this paper，the transport noises were added to the deterministic Leray-α model and the Leray-α model of Euler equations with transport noises was constructed. The existence and scaling limit of solutions of the stochastic Leray-α model of Euler equations were studied in three-dimensional (3D) space when transport noises tended to 0. Through Galerkin approximation and compactness method，we explored the existence of global weak solution (in the sense of distribution) of stochastic Leray-α model of Euler equations. In the meanwhile，the special value method was used to make the noise tend to 0，and the scaling limit of the solution was studied by combining Prohorov's theorem and Skorokhod's theorem. The results show that the solutions of Leray-α model of Euler equations with transport noises converge to the unique solution of the deterministic Leray-α model. This result solves the problem proposed by Barbato et al. of the scaling limit of the solution when the noise tends to zero.

Key words：stochastic Leray-α model of Euler equations；transport noises；Prohorov theorem；Skorokhod theorem；Galerkin approximation method；compactness method

0　引　言

Euler 型 Leray-α 模型是在 Leray-α 模型基础上得到的。Leray-α 模型描述如下：

收稿日期：2022—06—10　　网络出版日期：2022—09—06
基金项目：浙江省自然科学基金项目(LZJWY22E060002)
作者简介：龚园园(1997—　)，女，安徽颍上人，硕士研究生，主要从事随机偏微分方程方面的研究。
通信作者：陈　涌，E-mail:chenyong@zstu.edu.cn

$$\begin{cases}\partial_t \boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-\mu\Delta\boldsymbol{v}+\nabla \boldsymbol{p}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\\ \boldsymbol{v}=(1-\alpha\Delta)\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ 表示在 t 时刻空间方向 $\boldsymbol{x}$ 处的速度场;$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(t,\boldsymbol{x})$ 表示压力场;$\mu>0$ 是对应于雷诺数 Re 倒数的黏度;$\alpha>0$ 表示常数。式(1)在 $\alpha\to0$ 时收敛到 Navier-Stokes 方程,在三维周期边界条件下,Yu 等[1]已证明式(1)解的存在唯一性。

当式(1)中的 $\mu=0$ 时,式(1)变为 Euler 型 Leray-α 模型:

$$\begin{cases}\partial_t \boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla \boldsymbol{p}=0,\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\\ \boldsymbol{v}=(1-\alpha\Delta)\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{2}$$

初速度具有有限能量时,式(2)的整体弱解是存在的。然而,对于空间维数 $D=2$ 和 $D=3$ 时,式(2)解的唯一性仍然是未知的。当 $\alpha=0$,式(2)变为 Euler 方程。在空间维数 $D=2$ 时,Euler 方程解的整体存在性是已知的,唯一性却是未知的;而在 $D=3$ 时,Euler 方程解的整体存在性和唯一性都是未知的[2]。

Barbato 等[3]考虑空间维数 $D=3$ 时,给式(2)添加乘性噪声:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\mathrm{d}t+\nabla \boldsymbol{p}\mathrm{d}t=\circ\,\mathrm{d}W\cdot\nabla\boldsymbol{v},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\\ \boldsymbol{v}=(1-\alpha\Delta)\boldsymbol{u}\end{cases}\tag{3}$$

其中:$\circ\,\mathrm{d}W$ 表示 Stratonovich 微分,W 表示特殊形式的布朗运动。Barbato 等[3]通过傅里叶变换和 Girsanov 公式证明当初始条件为有限能量时,式(3)在分布意义下存在唯一整体弱解。虽然式(2)在空间维数 $D=3$ 时,它的整体弱解唯一性是未知的,但是 Barbato 等[3]通过添加噪声的方法证明了式(3)的弱解具有唯一性。由此可以看出,添加噪声可以改善某些非线性方程的定性性质,类似的已有很多相关文献,例如文献[4-8]。并且 Barbato 等[3]还提出了一个有趣的问题:当噪声趋于 0 时,式(3)的解 $\boldsymbol{v}$ 有什么行为?本文主要围绕这个问题进行探究。

本文主要考虑如下随机 Euler 型 Leray-α 模型:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+[\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{p}]\mathrm{d}t=\varepsilon\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3}\sum\limits_{\beta=1}^{2}\theta_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\circ\nabla\boldsymbol{v}\mathrm{d}W^{\boldsymbol{k},\beta};\\ \boldsymbol{v}=(1-\alpha^2\Delta)\boldsymbol{u};\\ \nabla\cdot\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})=0,t\geqslant0,\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^3;\\ \boldsymbol{u}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_0\end{cases}\tag{4}$$

其中:$\varepsilon=\dfrac{\sqrt{3\mu\backslash2}}{\|\theta_{\cdot}\|_{l^2}}$;$\mathbb{Z}_0^3=\mathbb{Z}^3\backslash\{0\}$ 是非零格点;$\theta_{\cdot}\in l^2$ 并且 θ 有且只有有限个非零分量;$W^{\boldsymbol{k},\beta}$ 具体定义将在下一节介绍;$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}$ 是定义在 $\mathbb{T}^3$ 上的向量场;$\mathbb{T}^3=\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ 是周期三维环面,$\boldsymbol{u}_0$ 表示初始时刻的速度。

式(4)添加的噪声是输运型噪声[4],有许多关于带有输运型噪声的随机偏微分模型收敛到其对应确定性模型的文献,例如文献[9-11]。针对文献[3]提出的问题,本文希望得到式(4)收敛到其对应的确定性模型。

本文首先构造 Galerkin 逼近序列,再对其进行估计和紧性分析,证明逼近序列的分布在空间 $C([0,T],H^{-1}(\mathbb{T}^3))$ 中是紧的,那么就可以利用 Prohorov 定理和 Skorokhod 定理证明式(4)是存在弱解的;其次取特殊的 $\theta_{\boldsymbol{k}}^N$,使得当 $N\to\infty$ 时,噪声趋于 0,再利用 Prohorov 定理和 Skorokhod 证明该随机 3D Euler 型 Leray-α 模型收敛到对应的确定性 Leray-α 模型。

1 随机三维 Euler 型 Leray-α 模型解的存在性

本文用 Galerkin 逼近和紧性方法来证明式(4)存在弱解。在给出证明之前,先介绍相关符号。

1.1 符号介绍

设 $\mathbb{T}=[0,2\pi]^3$。用 $C_{\mathrm{per}}^{\infty}(\mathbb{T})$ 表示 $\mathbb{T}$ 一周期 C^{∞} 向量场空间。定义空间

$$\Psi\coloneqq\left\{\boldsymbol{u}\in C_{\mathrm{per}}^{\infty}(\mathbb{T});\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\int\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x=0\right\}。$$

用 H 和 V 表示空间 $L^2(\mathbb{T}^3)$ 和 $H^1(\mathbb{T}^3)$ 中的集合 Ψ 的闭包。那么 H 和 V 是 $L^2(\mathbb{T}^3)$ 和 $H^1(\mathbb{T}^3)$ 中带有内积的希尔伯特空间。本文用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|_H$ 表示空间 H 中的内积和范数。

设 $\mathbb{Z}_0^3=\mathbb{Z}_+^3\cup\mathbb{Z}_-^3$ 是 $\mathbb{Z}_0^3$ 的一个分区,使得

$$\mathbb{Z}_+^3\cap\mathbb{Z}_-^3=\varnothing,\mathbb{Z}_+^3=-\mathbb{Z}_-^3。$$

设 $L_0^2(\mathbb{T}^3,\mathbb{C}^3)$ 是 $\mathbb{T}^3$ 上具有零均值的复值平方可积的函数空间。它有正交基

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^3,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3。$$

对于 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^3$,设 $\{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},1},\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},2}\}$ 是 $\boldsymbol{k}^{\perp}\coloneqq\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^3;\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=0\}$ 的一组正交基,这组正交基使得 $\left\{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},1},\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},2},\dfrac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right\}$ 是 $\mathbb{Z}_0^3$ 的正交基,其中 $\{\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},1},\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},2}\}$ 的选择不是唯一的。对于 $\forall\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_-^3$,本文定义 $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},\beta}=\boldsymbol{a}_{-\boldsymbol{k},\beta}$,$\beta=1,2$。下面定义散度为 0 的向量场为:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}=\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},\beta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^3,\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3,\beta=1,2,$$

那么 $\{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},1},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},2}:\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3\}$ 是具有零均值平方可积无散度向量场 H 的正交基。

设 $\{B^{\boldsymbol{k},\beta}:\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3,\beta=1,2\}$ 是一组独立的实值标准布朗运动,定义本文中的复值布朗运动为:

$$W^{\boldsymbol{k},\beta}=\begin{cases}B^{\boldsymbol{k},\beta}+\mathrm{i}B^{-\boldsymbol{k},\beta}, & \boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^3;\\ B^{-\boldsymbol{k},\beta}-\mathrm{i}B^{\boldsymbol{k},\beta}, & \boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_-^3。\end{cases}$$

该复值布朗运动二次变差为:

$$[W^{\boldsymbol{k},\beta},W^{\boldsymbol{l},\gamma}]_t=2t\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{l}}\delta_{\beta,\gamma}=\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}}\delta_{\beta-\gamma},\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}\in\mathbb{Z}_0^3,\beta,\gamma\in 1,2,$$

其中:当 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{l}$ 互为相反数时,示性函数 $\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}}$ 值为 1;反之,示性函数 $\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l}}$ 值为 0。当 $\beta=\gamma$ 时,示性函数 $\delta_{\beta-\gamma}$ 值为 1;反之,示性函数 $\delta_{\beta-\gamma}$ 值为 0。

本文总是假设:只要 $|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{l}|$,就有 $\theta_{\boldsymbol{k}}=\theta_{\boldsymbol{l}}$。那么由 $\theta_{\cdot}$ 的对称性,根据文献[11]有下面关键的式子:

$$\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\otimes\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{k},\beta})=\frac{2}{3}\|\theta\|_{l^2}^2\mathbf{I}_3 \tag{5}$$

其中:$\mathbf{I}_3$ 是 3×3 单位矩阵。

设 $P_L:L^2(\mathbb{T}^3)\to H$ 是 Leray 投影算子,$A=-P_L\Delta$ 是斯托克斯算子,$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=P_L(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$,把 Leray 投影算子 P_L 作用到式(4)上,式(4)可以写作:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{v}+B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mathrm{d}t=\varepsilon\sum\limits_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}P_L\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\circ\mathrm{d}W^{\boldsymbol{k},\beta},\\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\alpha^2A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}_0\end{cases} \tag{6}$$

式(6)的 Itô 型为:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)+B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mathrm{d}t=\varepsilon\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}P_L(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{v})\mathrm{d}W_t^{\boldsymbol{k},\beta}+\varepsilon^2\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\theta_{-\boldsymbol{k}}P_L[\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla P_L(\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{v})]\mathrm{d}t,$$

利用式(5),并根据文献[12],式(6)的 Itô 型可以改写为:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}(t)+B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mathrm{d}t=[\mu\Delta\boldsymbol{v}-I_\theta(\boldsymbol{v})]\mathrm{d}t+\varepsilon\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}P_L(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{v})\mathrm{d}W_t^{\boldsymbol{k},\beta} \tag{7}$$

其中:$I_\theta(\boldsymbol{v})=\varepsilon^2\sum\limits_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2P_L[\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla P_L^{\perp}(\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{v})]$,$P_L^{\perp}$ 是 P_L 的正交投影算子。

证明式(4)存在弱解等同于证明式(7)存在弱解,下面给出式(7)存在弱解的定义。

定义 1　如果存在一个过滤概率空间 $\{\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P\}$,一组独立的 $\{\mathcal{F}_t\}$ — 布朗运动 $\{W^{\boldsymbol{k},\beta}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3}$ 和一个具有 P-a. s. 弱连续轨道的 $\{\mathcal{F}_t\}$ 渐进可测过程 $\boldsymbol{v}\in L^2(\Omega,L^2(0,T;H))$,使得对于任何 $\phi\in C^{\infty}(\mathbb{T}^3)$,$t\in[0,T]$,等式:

$$\langle\boldsymbol{v}_t,\phi\rangle-\langle\boldsymbol{v}_0,\phi\rangle=-\int_0^t\langle B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\phi\rangle\mathrm{d}s+\mu\int_0^t\langle\boldsymbol{v}_s,\Delta\phi\rangle\mathrm{d}s-\int_0^t\langle\boldsymbol{v}_s,I_\theta(\phi_s)\rangle\mathrm{d}s-\varepsilon\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_0^t\langle\boldsymbol{v}_s,P_L\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}W^{\boldsymbol{k},\beta}$$

P-a. s. 成立,那么式(7)有弱解。

1.2　逼近序列

为证明式(7)弱解的存在性,下面构造式(7)的 Galerkin 逼近序列,并且对它进行估计和紧性分析。

先构造逼近序列,对于 $N \geqslant 1$, 设

$$H_N = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}: \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_0^3, |\boldsymbol{k}| \leqslant N, \beta = 1,2\},$$

它是 H 的有限维子空间。用 $\Pi_N: H \to H_N$ 表示正交投影,现在定义:

$$b_N(\boldsymbol{v}_N) = \Pi_N B(\boldsymbol{u}_N, \boldsymbol{v}_N), G_N^{\boldsymbol{k},\beta}(\boldsymbol{v}_N) = \Pi_N(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_N), \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_0^3, \beta = 1,2。$$

对于固定的 N,只有有限个 $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_0^3$,使 $G^{\boldsymbol{k},\beta}$ 不为 0。可以将 b_N 和 $G_N^{\boldsymbol{k},\beta}$ 看作是 H_N 上的函数。考虑式(7)在空间 H_N 上的有限维的形式:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_N(t) = -b_N(\boldsymbol{v}_N)\mathrm{d}t + [\mu\Delta\boldsymbol{v}_N - I_\theta(\boldsymbol{v}_N)]\mathrm{d}t + \varepsilon \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_{\boldsymbol{k}} \Pi_N(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_N)\mathrm{d}W_t^{\boldsymbol{k},\beta} \tag{8}$$

由于 b_N 和 $G_N^{\boldsymbol{k},\beta}$ 在 H_N 上是光滑的,根据随机偏微分理论[13],式(8)存在唯一的强解。

其次对构造的逼近序列进行估计。

引理 1　逼近序列 v_N 满足先验估计:

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant T} \| \boldsymbol{v}_N(s) \|_H^2 \leqslant C,$$

其中:C 表示常数。

证明　利用伊藤公式和式(8),逼近序列 v_N 满足下式:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\| \boldsymbol{v}_N \|_H^2 = & -2\langle \boldsymbol{v}_N(t), b_N(\boldsymbol{v}_N(t))\rangle \mathrm{d}t + 2\mu\langle \boldsymbol{v}_N(t), \Delta\boldsymbol{v}_N\rangle \mathrm{d}t - 2\langle \boldsymbol{v}_N(t), I_\theta(\boldsymbol{v}_N)\rangle \mathrm{d}t + 2\varepsilon \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_k \langle \boldsymbol{v}_N(t), \\ & G_N^{\boldsymbol{k},\beta}(\boldsymbol{v}_N(t))\rangle \mathrm{d}W_t^{\boldsymbol{k},\beta} + 2\varepsilon^2 \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_k^2 \| G_N^{\boldsymbol{k},\beta}(\boldsymbol{v}_N(t)) \|_H^2 \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{9}$$

因为 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}$ 散度为 0,根据分部积分,对 $\forall \boldsymbol{v}_N \in H_N$, 下式恒成立:

$$\langle b_N(\boldsymbol{v}_N), \boldsymbol{v}_N\rangle = 0, \langle G_N^{\boldsymbol{k},\beta}(\boldsymbol{v}_N), \boldsymbol{v}_N\rangle = 0。$$

因为 Π_N 是正交投影,所以

$$\| G_N^{\boldsymbol{k},\beta}(\boldsymbol{v}_N(t)) \|_H = \| \Pi_N(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k}} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N) \|_H \leqslant \| P_L \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\alpha} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N \|_H。$$

又根据分部积分和 $I_\theta(\boldsymbol{v})$ 的定义,得:

$$-2\langle \boldsymbol{v}_N, I_\theta(\boldsymbol{v}_N)\rangle = 2\varepsilon^2 \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_k^2 \langle \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N, P_L^\perp(\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N)\rangle = 2\varepsilon^2 \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_{\boldsymbol{k}}^2 \| P_L^\perp(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N) \|_H。$$

因此,

$$\begin{aligned} & -2\langle \boldsymbol{v}_N(t), I_\theta(\boldsymbol{v}_N)\rangle + 2\varepsilon^2 \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_k^2 \| G_N^{\boldsymbol{k},\beta}(\boldsymbol{v}_N(t)) \|_H^2 \leqslant 2\varepsilon^2 \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_{\boldsymbol{k}}^2 \| P_L^\perp(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N) \|_H + \\ & 2\varepsilon^2 \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_k^2 \| P_L(\boldsymbol{\sigma}_{-\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N) \|_H = 2\varepsilon^2 \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_{\boldsymbol{k}}^2 \| (\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla\boldsymbol{v}_N) \|_H = 2\mu \| \nabla\boldsymbol{v}_N \|_H^2, \end{aligned}$$

其中最后一步是根据式(5)得到。

综上,得到 $\mathrm{d}\| \boldsymbol{v}_N(t) \|_{L^2}^2 \leqslant 0$, 故引理 1 得证。

引理 2　设 $\boldsymbol{v}_0 \in H$,存在常数 $C > 0$,使得对于任意一个 $N \geqslant 1, \boldsymbol{l} \in \mathbb{Z}_0^3, j = 1,2$ 和 $0 \leqslant s < t \leqslant T$,有:

$$\mathrm{E}(\langle \boldsymbol{v}_N(t) - \boldsymbol{v}_N(s), \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle^4) \leqslant C |\boldsymbol{l}|^8 |t-s|^2。$$

证明　只需考虑 $|\boldsymbol{l}| \leqslant N$。由式(8)可得下式:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}_N(t) - \boldsymbol{v}_N(s), \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle = & -\int_s^t \langle b_N(\boldsymbol{v}_N(r)), \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle \mathrm{d}r + \mu\int_s^t \langle \boldsymbol{v}_N(r), \Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle \mathrm{d}r - \int_s^t \langle \boldsymbol{v}_N(r), I_\theta(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j})\rangle \mathrm{d}r - \\ & \varepsilon \sum_{\boldsymbol{k},\beta} \theta_{\boldsymbol{k}} \int_s^t \langle \boldsymbol{v}_N(r), \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta} \cdot \nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle \mathrm{d}W_r^{\boldsymbol{k},\beta}, \end{aligned}$$

利用霍尔德不等式和引理 1,有不等式:

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}(|\int_s^t \langle b_N(\boldsymbol{v}_N), \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle \mathrm{d}r|^4) \leqslant |t-s|^3 \mathrm{E}\int_s^t \langle \boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{u}_N \cdot \nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle^4 \mathrm{d}r \leqslant \\ & |t-s|^3 \mathrm{E}\int_s^t \| \boldsymbol{v}_N \|_H^4 \| \boldsymbol{u}_N(r) \|_H^4 \| \nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j} \|_\infty^4 \mathrm{d}r \leqslant C \| \boldsymbol{v}_0 \|_H^8 |\boldsymbol{l}|^4 |t-s|^4, \end{aligned}$$

其中:E 表示期望,该不等式最后一步成立是因为$\nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j} = 2\pi\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j} \otimes \boldsymbol{l}$。

同理,利用霍尔德不等式和引理 1,再根据 $\Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j} = -4\pi^2 |\boldsymbol{l}|^2 \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}$, 有:

$$\mathrm{E}(|\int_s^t \langle \boldsymbol{v}_N(r), \Delta\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle \mathrm{d}r|^4) \leqslant C |t-s|^4 \| \boldsymbol{v}_0 \|_H^4 |\boldsymbol{l}|^8。$$

根据 Flandoli 等[12]证明的引理 5.2，可知：

$$I_\theta(\boldsymbol{v})=-\frac{6\pi^2\mu}{\|\theta\|_{l^2}^2}\sum_{\boldsymbol{l},j}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{l},j}P_L\left\{\left[\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\boldsymbol{l})^2(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{l},j}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}))\frac{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}|^2}\right]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{l}}\right\} \tag{10}$$

其中：$\boldsymbol{l},\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3,j,\beta=1,2$。取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}$ 时，有：

$$\|I_\theta(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j})\|_H=\frac{6\pi^2\mu}{\|\theta\|_{l^2}^2}\left\|\sum_{\boldsymbol{l},j}P_L\left\{\left[\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\boldsymbol{l})^2(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{l},j}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}))\frac{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}|^2}\right]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{l}}\right\}\right\|_H\leqslant$$

$$\frac{6\pi^2\mu}{\|\theta\|_{l^2}^2}\left|\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\boldsymbol{l})^2(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{l},j}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}))\frac{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}|^2}\right|\leqslant\frac{6\pi^2\mu}{\|\theta\|_{l^2}^2}\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2|\boldsymbol{l}|^2\leqslant C|\boldsymbol{l}|^2,$$

这意味着，

$$\mathrm{E}\left|\int_s^t\langle\boldsymbol{v}_N,I_\theta(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j})\rangle\mathrm{d}r\right|^4\leqslant\mathrm{E}\left(\int_s^tC|\boldsymbol{l}|^2\|\boldsymbol{v}_N\|_H\mathrm{d}r\right)^4\leqslant C\|\boldsymbol{v}_0\|_H^4|\boldsymbol{l}|^8|t-s|^4。$$

根据 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，

$$\mathrm{E}\left(\left|\varepsilon\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_s^t\langle\boldsymbol{v}_N(r),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle\mathrm{d}W_r^{\boldsymbol{k},\beta}\right|^4\right)\leqslant\varepsilon^4\mathrm{E}\left(\left|\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{l}}^2\int_s^t\langle\boldsymbol{v}_N(r),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle^2\mathrm{d}r\right|^2\right),$$

其中：

$$\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2\langle\boldsymbol{v}_N(r),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle^2\leqslant\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2\|\boldsymbol{v}_N\|_H^2\|\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\|_H^2\leqslant C\|\theta\|_{l^2}^2|\boldsymbol{l}|^2\|\boldsymbol{v}_0\|_H^2,$$

所以，

$$\mathrm{E}\left(\left|\varepsilon\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_s^t\langle\boldsymbol{v}_N(r),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle\mathrm{d}W_r^{\boldsymbol{k},\beta}\right|^4\right)\leqslant C|\boldsymbol{l}|^4|t-s|^2。$$

综上，引理 2 得证。

接下来对逼近序列进行紧性分析，下面证明 $\{\boldsymbol{v}_N\}_{(N\geqslant1)}$ 的分布 $\overline{\eta}_N$ 在空间 $C([0,T],H^{-1}(\mathbb{T}^3))$ 中是紧的。先证明 $L^p(0,T;H)\cap W^{1/3,4}(0,T;H^{-6})$ 中的有界集合在空间 $C([0,T];H^{-\delta})$ 中是紧集这一性质。

引理 3　对 $\forall\delta\in(0,1)$，如果 $p>12(6-\delta)/\delta$，那么

$$L^p(0,T;H)\cap W^{1/3,4}(0,T;H^{-6})\subset C[0,T];H^{-\delta})$$

具有紧嵌入。

证明　取 $\forall\delta\in(0,1)$，有紧嵌入

$$H\subset H^{-\delta}\subset H^{-6},$$

根据插值不等式，存在常数 $C>0$，使得

$$\|f\|_{H^{-\delta}}\leqslant C\|f\|_H^{1-\kappa}\|f\|_{H^{-6}}^{\kappa},f\in V,$$

其中：$\kappa=\delta/6$。

根据 Simon[14]提出的推论 9(第 90 页)，如果 $s_*=s_\kappa-\frac{1}{r_\kappa}=\frac{\kappa}{3}-\left(\frac{1-\kappa}{p}+\frac{\kappa}{4}\right)>0$，即 p 满足：

$$p>12\frac{1-\kappa}{\kappa}=\frac{12(6-\delta)}{\delta},$$

那么 $L^p(0,T;H)\cap W^{1/3,4}(0,T;H^{-6})$ 中的有界集合在空间 $C([0,T];H^{-\delta})$ 中是紧集。

引理 4　$\{\boldsymbol{v}_N\}_{(N\geqslant1)}$ 的分布 $\overline{\eta}_N$ 在空间 $C([0,T],H^{-1}(\mathbb{T}^3))$ 中是紧的。

证明　利用引理 3，知道如果对于每个 $N\geqslant1$，都有

$$\mathrm{E}\int_0^T\|\boldsymbol{v}_N\|_H^p\mathrm{d}t+\mathrm{E}\int_0^T\int_0^T\frac{\|\boldsymbol{v}_N(t)-\boldsymbol{v}_N(s)\|_{H^{-6}}^4}{|t-s|^{7/3}}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\leqslant C \tag{11}$$

成立，那么 $\boldsymbol{v}_N$ 的分布 $\overline{\eta}_N$ 在空间 $C([0,T],H^{-\delta}(\mathbb{T}^3))$ 中是紧的。通过引理 1 可立即得到：$\{\boldsymbol{v}_N(\cdot)\}_{N\geqslant1}$ 在 $L^p(\Omega,L^p(0,T;H))$ 中是一致有界性的。第二个期望值还有待估计。利用引理 2 和柯西不等式，可以得到：

$$\mathrm{E}[\|\boldsymbol{v}_N(t)-\boldsymbol{v}_N(s)\|_{H^{-6}}^4]=\mathrm{E}\left[\sum_{l,j}\frac{\langle\boldsymbol{v}_N(t)-\boldsymbol{v}_N(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle^2}{|l|^{12}}\right]^2\leqslant\left(\sum_{l,j}\frac{1}{|\boldsymbol{l}|^{12}}\right)\left[\sum_{l,j}\frac{E(\langle\boldsymbol{v}_N(t)-\boldsymbol{v}_N(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{l},j}\rangle^4)}{|\boldsymbol{l}|^{12}}\right]$$

$$\leqslant C\sum_{l,j}\frac{C|\boldsymbol{l}|^8|t-s|^2}{|\boldsymbol{l}|^{12}}\leqslant C|t-s|^2,$$

因此,

$$\mathrm{E}\int_0^T\int_0^T \frac{\|\boldsymbol{v}_N(t)-\boldsymbol{v}_N(s)\|_{H^{-6}}^4}{|t-s|^{7/3}}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \leqslant C,$$

从而证明了式(11)成立,说明 $\boldsymbol{v}_N$ 的分布 $\bar{\eta}_N$ 在空间 $C([0,T],H^{-\delta}(\mathbb{T}^3))$ 中是紧的。这等价于证明了 $\bar{\eta}_N$ 在空间 $C([0,T],H^{-}(\mathbb{T}^3))$ 中是紧的。引理 4 得证。

1.3 弱解的存在性

$\{\boldsymbol{v}_N\}_{(N\geqslant 1)}$ 的分布 $\bar{\eta}_N$ 在 $C([0,T];H^{-})$ 中是紧的,利用 Prohorov 定理[15]推导出存在一组子列 $\bar{\eta}_{N_i}$,它弱收敛于某个支撑在 $C([0,T];H^{-})$ 上的概率测度 $\bar{\eta}$。根据 Skorokhod 定理[16]存在一个新的概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 和存在一组定义在新的概率空间上的随机变量 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(i\geqslant 1)$、$\widetilde{\boldsymbol{v}}$,使得 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(i\geqslant 1)$ 和 $\boldsymbol{v}_{N_i}(\cdot)$ 具有相同分布 $\bar{\eta}_{N_i}$,$\widetilde{\boldsymbol{v}}$ 的分布为 $\bar{\eta}$,并且在空间 $C([0,T];H^{-})$ 中,

$$\lim_{i\to\infty}\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}=\widetilde{\boldsymbol{v}} \qquad \widetilde{\mathrm{P}}\text{-a. s.} \tag{12}$$

根据 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}=\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}+\alpha^2 A\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{v}}=\widetilde{\boldsymbol{u}}+\alpha^2 A\widetilde{\boldsymbol{u}}$,在空间 $C([0,T];H^{2-})$ 中,

$$\lim_{i\to\infty}\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(\cdot)=\widetilde{\boldsymbol{u}}(\cdot) \qquad \widetilde{\mathrm{P}}\text{-a. s.} \tag{13}$$

通过引理 1,下式成立:

$$\sup_{t\in[0,T]}\|(1+\alpha^2 A\Delta)\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(t)\|_H=\sup_{t\in[0,T]}\|\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(t)\|_{L^2}\leqslant\|\boldsymbol{v}_0\|_H \quad \widetilde{\mathrm{P}}\text{-a. s.} \tag{14}$$

类似文献[17]中的引理 3.4,当 $i\to\infty$ 时,式(14)改为下式:

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|\widetilde{\boldsymbol{v}}(t)\|_H\leqslant\|\boldsymbol{v}_0\|_H \qquad \widetilde{\mathrm{P}}\text{-a. s.} \tag{15}$$

式(14)—(15)说明序列 $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(t)$、$\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(t)$ 和极限值 $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)$、$\widetilde{\boldsymbol{v}}(t)$ 在空间 H 中是有界的。

下面给出本文的第一个主要结论,即式(7)存在弱解。

定理 1 对于任给 $\boldsymbol{v}_0\in H$,式(7)都存在弱解,其轨道在 $L^{\infty}(0,T;H)$ 中,满足:

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\boldsymbol{v}_t\|_H\leqslant\|\boldsymbol{v}_0\|_H \quad \mathrm{P}\text{-a. s. 。}$$

证明 在新的概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 中,过程 $(\widetilde{v}_{N_i}(\cdot),\widetilde{W}^{N_i})$ 满足式(8)。因此,对于任何 $\phi\in C^{\infty}(\mathbb{T}^3)$,$t\in[0,T]$,都有 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}$,$\widetilde{\mathrm{P}}$-a. s. 满足下式:

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(t),\boldsymbol{\phi}\rangle=&\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(0),\boldsymbol{\phi}\rangle+\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(s)\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}\rangle\mathrm{d}s+\mu\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\Delta\boldsymbol{\phi}\rangle\mathrm{d}s-\\&\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),I_\theta(\boldsymbol{\phi})\rangle\mathrm{d}s-\varepsilon\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{\phi}\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{N_i,\boldsymbol{k},\beta}\end{aligned} \tag{16}$$

把所有的量都看作是实值随机过程。式(16)除了非线性项,其他项都是线性收敛的。通过控制收敛定理,对于非线性项,有:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s-\int_0^t|\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s\Big|\Big]\leqslant\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\\&\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s-\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s\Big|\Big]+\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s-\\&\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}},\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s\Big|\Big]\leqslant\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),(\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(s)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(s))\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s\Big|\Big]+\\&\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle(\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s)-\widetilde{\boldsymbol{v}}(s)),\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s\Big|\Big]\leqslant\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\|\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s)\|_H\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}(s)-\\&\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\|_H\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\Big|\Big]+\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\|(\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s)-\widetilde{\boldsymbol{v}}(s))\|_H\|\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\|_H\|\nabla\phi\|_{L^\infty}\mathrm{d}s\Big|\Big]=M_1+M_2\end{aligned} \tag{17}$$

式(13)意味着 $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{N_i}$ 在 $L^2(\widetilde{\Omega},L^2(0,T;H))$ 中强收敛到 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$,又根据 $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s)$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{v}}(t)$ 在 H 中的有界性,故当 $i\to\infty$ 时,M_1 趋于 0。通过式(12),M_2 方括号中的量 $\widetilde{\mathrm{P}}$-a. s. 趋于 0,再加上 $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)$ 的有界性,通过控制收敛定理得到 $M_2\to 0$。 因此得到非线性项的收敛性。

下面证明随机积分项的收敛性。对于任给一个 $M\in\mathbb{N}$,有:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{N_i,\boldsymbol{k},\beta}-\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{\boldsymbol{k},\beta}\Big|\Big]\\&\leqslant\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\sum_{|\boldsymbol{k}|\leqslant M,\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\Big(\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{N_i,\boldsymbol{k},\beta}-\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{\boldsymbol{k},\beta}\Big)\Big|\Big]+\\&\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\sum_{|\boldsymbol{k}|>M,\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{N_i,\boldsymbol{k},\beta}\Big|\Big]+E_{\widetilde{P}}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\Big|\sum_{|\boldsymbol{k}|>M,\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\\&\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{\boldsymbol{k},\beta}\Big|\Big]=J_{N_i}^{(1)}+J_{N_i}^{(2)}+J_{N_i}^{(3)},\end{aligned}$$

本文用 $J_{N_i}^{(n)},n=1,2,3$,表示右边的三个期望。首先,

$$\begin{aligned}J_{N_i}^{(2)}&\leqslant C\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\Big(\sum_{|\boldsymbol{k}|>M,\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^2\int_0^T\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\Big]\leqslant C\|\theta\|_{l^\infty_{>M}}\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big[\Big(\sum_{|\boldsymbol{k}|>M,\beta}\int_0^T\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\\&\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle^2\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\Big]\leqslant C\|\theta\|_{l^\infty_{>M}}T^{\frac12}\|\boldsymbol{v}_0\|_H\|\nabla\phi\|_\infty\end{aligned}\tag{18}$$

其中:$\|\theta\|_{l^\infty_{>M}}=\sup_{|\boldsymbol{k}|>M}|\theta_{\boldsymbol{k}}|$,那么随着 $M\to\infty$,$\|\theta\|_{l^\infty_{>M}}\to 0$,则式(18)趋于 0。同样 $J_{N_i}^{(3)}$ 也有类似的估计。

最后,对于 $J_{N_i}^{(1)}$ 本文需要用 Skorokhod 的结果来证明随机积分的收敛性。随着 $i\to\infty$,对于所有 $s\in[0,T]$,$\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle$ $\widetilde{\mathrm{P}}$-a. s. 收敛于$\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle$ 并且$\widetilde{W}_s^{N_i,\boldsymbol{k},\beta}\to\widetilde{W}_s^{\boldsymbol{k},\beta}$。因为只有有限多个随机积分,故对于任意 $|\boldsymbol{k}|\leqslant M$,利用式(14)—(15),下式显然成立:

$$\Big(\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\int_0^T\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle^4\mathrm{d}s\Big)\vee\Big(\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\sup_{i\geqslant1}\int_0^T\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}_{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle^4\mathrm{d}s\Big)<+\infty\tag{19}$$

那么根据文献[18]的引理 3.2 可以得到 $J_{N_i}^{(1)}\to 0$。

综上得到随机积分项的收敛性。当 $i\to\infty$ 时,由式(16)可得对于所有的 $t\in[0,T]$,下式恒成立:

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(t),\phi\rangle&=\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(0),\phi\rangle+\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\widetilde{\boldsymbol{u}}(s)\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}s+\mu\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\Delta\phi\rangle\mathrm{d}s\\&-\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),I_\theta(\phi)\rangle\mathrm{d}s-\varepsilon\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle\mathrm{d}\widetilde{W}_s^{\boldsymbol{k},\beta},\end{aligned}$$

即证明了 $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ 是式(7)的弱解,定理 1 得证。

2　弱解的极限

下面考虑当噪声趋于 0 时,式(7)弱解的极限行为。为此假设:

$$\theta_{\boldsymbol{k}}^N=\frac{1}{|\boldsymbol{k}|^r}\mathbf{1}_{\{N\leqslant|\boldsymbol{k}|\leqslant2N\}},\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_0^3,N\geqslant1。$$

那么式(7)可以写作带有参数 N 的随机 Euler 型 Leray-α 模型:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v}^N+B(\boldsymbol{u}^N,\boldsymbol{v}^N)\mathrm{d}t=[\mu\Delta\boldsymbol{v}^N-I_{\theta_{\boldsymbol{k}}^N}(\boldsymbol{v}^N)]\mathrm{d}t+\varepsilon_N\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^NP_L(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\boldsymbol{v}^N)\mathrm{d}W_t^{\boldsymbol{k},\beta}\tag{20}$$

同时 $\theta_{\boldsymbol{k}}^N$ 的取法意味着:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\|\theta_\cdot^N\|_{l^\infty}}{\|\theta_\cdot^N\|_{l^2}}=0\tag{21}$$

$\varepsilon_N=\dfrac{\sqrt{3\mu/2}}{\|\theta_\cdot^N\|_{l^2}}$ 和式(21)共同意味着 $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon_N\|\theta_\cdot^N\|_{l^\infty}=0$,这表明 $\{\varepsilon_N\|\theta_\cdot^N\|_{l^\infty}\}_{N\geqslant1}$ 是有界的。

$\theta_{\boldsymbol{k}}^N$ 满足本文对 $\theta_{\boldsymbol{k}}$ 的要求,它具有对称性,那么引理 1—引理 4 和定理 1 也适用于式(20)的解 $\boldsymbol{v}^N$。固定 $\boldsymbol{v}_0 \in H$ 和 $\mu > 0$,根据定理 1,则对于每个 N,式(20)都存在弱解 $\boldsymbol{v}_t^N$,且满足下式:

$$\sup_{t\in[0,T]} \| \boldsymbol{v}_t^N \|_H \leqslant \| \boldsymbol{v}_0 \|_H \qquad \text{P-a. s.}$$。

设 $\{Q^N\}_{N\geqslant 1}$ 是 $\boldsymbol{v}^N$ 的分布,类似引理 4 中的紧性性质分析,同理可得分布 $\{Q^N\}_{N\geqslant 1}$ 在 $C([0,T];H^-)$ 空间中是紧的。应用 Prohorov 定理找出一组子列 $\{Q^{N_i}\}_{i\in\mathbf{N}}$,它们弱收敛于某个支撑在 $C([0,T];H^-)$ 上的分布 Q。根据 Skorokhod 定理存在一个新的概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 和一组定义在新的概率空间上的随机变量 $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(i\geqslant 1)$、$\widetilde{\boldsymbol{v}}$,使得 $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(i\geqslant 1)$ 的分布是 Q^{N_i},$\widetilde{\boldsymbol{v}}$ 的分布是 Q。

下面给出本文的第二个主要结论,即该随机 Euler 型 Leray-a 模型是收敛到对应的确定性 Leray-a 模型。

定理 2 $\{Q^N\}_{N\geqslant 1}$ 在 $C([0,T];H^-)$ 中是紧的,并且 $\{Q^N\}_{N\geqslant 1}$ 是弱收敛于 $\boldsymbol{v}$ 的分布 $\delta_{\boldsymbol{v}}$,其中 $\boldsymbol{v}_{\cdot}$ 是确定性 Leray-a 模型:

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \frac{3}{5}\mu\Delta\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0 \tag{22}$$

的唯一解,并且对于任意 $\varepsilon > 0$,下式成立:

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\boldsymbol{v}_0\in H} Q_{\boldsymbol{v}_0}^N(\varphi\in C(0,T;H^{-\delta}):\|\varphi - \boldsymbol{v}_{\cdot}(\boldsymbol{v}_0)\|_{C(0,T;H^{-\delta})} > \varepsilon) = 0$$。

证明 由式(20)可得,对于每个 $N > 1$,任给 $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ 和 $t\in[0,T]$,有:

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(t),\phi\rangle &= \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(0),\phi\rangle + \int_0^t \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s),\widetilde{\boldsymbol{u}}^{N_i}(s)\cdot\nabla\phi\rangle \mathrm{d}s + \mu\int_0^t \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s),\Delta\phi\rangle \mathrm{d}s \\ &- \int_0^t \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s), I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle \mathrm{d}s - \varepsilon_N \sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^{N_i}\int_0^t \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s),\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle \mathrm{d}\widetilde{W}_s^{N_i,\boldsymbol{k},\beta}\end{aligned} \tag{23}$$

下面证明当 $N\to\infty$ 时,式(23)的随机积分项消失,利用 It$\hat{o}$ 等距公式,有:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\Big(\varepsilon_N\sum_{\boldsymbol{k},\beta}\theta_{\boldsymbol{k}}^{N_i}\int_0^t \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_s^{N_i},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle \mathrm{d}\widetilde{W}_s^{N_i,\boldsymbol{k},\beta}\Big)^2 = \frac{3\mu}{2\|\theta_{\cdot}^{N^i}\|_{l^2}^2}\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\int_0^t\sum_{\boldsymbol{k},\beta}(\theta_{\cdot}^{N^i})^2\,|\langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_s^{N_i},\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\cdot\nabla\phi\rangle|^2\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{3\mu}{2\|\theta_{\cdot}^{N^i}\|_{l^2}^2}\|\theta_{\cdot}^{N^i}\|_{l^\infty}^2\mathrm{E}_{\widetilde{P}}\int_0^T\sum_{k,\beta}\langle \widetilde{\boldsymbol{v}}_s^N\cdot\nabla\phi,\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{k},\beta}\rangle^2\mathrm{d}s \leqslant \frac{3\mu}{2}\,\frac{\|\theta_{\cdot}^N\|_{l^\infty}^2}{\|\theta_{\cdot}^{N^i}\|_{l^2}^2}\int_0^T\mathrm{E}_{\widetilde{P}}(\|\widetilde{\boldsymbol{v}}_s^N\cdot\nabla\phi\|_H^2)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{3\mu T}{2}\,\frac{\|\theta_{\cdot}^{N^i}\|_{l^\infty}^2}{\|\theta_{\cdot}^{N^i}\|_{l^2}^2}\|\widetilde{\boldsymbol{v}}_0\|_H^2\|\nabla\phi\|_\infty^2\end{aligned} \tag{24}$$

利用式(21),当 $N\to\infty$ 时,式(24)趋于 0。

下面考虑 $\int_0^t \langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s),I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle \mathrm{d}s$ 的收敛性:

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s),I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle\mathrm{d}s - \frac{2}{5}\mu\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\Delta\phi\rangle\mathrm{d}s\Big| \leqslant \lim_{i\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle \widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s),I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle\mathrm{d}s - \\ &\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}},I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle\mathrm{d}s + \int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle\mathrm{d}s - \frac{2}{5}\mu\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\Delta\phi\rangle\mathrm{d}s\Big| \leqslant \lim_{i\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\Big|\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s)-\widetilde{\boldsymbol{v}}, \\ &I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle\mathrm{d}s\Big| + \lim_{i\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t\Big|\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\frac{2}{5}\mu\Delta\phi - I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle\mathrm{d}s\Big|\end{aligned} \tag{25}$$

根据 Flandoli 等[12]证明的定理 5.1 可知,$I_{\theta^{N_i}}(\phi)$ 收敛到 $\frac{2}{5}\mu\Delta\phi$,并且由于 $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}$ 在空间 $C([0,T];H^-)$ 中是强收敛于 $\widetilde{\boldsymbol{v}}$,那么随着 $i\to\infty$,式(25)趋于 0。这证明 $\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}(s),I_{\theta^{N_i}}(\phi)\rangle\mathrm{d}s$ 是收敛于 $\frac{2}{5}\int_0^t\langle\widetilde{\boldsymbol{v}}(s),\Delta\phi\rangle\mathrm{d}s$。

式(23)中非线性项的收敛性的证明与定理 1 中的证明方法相同,因此不再重复证明。

综上,当 $N\to\infty$ 时,式(20)是收敛到确定性 Leray-a 模型:

$$\partial_t \widetilde{\boldsymbol{v}} + \widetilde{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \widetilde{\boldsymbol{v}} = \frac{3}{5}\mu\Delta\widetilde{\boldsymbol{v}},\ \widetilde{\boldsymbol{v}}\ |_{t=0} = \boldsymbol{v}_0。$$

Jean[19] 已经证明，初值属于 H 时，确定性 Leray-α 模型有唯一弱解。所以当噪声趋于 0 时，式(20)的弱解是收敛到式(22)的唯一解。

下面证明 $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{\boldsymbol{v}_0\in H} Q_{\boldsymbol{v}_0}^N(\varphi\in C(0,T;H^{-\delta}):\|\varphi-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)\|_{C(0,T;H^{-\delta})}>\varepsilon)=0$ 成立，本文采用反证法来证明。假设存在一个足够小的常数 $\varepsilon_0>0$，使得

$$\limsup_{N\to\infty}\sup_{\boldsymbol{v}_0\in H} Q_{\boldsymbol{v}_0}^N(\varphi\in C([0,T],H^{-\delta}):\ \|\varphi-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}>\varepsilon_0)>0,$$

其中：$Q_{\boldsymbol{v}_0}^N$ 是初值为 $\boldsymbol{v}_0$ 的式(20)弱解 $\boldsymbol{v}^N$ 的分布，$\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)$ 是初值为 $\boldsymbol{v}_0$ 的式(22)的唯一弱解。令 $\boldsymbol{v}_0^i$ 为一组在 H 中弱收敛到 $\boldsymbol{v}_0$ 的子序列。记初值为 $\boldsymbol{v}_0^i$ 的式(20)的弱解为 $\boldsymbol{v}^{N_i}$，它的分布记为 $Q^{N_i}:=Q_{v_0^i}^{N_i}$，$i\geqslant 1$，使得

$$Q^{N_i}(\varphi\in C([0,T],H^{-\delta}):\|\varphi-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0^i)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}>\varepsilon_0)\geqslant\varepsilon_0>0 \tag{26}$$

易证 $\{Q^{N_i}\}_i$ 在空间 $C([0,T],H^{-\delta})$ 中是紧的，那么能找到一个子序列 Q^{N_i} 弱收敛于某些支撑在空间 $C([0,T],H^{-\delta})$ 上的概率测度 Q。通过 Skorokhod 定理能找到新的概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ 和定义在 $\widetilde{\Omega}$ 上的一组随机过程 $\{\widetilde{\boldsymbol{v}}N_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得对于每个 $i\in\mathbb{N}$，$\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}$ 与 $\boldsymbol{v}^{N_i}$ 具有相同的分布 Q^{N_i}，且 $\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}$ 在 $C([0,T],H^{-\delta})$ 中强收敛于某个 $\widetilde{\boldsymbol{v}}$。类似定理 2 的证明，可以得到极限值 $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ 是初始条件为 $\boldsymbol{v}_0$ 的式(22) 的弱解。根据式(22) 解的唯一性可以得出 $\widetilde{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}_\cdot(v_0)$。因此随着 $i\to\infty$，$\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}$ 在 $C([0,T],H^{-\delta})$ 中收敛到 $\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)$，所以任给 $\varepsilon>0$，有：

$$\lim_{N\to\infty}\widetilde{P}(\|\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}>\varepsilon)=0 \tag{27}$$

由式(26)得：

$$\widetilde{P}(\|\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0^i)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}>\varepsilon_0)\geqslant\varepsilon_0>0 \tag{28}$$

根据三角不等式，得：

$$\|\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0^i)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}\leqslant\|\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}+\|\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)-\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0^i)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}$$

类似 Galerkin 解的紧性性质分析，同样可以得到 $\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0^i)\}_{i\geqslant 1}$ 在 $L^\infty(0,T;H)$ 和 $W^{1/3,4}(0,T;H^{-6})$ 中是有界的，并且 $\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0^i)\}_{i\geqslant 1}$ 在空间 $C([0,T],H^{-\delta})$ 中是紧的。因此存在一组子序列 $\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0^i)$ 在空间 $C([0,T],H^{-\delta})$ 中收敛到某一值 $\bar{\boldsymbol{v}}$，由于 $\boldsymbol{v}_0^i$ 弱收敛到 $\boldsymbol{v}_0$，那么能够证明 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 是式(22) 的弱解。根据式(22) 解的唯一性，可以得到 $\bar{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}_\cdot(\boldsymbol{v}_0)$。因此当 $i\to\infty$，$\|\widetilde{\boldsymbol{v}}^{N_i}-\boldsymbol{v}_\cdot(v_0^i)\|_{C([0,T],H^{-\delta})}\leqslant 0$，这与式(28)结论矛盾。故定理 2 得证。

注：根据定理 2 知，$N\to\infty$ 时，式(20)的弱解是收敛到式(22)的唯一解，这一结果表明：在极限下，式(20)弱解分布之间的距离是趋于 0 的，这说明式(20)的解具有渐进唯一性。渐进唯一性的具体定义可参考文献[17]。

3　结　论

本文在确定性 Euler 型 Leray-α 模型上添加输运型噪声，证明了随机 Euler 型 Leray-α 模型弱解的存在性，进一步建立了当输运型噪声趋于 0 时随机 Euler 型 Leray-α 模型弱解的极限行为，极限行为结果表明弱解具有渐进唯一性。本文结果解答了 Barbato 等[3] 提出关于噪声趋于 0 时解的极限行为问题，后续将继续考虑解的收敛速率。

参考文献：

[1] Yu Y J, Li K T. Existence of solutions and Gevrey class regularity for Leray-alpha equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 306(1): 227-242.

[2] Bardos C, Titi E S. Euler equations for an ideal incompressible fluids[J]. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 2007, 62(3): 5-46.

[3] Barbato D, Bessaih H, Ferrario B. On a stochastic Leray-α model of Euler equations[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2014, 124(1): 199-219.

[4] Galeati L, Gubinelli M. Noiseless regularisation by noise[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2022, 38(2): 433-502.

[5] Wei J L, Duan J Q, Gao H J, et al. Stochastic regularization for transport equations[J]. Stochastics Partial Differential Equations: Analysis and Computations 2021, 9(1): 105-141.

[6] Chen Y, Ran L X. The effect of a noise on the stochastic modified Camassa-Holm equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 2020, 61(9): 091504.

[7] Flandoli F, Galeati L, Luo D J. Delayed blow-up by transport noise[J]. Communications in Partial Differential Equations, 2021, 46(9): 1757-1788.

[8] Flandoli F, Gubinelli M, Priola E. Well-posedness of the transport equation by stochastic perturbation[J]. Inventiones Mathematicae, 2010, 180(1): 1-53.

[9] Luo D J. Convergence of stochastic 2D inviscid Boussinesq equations with transport noise to a deterministic viscous system [J]. Nonlinearity, 2021, 34(12): 8311-8330.

[10] Luo D J, Zhu R C. Stochastic mSQG equations with multiplicative transport noises: White noise solutions and scaling limit[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2021, 140: 236-286.

[11] Galeati L. On the convergence of stochastic transport equations to a deterministic parabolic one[J]. Stochastics Partial Differential Equations: Analysis and Computations, 2020, 8(4): 833-868.

[12] Flandoli F, Luo D J. High mode transport noise improves vorticity blow-up control in 3D Navier-Stokes equations[J]. Probability Theory and Related Fields, 2021, 180(1/2), 2021, 180: 309-363.

[13] Chow P L. Stochastic Partial Differential Equations[M]. 2nd ed. Boca Raton : CRC Press, 2014:197.

[14] Simon J. Compact sets in the space $L^{P}(O,T;B)$[J]. Annali Di Matematica Pura Ed Applicata, 1986, 146(1): 65-96.

[15] Prokhorov Y V. Convergence of random processes and limit theorems in probability theory[J]. Theory of Probability & Its Applications, 1956, 1(2): 157-214.

[16] Skorokhod A V. Limit theorems for stochastic processes[J]. Theory of Probability & Its Applications, 1956, 1(3): 261-290.

[17] Flandoli F, Galeati L, Luo D J. Scaling limit of stochastic 2D Euler equations with transport noises to the deterministic Navier-Stokes equations[J]. Journal of Evolution Equations, 2021, 21(1): 567-600.

[18] Luo D J. Absolute continuity under flows generated by SDE with measurable drift coefficients[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2011, 121(10): 2393-2415.

[19] Jean L. Sur le mouvement d′un liquide visqueux emplissant l′espace[J]. Acta Mathematica, 1934, 63(1): 193-248.

(责任编辑:康　锋)