浙江理工大学学报，2022，47(4)：596-600
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(n).2022.04.017

Disjoint 双线性规划的一个混合整数线性规划变换及其应用

齐海强，郑芳英，罗和治
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：针对 disjoint 双线性规划问题，给出了一个混合整数线性规划变换方法，以求得其全局最优解。该方法将 disjoint 双线性规划变换为一个带有互补约束的线性规划，并利用 0-1 变量和大 M 法线性化互补约束。同时，将该方法应用于金融系统中的不确定性系统性风险估计问题，证明了该问题可变换为一个 disjoint 双线性规划问题，进而利用所提出的方法求解。数值结果表明：提出的方法能有效找到中大规模最坏情形系统性风险估计问题的全局最优解，并优于已有的全局解方法。

关键词：双线性规划；混合整数线性规划；disjoint；全局最优解

中图分类号：O224　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2022) 07-0596-05

A mixed integer linear programming reformulation for disjoint bilinear programming and its applications

QI Haiqiang，*ZHENG Fangying*，*LUO Hezhi*
（School of Science，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China）

Abstract：In this paper，a mixed integer linear programming reformulation approach for finding the global optimal solution to disjoint bilinear programming was proposed. Through the reformulation of disjoint bilinear programming into as a linear program with complementarity constraints，the complementarity constraints were linearized by using binary variables and big-M methods. Moreover，through the application of this method to estimate the uncertain systemic risk in financial systems，it was proved that this problem can be transformed into a disjoint bilinear programming problem，which could be solved by the proposed method. The numerical results indicate that the proposed method significantly outperforms the existing global solution approach by finding a global optimal solution to medium-and large-scale worst-case systemic risk estimation problem.

Key words：bilinear programming；mixed integer linear programming；disjoint；global optimal solution

0　引　言

带有 disjoint 约束的双线性规划，即 disjoint 双线性规划（Bilinear program，BLP），是一类重要且具有广泛应用的非凸二次规划问题[1]，其应用包含约束双矩阵对策、动态马氏分配问题、多商品网络流问题、动态生产问题和金融系统中不确定性系统性风险估计问题等[1-6]。

收稿日期：2021－12－06　　网络出版日期：2022－03－18
基金项目：浙江省自然科学基金项目（LZ21A010003，LY19A010025）；国家自然科学基金项目（11871433）
作者简介：齐海强（1997－　），男，浙江天台人，硕士研究生，主要从事运筹学、最优化理论方面的研究。
通信作者：郑芳英，E-mail：zfy@zstu.edu.cn

disjoint 双线性规划问题可表示为：

$$\begin{cases}\min & f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y};\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x}\in X:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n}:\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\},\\ & \boldsymbol{y}\in Y:=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{m}:\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{d},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\}\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}^{n}$，$\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^{m}$，$X$ 和 Y 为有界多面体集，且 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m_1\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{m_1}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m_2\times m}$，$\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^{m_2}$。Gallo 等[2]证明了 BLP 问题(1)是 NP一难的，Audet 等[6]进一步证明了 BLP 问题(1)是强 NP一难的。

近三十多年来，国内外学者对 BLP 问题(1)提出了许多全局算法，然而这些算法只能求解小规模问题。例如，Konno[1]首次提出了求解 BLP 问题(1)的交替方向法，并采用交替方向法设计了割平面算法，但该方法不能保证找到全局最优解。Gallo 等[2]在 Konno[1]的基础上对算法进行改进，根据对偶定理将 BLP 问题(1)转化为线性规划问题，设计了割平面算法，该算法能找到全局解。Al-Khayyal 等[3]提出了求解 BLP 问题(1)的分支定界全局算法，并证明了该算法收敛于原问题的全局最优解，但该方法只能求解小规模问题。Audet 等[6]将 BLP 问题(1)变换为两个不同的线性极大极小问题，讨论了问题(1)和线性极大极小问题之间的解的关系，并利用线性极大极小问题的必要最优性条件(互补性和单调性)，构造了求解 BLP 问题的具有有限收敛的精确分支定界算法，但该方法只能求解小规模问题。Sherali 等[7]对 BLP 问题(1)提出了一个新的 Reformulation-linearization technique(RLT)松弛，并提出了基于新 RLT 松弛的分支定界算法，但采用该算法求解下界耗时较大。Alarie 等[8]提出了带有凹割的分支定界算法，该算法也只能求解小规模问题。Ding 等[9]对 BLP 问题(1)提出了两个线性割平面算法，改进了现有方法，其主要思想是避免构造 disjunctive 割，而利用紧的界方法来加快割平面算法的收敛速度。Kolodziej 等[10]提出了求解 BLP 问题的基于多参数分解技术的全局算法。Zhen 等[11]证明了 BLP 问题可转化为两阶段鲁棒线性优化问题，并利用鲁棒优化技术进行求解。

由于现有的混合整数线性规划(Mixed integer linear programming, MILP)求解器，如 CPLEX 和 Gurobi 等，非常强大和有效，因此本文通过将 BLP 问题(1)变换为 MILP 问题来求 BLP 问题(1)的全局最优解，提出了一个混合整数线性规划变换方法。其主要思想在于：利用线性规划的强对偶性和 Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件，将问题(1)转化为一个等价的带有互补约束的线性规划问题，进而利用大 M 法并引入 0-1 变量，线性化互补约束得到了一个 0-1 MILP 问题，再用 MILP 求解器 CPLEX 求解该问题。同时，将该方法应用到金融系统中的不确定性系统性风险估计问题，证明了最坏情形系统性风险估计问题可以变换为一个等价的 BLP 问题。

1　混合整数线性规划变换

本节利用线性规划的强对偶性和 KKT 条件及大 M 法，证明问题(1)可等价变换为一个混合整数线性规划问题。首先需要引理 1。

引理 1[12]　(线性规划的强对偶性)考虑如下线性规划问题：

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

及其对偶问题：

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\max & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y};\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{0},\end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{m}$，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^{n}$。若(P)有最优解，则(D)有最优解，且(P)和(D)有相同最优值。

定理 1　BLP 问题(1)与如下问题(2)有相同的最优值：

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}} & \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z};\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p},\\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{d},\boldsymbol{y}\leqslant M\boldsymbol{\mu},\\ & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant M(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\mu}),\\ & \boldsymbol{z}\geqslant -M\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{d}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\leqslant M(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\nu}),\\ & \boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in X,\\ & \boldsymbol{\mu}\in\{0,1\}^{m},\boldsymbol{\nu}\in\{0,1\}^{m_2}\end{cases}\tag{2}$$

其中:$M>0$ 是充分大的罚参数。若$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{v}^*)$是问题(2)的最优解,则 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题(1)的全局最优解。

证明 首先问题(1)可等价变换为:

$$\min\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y\}=\min_{\boldsymbol{x}\in X}[\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\min_{\boldsymbol{y}\in Y}(\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}y]。$$

因为 Y 为有界多面体,故线性规划问题$\min\limits_{\boldsymbol{y}\in Y}(\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}y$ 有最优解,从而由引理 1 得到:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}[\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\min_{\boldsymbol{y}\in Y}(\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}]=\min_{\boldsymbol{x}\in X}[\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\max_{z\in Z(x)}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}z] \tag{3}$$

其中:$Z(\boldsymbol{x}):=\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{m_2}:\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{p}+\boldsymbol{Qx},\boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{0}\}$。问题(3)可改写为如下问题:

$$\begin{cases}\min\limits_{x\in X,z} & [\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}];\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{z}\in\operatorname*{argmax}\limits_{z\in Z(x)}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\end{cases} \tag{4}$$

再利用线性规划的 KKT 条件,问题(4)可变换为一个等价的带有互补约束的线性规划问题:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} & [\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}];\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p},\\ & \boldsymbol{By}\leqslant\boldsymbol{d},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z})=0,\\ & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{By})=0,\\ & \boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in X\end{cases} \tag{5}$$

再利用大 M 方法,通过引入 0-1 变量来线性化问题(5)中的非凸互补约束,即引入 0-1 变量 $\boldsymbol{\mu}\in\{0,1\}^m$,将互补约束 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z})=0$ 和 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{By})=0$ 分别变换为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{y}\leqslant M\boldsymbol{\mu}, & \boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant M(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\mu}),\\ \boldsymbol{z}\geqslant-M\boldsymbol{v}, & \boldsymbol{d}-\boldsymbol{By}\leqslant M(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v})。\end{cases}$$

从而问题(5)可以转换为如下等价的 0-1 混合整数线性规划:

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{v}} & \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z};\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant \mathrm{Qx}+\boldsymbol{p},\\ & \boldsymbol{By}\leqslant d,\boldsymbol{y}\leqslant M\boldsymbol{\mu},\\ & \boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{p}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\leqslant M(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\mu}),\\ & \boldsymbol{z}\geqslant-M\nu,\boldsymbol{d}-\boldsymbol{By}\leqslant M(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}),\\ & \boldsymbol{z}\leqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\in X,\\ & \boldsymbol{\mu}\in\{0,1\}^m,\boldsymbol{v}\in\{0,1\}^{m_2}。\end{cases}$$

其中:$M>0$ 是充分大的罚参数。

证毕。

注:问题(2)可以用现有的 MILP 求解器如 CPLEX 和 Gurobi 来求解。

2 应用例子

本节给出 BLP 问题的一个应用例子,即将混合整数线性变换方法应用于金融系统中的不确定性系统性风险估计问题。

考虑由 n 个银行组成的一个银行间市场。任何两个银行间的债务关系由债务矩阵 $\boldsymbol{L}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 描述,其中 $L_{ij}\geqslant 0$ 表示银行 i 对银行 j 的债务,而且 $L_{ii}=0,L_{ij}>0,i\neq j,i,j=1,\cdots,n$。设 $\hat{b}_i$ 为由银行 i 收到的外部经营性现金流,用来弥补其潜在的现金流不足,$i=1,\cdots,n$。给定 $\hat{\boldsymbol{b}}=(\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_n)^{\mathrm{T}}$,金融系统的系统性风险可通过求解如下线性优化问题来估计[13]:

$$\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n}(1-\boldsymbol{x}_i);\\ \text{s.t.} & (\sum\limits_{j=1}^{n}L_{ij})\boldsymbol{x}_i-\sum\limits_{j=1}^{n}L_{ji}\boldsymbol{x}_j\leqslant\hat{b}_i,i=1,\cdots,n,0\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,\cdots,n\end{cases} \tag{6}$$

其中：$x_i \in [0,1]$（$i=1,\cdots,n$）表示银行 i 付款与其总负债成比例的百分比。

在实践中，银行的经营性现金流受市场波动，因此具有不确定性。考虑到不确定的经营性现金流，文献[5]提出了如下的最坏情形系统性风险（worst-case systemic risk，WCSR）估计问题：

$$\max_{\boldsymbol{u}\in U} \min_{\boldsymbol{x}\in F_1(\boldsymbol{u})} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

其中：$\boldsymbol{e}\in\mathbb{R}^n$ 为分量为 1 的向量，$U\coloneqq\{\boldsymbol{u}\in[0,1]^r:\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant g\}$ 表示多面体不确定性集合，g 为满足 $1<g<r$ 的整数，且

$$F_1(\boldsymbol{u})\coloneqq\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:(\mathrm{diag}(\boldsymbol{Le})-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{Qu}+\hat{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{e}\}。$$

这里，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times r}$ 对某个 $r\leqslant n$，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})$ 表示以 $\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^n$ 的分量为对角元的对角阵。

下面证明 WCSR 问题(7)可变换为一个等价的 BLP 问题。

定理 2　WCSR 问题(7)与如下 BLP 问题有相同的最优值：

$$\begin{cases}\max & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y};\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{y}\in C=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant-\bar{M},\boldsymbol{y}\leqslant 0\}\end{cases} \tag{8}$$

其中：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}-\mathrm{diag}(\boldsymbol{Le})$，$\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{Ae}+\hat{\boldsymbol{b}}$，$\bar{M}>0$ 是充分大的罚参数。

证明　去掉问题(7)的内层问题中的非负约束 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$，并引入辅助变量 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{e}-\boldsymbol{x}$，得到如下问题：

$$\max_{\boldsymbol{u}\in U} \min_{\boldsymbol{z}\in F(\boldsymbol{u})} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \tag{9}$$

其中：

$$F(\boldsymbol{u})=\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n:\boldsymbol{Az}\leqslant\boldsymbol{Qu}+\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{z}\geqslant\boldsymbol{0}\},$$

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}-\mathrm{diag}(\boldsymbol{Le})$，$\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{Ae}+\hat{\boldsymbol{b}}$。类似于文献[4]命题 10 的证明方法，可以证明问题(7)与(9)有相同的最优值和最优解。再利用文献[4]中命题 11 的证明方法，可进一步证明问题(9)等价于如下辅助问题：

$$\max_{\boldsymbol{u}\in U} \min_{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})\in F_0(\boldsymbol{u})} \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}+\bar{M}\boldsymbol{v} \tag{10}$$

其中：$\bar{M}>0$ 是充分大的罚参数，且

$$F_0(\boldsymbol{u})=\{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v})\in\mathbb{R}^{n+1}:\boldsymbol{Az}-\boldsymbol{ve}\leqslant\boldsymbol{Qu}+\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{z}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}\}。$$

然后，利用线性规划的对偶理论，问题(10)可变换为如下等价的 BLP 问题：

$$\begin{cases}\max & \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y};\\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{y}\in C=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant-\bar{M},\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{0}\}\end{cases} \tag{11}$$

其中：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}-\mathrm{diag}(\boldsymbol{Le})$，$\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{Ae}+\hat{\boldsymbol{b}}$，$\bar{M}>0$ 是充分大的。

证毕。

值得指出的是，问题(8)是 BLP 问题(1)的一个特例。注意到集合 U 和 C 是有界的，前面的 MILP 变换方法能用来求解问题(8)。

3　数值实验

本节给出求解 BLP 问题(1)的 MILP 变换方法的数值结果。数值实验在 Matlab R2013b 上实现，在 PC 机(2.90 Gi Hz，16 GiB，RAM)上运行，采用 CPLEX 的 MILP 求解器求解 0-1 MILP 模型。

对具有随机数据的 WCSR 问题(7)测试了 MILP 变换方法，并同文献[3]中所提出的基于凸包络松弛的分支定界算法(记为 B&B)进行数值比较。测试问题中的参数($\boldsymbol{L},\boldsymbol{Q},\hat{\boldsymbol{b}}$)按照文献[5]的方法随机产生，即：$\boldsymbol{L}$ 的非对角元服从 $LN(0.4,1)$，即均值为 0.4 和方差为 1 的对数正态分布；$\boldsymbol{Q}$ 的元素服从 $U(-3,3)$，即区间$[-3,3]$上的均匀分布；$\hat{\boldsymbol{b}}$ 的元素服从 $U(0.5,5)$。注意到 WCSR 问题(7)等价于 BLP 问题，并用 MILP 变换方法求解问题(8)。数值实验中，问题(8)中的罚参数 $\bar{M}$ 设置为 10，MILP 模型(8)中的罚参数 M 设置为 10^5。

表 1 给出了 MILP 与 B&B 算法对 WCSR 问题(7)的 10 个随机测试例子的平均数值结果，其中最优值和时间分别表示算法对 10 个测试问题得到的平均最优值和平均 CPU 时间；“(＊)”表示算法在 3600 s 内求得全局最优解的实例数；“—”表示算法未能在 3600 s 内找到全局最优解。由表 1 可见：MILP 方法能有效地找到所有测试问题的全局解，而当 $n=500$，$r=8$ 和 $n\geqslant 400$，$r=10$ 时 B&B 算法无法在 3600 s 内找到测试问

题的全局最优解。另外,对所有的可解的测试例子,B&B 算法比 MILP 方法所需的时间更长。因此,MILP 变换方法按平均 CPU 时间更优于文献[3]中的 B&B 算法。

表 1　MILP 与 B&B 算法对 WSCR 问题的平均数值结果

n	r	MILP		B&B	
		最优值	时间/s	最优值	时间/s
100	8	−15.9615	4.1009	−15.9615	183.4594
200	8	−27.3689	72.7723	−27.3689	742.5465
300	8	−37.1594	584.9611	−37.1594	1799.2838
400	8	−45.8783	1230.3429	−46.5345	2513.4484(8)
500	8	−53.5811	1534.9498	—	—
100	10	−17.2360	6.7933	−17.9925	970.3243(8)
200	10	−28.3480	74.3399	−28.2559	1280.1035(5)
300	10	−36.4886	885.4153	−35.3921	2458.3344(1)
400	10	−37.0613	1311.8132	—	—
500	10	−55.6878	1322.1439	—	—

4　结　论

本文提出了求 disjoint 双线性规划问题全局最优解的 MILP 变换方法,并将其应用到金融系统中的不确定性系统性风险估计问题。对随机生成的 WCSR 问题进行数值实验,结果表明所提出的 MILP 变换方法比文献[3]中 B&B 全局算法更能快速有效地求解大规模 WCSR 问题。本文所提出的方法仅适用于 disjoint 双线性规划问题,后续将研究大规模 joint 双线性规划问题。

参考文献:

[1] Konno H. A cutting plane algorithm for solving bilinear programs[J]. Mathematical Programming, 1976, 11(1): 14-27.

[2] Gallo G, Ülkücü A. Bilinear programming: an exact algorithm[J]. Mathematical Programming, 1977, 12(1): 173-194.

[3] Al-Khayyal F A, Falk J E. Jointly constrained biconvex programming[J]. Mathematics of Operations Research, 1983, 8(2): 273-286.

[4] Luo H Z, Ding X D, Peng J M, et al. Complexity results and effective algorithms for worst-case linear optimization under uncertainties[J]. INFORMS Journal on Computing, 2021, 33(1): 180-197.

[5] Peng J M, Zhu T. A nonlinear semidefinite optimization relaxation for the worst-case linear optimization under uncertainties[J]. Mathematical Programming, 2015, 152(1/2): 593-614.

[6] Audet C, Hansen P, Jaumard B, et al. A symmetrical linear maxmin approach to disjoint bilinear programming[J]. Mathematical Programming, 1999, 85(3): 573-592.

[7] Sherali H D, Alameddine A. A new reformulation-linearization technique for bilinear programming problems[J]. Journal of Global Optimization, 1992, 2(4): 379-410.

[8] Alarie S, Audet C, Jaumard B, et al. Concavity cuts for disjoint bilinear programming[J]. Mathematical Programming, 2001, 90(2): 373-398.

[9] Ding X S, Al-Khayyal F. Accelerating convergence of cutting plane algorithms for disjoint bilinear programming[J]. Journal of Global Optimization, 2007, 38(3): 421-436.

[10] Kolodziej S, Castro P M, Grossmann I E. Global optimization of bilinear programs with a multiparametric disaggregation technique[J]. Journal of Global Optimization, 2013, 57(4): 1039-1063.

[11] Zhen J Z, Marandi A, Den Hertog D, et al. Disjoint bilinear programming: A two-stage robust optimization perspective[J/OL]. Optimization Online. (2021-04-30)[2021-12-13]. http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2018/06/6685.html.

[12] 张香云. 线性规划[M]. 杭州:浙江大学出版社, 2009: 93.

[13] Eisenberg L, Noe T H. Systemic risk in financial systems[J]. Management Science, 2001, 47(2): 236-249.

(责任编辑:康　锋)