



基于稀疏优化的可展曲面逼近方法

龚伟华, 金 耀

(浙江理工大学信息学院, 杭州 310018)

摘 要: 可展曲面能无形变地映射至平面, 在工业设计领域有着广泛应用。针对基于严格可展条件的重建方法可能存在逼近误差较大的问题, 提出一种基于稀疏优化的网格曲面可展性逼近方法。该方法将“高斯曲率处处为零”的可展条件松弛为“高斯曲率几乎处处为零”, 运用 L_1 范数定义曲面高斯曲率度量, 并结合基于拉普拉斯坐标的逼近能量来控制曲面的形状误差。为求解该非线性非凸问题, 采用泰勒公式将高斯曲率函数线性化, 并使用交替方向乘子法对原问题若干子问题进行迭代计算。结果表明: 该方法能够有效地控制高斯曲率分布, 使高斯曲率场奇异点集中分布于个别顶点, 并能较好地逼近原曲面; 相比现有方法, 各种模型上的逼近结果在可展性和逼近精度方面均有提升。

关键词: 可展曲面; 网格曲面; 高斯曲率; 稀疏优化; 交替方向乘子法

中图分类号: TP391.7; TB47

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2022) 01-0060-09

Approximation method of developable surface based on sparse optimization

GONG Weihua, JIN Yao

(School of Information Science and Technology, Zhejiang
Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Developable surfaces, which can be mapped to a plane without any distortion, are widely applied in the field of industrial design. In view of the problem of large approximation error induced by reconstruction methods based on strict developable condition, a developable approximation method for mesh surfaces based on sparse optimization is proposed. In this method, the developability condition of “Gaussian curvature is zero everywhere” is relaxed to “Gaussian curvature is almost zero everywhere”, and the Gaussian curvature measure of surface is defined by L_1 norm. The approximation energy based on Laplacian coordinates is used to control the shape error of surface. To solve such a nonlinear and non-convex problem, the Taylor formula is employed to linearize the Gaussian curvature function, and some subproblems of the original problem are calculated iteratively by Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM). The experimental results show that this method can effectively control the distribution of Gaussian curvature, so that the singularities will concentrate on some individual vertices and well approximate the original surface. Compared with existing methods, the proposed method achieves an improved developable effect and approximation accuracy in a variety of models.

Key words: developable surface; mesh surface; Gaussian curvature; sparse optimization; alternating direction method

收稿日期: 2021-04-16 网络出版日期: 2021-07-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(61702458); 绍兴市技术创新计划(揭榜挂帅)项目(2020B41006)

作者简介: 龚伟华(1995—), 男, 福建南平人, 硕士研究生, 主要从事计算机图形学、数字几何处理方面的研究。

通信作者: 金 耀, E-mail: jinyao@zstu.edu.cn

0 引言

外形设计是众多制造业产品设计与开发的一个重要环节。其中不少产品的外形均由二维的样板缝制或拼接而成,如船壳加工使用的金属板材,服装、玩具制造业使用的布料,以及家具、皮鞋所用的皮革等。这些产品的传统设计流程通常以“试验-纠错-试验”的方式反复试验,即设计师先制定二维样板,然后试制三维样品,若设计不满意,则根据经验对样板进行修改并重制样品,如此反复才可获得满意结果。显然,该过程繁琐且低效,因此不少学者提出了产品外形的可展曲面建模方法,使得设计的产品模型能不拉伸地展开到2D平面上。该方法可用于指导平板材的裁切,既降低对设计师经验的要求,又能节省试错的时间,提高生产效率。

可展曲面是一类高斯曲率处处为零的特殊曲面。可展曲面的建模方法主要有插值法与逼近法。前者通常根据给定的曲线信息,通过插值计算出完整的可展曲面;后者以给定曲面为参考,在逼近曲面的同时增加其可展性。在早期,可展曲面建模的研究主要针对不同类型的代数曲面,且以插值法为主^[1]。随着制造业工业设计需求的驱动,可展曲面的研究对象偏向于在实际应用中更为广泛的离散网格曲面。四边形网格由于其局部网格结构具有天然的正交性,易于可展条件的数学表示。Liu等^[2]基于变形方法提出了PQ(平面四边形)网格的可展逼近方法,并用于构造建筑外形。Rabinovich等^[3]基于可展曲面在流形上可参数化为正交测地曲线族的思想,提出了基于离散测地网络的建模方法,并研究了离散测地网络的形状空间^[4],将其应用于复杂模型的分片可展曲面逼近^[5]。Kilian等^[6]提出了一种基于弯曲折痕法的可展曲面建模方法,通过交替优化可展曲面及其展平平面,将平面样板折叠成可展曲面;为了简化该曲面的构造过程,Kilian等^[7]还基于绳线网络缝合方法,构建了弯曲折痕曲面。Rabinovich等^[8]进一步提出了一种基于交互式自由变形的弯曲折痕曲面建模方法。上述方法均利用了四边形网格便于可展性数学表示的优势,能够较为方便地进行算法建模与求解。但在很多场合,三角形网格比四边形网格应用更为广泛,因此不少研究从不同角度定义了三角形网格的可展性度量,并运用几何变形的的方法逼近给定的三角形网格曲面。Decaudin等^[9]将网格分解为三角形,并基于锥形度量进行局部锥形逼近,然后运用全局变形法将三角

形缝合,这种锥形度量被应用于基于草图轮廓线的可展曲面建模^[10]。Zeng等^[11]基于扩展高斯映射,提出了一种基于相邻三角形法向差异的可展性度量,并采用了最小二乘法进行求解,但该方法对高斯映射中的曲线拟合结果较为敏感。Zhang等^[12]基于布料仿真思想,提出一种拉伸量可控的可展曲面拟合方法。Stein等^[13]提出了一种“铰链度量”,通过优化非线性能量,使网格的边尽可能与脊线或母线方向对齐,但该方法与初始三角化较为敏感,且不考虑网格曲面的逼近误差。Sellán等^[14]将曲面可展性描述为关于矩阵秩的约束,并运用压缩感知理论的秩极小化方法进行求解,但该方法仅适用于高度场曲面。更多方法则利用网格顶点的角亏公式(离散高斯曲率)定义可展性度量。Wang等^[15]在角亏度量的硬约束下进行保边长变形,但其能量函数非线性程度高,求解复杂;为了降低求解复杂度,他们分别提出了基于可展拉普拉斯^[16]与最小二乘范数^[17]的可展曲面逼近方法。徐鹏飞等^[18]利用了最小二乘范数算法框架,将变形能量替换为尽可能保刚性能量,能够获得更好的曲面逼近效果。Tang等^[19]将基于角亏度量的可展能量与保长能量,采用局部线性逼近的手段,将问题转化为线性方程,并通过迭代求解,加快了求解速度。

综上所述,现有方法大多将网格模型看作整体严格可展的曲面进行求解。但由于实际加工而成的产品外形往往由多个曲面缝制而成,在曲面的缝合处可能存在不可展(高斯曲率不为零)的顶点,而现有方法忽视了该性质,所以往往存在较大的逼近误差;虽然一些方法采用分片可展的逼近法^[5,13],但其不能控制曲面的逼近程度。本文针对严格可展条件导致逼近误差较大的问题,将可展条件“高斯曲率处处为零”松弛为“高斯曲率几乎处处为零”,提出了一种基于稀疏优化的可展曲面逼近方法。该方法运用 L_1 范数描述高斯曲率场分布,并结合拉普拉斯能量控制逼近误差,通过优化方法,期望将非零高斯曲率通过优化方式分布于网格上极少数顶点,同时又能较好地保持原曲面形状。为求解该非光滑非凸的优化问题,本文将高斯曲率进行局部线性化近似,并采用交替方向乘子法(Alternating direction method of multipliers, ADMM)进行求解。最后通过实验与已有方法在可展误差和逼近精度两方面进行比较,验证本文算法的有效性,从而从稀疏优化角度探讨了一种新的可展曲面逼近方法。

1 算法建模

1.1 问题描述

给定离散曲面可表示为三角形网格 $M = \{V, F\}$, 其中: $V = \{v_i \in \mathbf{R}^3\}_{i=0}^{n-1}$ 为顶点集合, $F = \{t_i\}_{i=0}^{m-1}$ 为三角形面片集合。本文的目标是获得一个与 M' 具有相同拓扑连接关系的三角网格曲面, 其中: $M' = \{V', F\}$, $V' = \{v'_i \in \mathbf{R}^3\}_{i=0}^{n-1}$, 使其在尽可能逼近原始网格曲面 M 的同时, 提高曲面的可展性, 即使得网格内部顶点“高斯曲率几乎处处为零”。

根据微分几何中可展曲面的定义^[20], 一个连续曲面可展当且仅当曲面的高斯曲率 K 处处为零, 即:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = 0 \quad (1)$$

其中: κ_1 和 κ_2 分别为最大和最小曲率。因此, 为了构建一个逼近给定网格曲面 M 的可展曲面, 通常将问题描述为如下约束优化问题:

$$\begin{cases} \min_V E_{\text{App}}(M, M'), \\ \text{s.t. } K(v_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2)$$

其中: E_{App} 为曲面的逼近误差度量, $K(v_i)$ 表示顶点 v_i 的高斯曲率。该问题的描述方式通常用于逼近整体可展的曲面, 但是对于一般曲面, 其内部可能存在不可展的“奇异点”, 且有时无法确定这些奇异点的分布位置, 在这种情况下运用式(2)进行求解将导致较大的逼近误差。

因此, 本文将“高斯曲率处处为零”的严格可展条件松弛为“高斯曲率几乎处处为零”, 并运用 L_0 范数度量网格上高斯曲率分布, 即将高斯曲率度量 E_{Dev} 设置为所有网格顶点的高斯曲率所构成向量 $\mathbf{K} = [K(v_0), K(v_1), \dots, K(v_{n-1})]^T$ 的非零个数:

$$E_{\text{Dev}} = \|\mathbf{K}\|_0 = \#(i \mid K(v_i) \neq 0) \quad (3)$$

通过极小化式(3)可使高斯曲率分布尽可能稀疏。但向量的 L_0 范数是一个非凸非光滑且不连续的函数, 这为优化问题的求解带来较大困难。考虑到 L_1 范数是 L_0 范数的最紧凸松弛^[21], 本文将 L_0 范数松弛为 L_1 范数对其进行近似, 将式(3)转化为:

$$E_{\text{Dev}} = \|\mathbf{K}\|_1 = \sum_{v \in V} |K(v)| \quad (4)$$

由高斯绝妙定理^[22]可知, 曲面的高斯曲率是内蕴的, 即由曲面的第一基本型唯一确定。进一步根据曲面论的基本定理^[22], 曲面的形状由曲面的第一基本型与第二基本型共同唯一确定。因此, 仅由高斯曲率场不能确定曲面形状。为使重建曲面形状尽

可能逼近原始曲面, 本文利用与第二基本型密切相关的拉普拉斯坐标构造曲面逼近度量 E_{App} , 用以度量所求曲面与原始曲面之间的距离误差。结合可展度量 E_{Dev} , 该可展性逼近问题可描述为如下优化问题:

$$\min_V E_{\text{Dev}} + \omega E_{\text{App}} \quad (5)$$

其中: ω 为平衡两个能量项(可展性与逼近程度)的权重。

1.2 离散化

为求解式(5)所描述的优化问题, 需首先对该公式进行离散化。对于高斯曲率度量 E_{Dev} , 其重点对顶点高斯曲率方程进行离散化, 通常网格内部顶点 v_i 的离散高斯曲率 $K(v_i)$ 采用角亏公式, 即:

$$K(v_i) = \frac{1}{A_v} (2\pi - \sum_j \theta_j) \quad (6)$$

其中: A_v 为顶点 v_i 的 Voronoi 面积(图1中深色区域的面积); θ_j 为顶点 v_i 在相邻面片 j 上的内角。

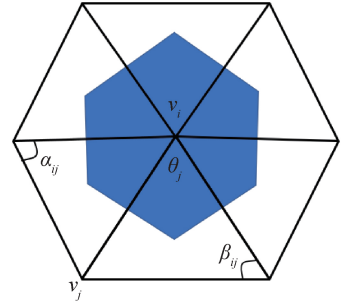


图1 三角网格上顶点 v_i 的局部区域

为较好地保持原曲面的形状, 采用原始曲面的离散拉普拉斯坐标对曲面的局部细节进行编码。同时, 为使网格顶点 v_i 在变形过程中与原始网格 M 对应顶点 v_i^0 偏离量尽可能小, 因此曲面逼近能量 E_{App} 可描述为:

$$E_{\text{App}} = \sum_{v_i \in V} (\omega_p \|v_i - v_i^0\|_2^2 + \omega_l \|\mathbf{L}v_i - \mathbf{L}v_i^0\|_2^2) \quad (7)$$

其中: ω_p 和 ω_l 分别对应两种约束的权值; \mathbf{L} 为余切权离散拉普拉斯算子^[23], 形式为:

$$L_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2A_v} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}), & i \neq j; \\ \sum_{v_k \in \Omega(v_i)} L_{ik}, & i = j \end{cases} \quad (8)$$

其中: $\Omega(v_i)$ 表示与顶点 v_i 相邻的一圈顶点; α_{ij} 和 β_{ij} 表示边 $v_i v_j$ 的两个对角, 如图1所示。

将式(4)和式(7)分别代入式(5), 并改写为矩阵形式, 得到最终的优化目标方程:

$$\min_V \|\mathbf{K}\|_1 + \omega_p \|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\|_2^2 + \omega_l \|\mathbf{L}\mathbf{V} - \mathbf{L}\mathbf{V}_0\|_2^2 \quad (9)$$

其中： \mathbf{V} 和 \mathbf{V}_0 分别为所有网格顶点 v_i 和原始网格顶点 v_i^0 组成的向量。

2 数值求解

2.1 高斯曲率线性化

在式(9)中,离散高斯曲率 $K(v_i)$ 关于顶点坐标的函数形式复杂,且高度非线性非凸。若直接对其进行求解,不仅计算开销大,收敛性也较差,因此本文采用与文献[19]类似的思路,对离散高斯曲率函数局部线性化近似,即在当前网格 M_{cur} 上对其使用泰勒公式,得到:

$$K(v_i) \approx \frac{1}{A_v}(2\pi - \theta(v_i^{\text{cur}}) + \nabla\theta(v_i^{\text{cur}})^T(v_i - v_i^{\text{cur}})) \quad (10)$$

其中： $\theta(v_i)$ 表示顶点 v_i 的内角和函数, v_i^{cur} 表示顶点 v_i 在当前网格 M_{cur} 的位置, $\nabla\theta(v_i^{\text{cur}})$ 表示内角和函数在当前网格 M_{cur} 上的梯度向量。式(10)的具体推导公式可见文献[16]。为简化表示,令 $G_i = -\frac{\nabla\theta(v_i^{\text{cur}})}{A_v}$, $b_i = \frac{1}{A_v}(2\pi - \theta(v_i^{\text{cur}}) + \nabla\theta(v_i^{\text{cur}})^T \cdot v_i^{\text{cur}})$, 代回式(9)中,并整理为矩阵形式,得到:

$$\min_{\mathbf{V}} \|\mathbf{GV} + \mathbf{b}\|_1 + w_p \|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\|_2^2 + w_1 \|\mathbf{LV} - \mathbf{LV}_0\|_2^2 \quad (11)$$

其中： \mathbf{G} 和 \mathbf{b} 分别表示所有 G_i 和 b_i 组成的向量。

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{C}} \|\mathbf{C}\|_1 + \langle \mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{C} - (\mathbf{GV}^{(k)} + \mathbf{b}) \rangle + \frac{\mu^{(k)}}{2} \|\mathbf{C} - (\mathbf{GV} + \mathbf{b})\|_F^2, \\ \mathbf{V}^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{V}} \langle \mathbf{Y}, \mathbf{C}^{(k+1)} - (\mathbf{GV} + \mathbf{b}) \rangle + \frac{\mu^{(k)}}{2} \|\mathbf{C}^{(k+1)} - (\mathbf{GV} + \mathbf{b})\|_F^2 + w_p \|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\|_2^2 + w_1 \|\mathbf{LV} - \mathbf{LV}_0\|_2^2, \\ \mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{Y}^{(k)} + \mu^{(k)} (\mathbf{C}^{(k+1)} - (\mathbf{GV}^{(k+1)} + \mathbf{b})), \\ \mu^{(k+1)} = \rho \mu^{(k)} \end{cases} \quad (14)$$

对于更新 \mathbf{C} 的子问题,有如下闭式解:

$$\mathbf{C}^{(k+1)} = \operatorname{shrink}\left((\mathbf{GV}^{(k)} + \mathbf{b}) - \frac{1}{\mu^{(k)}} \mathbf{Y}^{(k)}, \frac{1}{\mu^{(k)}}\right) \quad (15)$$

其中： $\operatorname{shrink}(\cdot, \cdot)$ 为对矩阵所有元素 x 的压缩算子:

$$\operatorname{shrink}(x, \tau) = \operatorname{sign}(x) \max(|x| - \tau, 0) \quad (16)$$

对于更新 \mathbf{V} 的子问题,根据极值存在的一阶偏导条件得到如下线性方程组:

$$(\mu \mathbf{G}^T \mathbf{G} + 2w_1 \mathbf{L}^T \mathbf{L} + 2w_p \mathbf{I}) \mathbf{V} = \mathbf{G}^T (\mathbf{Y} + \mu (\mathbf{C} - \mathbf{b})) + 2(w_1 \mathbf{L}^T \mathbf{L} + w_p \mathbf{I}) \mathbf{V}_0 \quad (17)$$

该线性方程左侧的系数矩阵是对称正定(SPD)矩阵,且在迭代过程中其矩阵结构保持不变,故可采用乔

2.2 ADMM 法求解

本文采用 ADMM 数值方法^[24] 求解式(11)所表示的稀疏优化问题。首先,通过引入辅助变量 $\mathbf{C} = \mathbf{GV} + \mathbf{b}$, 简化 L_1 范数的表达式,从而将式(11)转化为如下约束优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{V}, \mathbf{C}} \|\mathbf{C}\|_1 + w_p \|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\|_2^2 + w_1 \|\mathbf{LV} - \mathbf{LV}_0\|_2^2, \\ \text{s.t. } \mathbf{C} = \mathbf{GV} + \mathbf{b} \end{cases} \quad (12)$$

然后,根据增广拉格朗日法 (Augmented Lagrange method, ALM) 将原问题(12)转换为求解对应的增广拉格朗日方程:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{V}, \mathbf{C}, \mathbf{Y}, \mu) = & \|\mathbf{C}\|_1 + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{C} - (\mathbf{GV} + \mathbf{b}) \rangle + \\ & \frac{\mu}{2} \|\mathbf{C} - (\mathbf{GV} + \mathbf{b})\|_F^2 + w_p \|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\|_2^2 + \\ & w_1 \|\mathbf{LV} - \mathbf{LV}_0\|_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

其中： $\mu > 0$ 为惩罚系数； \mathbf{Y} 为拉格朗日乘子组成的向量； $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示矩阵的内积算子。在求解此无约束优化问题时,虽然更新 μ 和 \mathbf{Y} 计算简单,但是每次迭代都需要同时求解 \mathbf{V} 和 \mathbf{C} , 该求解过程计算复杂度高且难度大。因此,本文使用交替方向法 (Alternating direction method, ADM)^[25], 拆分 ALM 中 \mathbf{V} 和 \mathbf{C} 的更新计算,变为在迭代中分别轮流更新 \mathbf{V} 和 \mathbf{C} , 将式(13)的求解转化为如下多个子问题:

利斯基分解法^[26] 对该系数矩阵进行结构预分解:

$$\tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{L}}^T = \mu \mathbf{G}^T \mathbf{G} + 2w_1 \mathbf{L}^T \mathbf{L} + 2w_p \mathbf{I} \quad (18)$$

其中： $\tilde{\mathbf{L}}$ 是下三角矩阵, $\tilde{\mathbf{D}}$ 是对角阵。使用分解后的矩阵回代式(17)求解 \mathbf{V} , 步骤如下:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{G}^T (\mathbf{Y} + \mu (\mathbf{C} - \mathbf{b})) + 2(w_1 \mathbf{L}^T \mathbf{L} + w_p \mathbf{I}) \mathbf{V}_0, \\ \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{Z}} = \tilde{\mathbf{Q}}, \\ \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{L}}^T \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{Z}} \end{cases} \quad (19)$$

由于结构分解占用了线性方程组求解的大部分时间,而结构预分解后,每次迭代仅需进行数值分解与回代计算,因此结构预分解可以提高该线性方程组的求解效率。

综上,基于稀疏优化的可展性逼近的算法流程见算法 1。

算法 1 基于稀疏优化的可展性逼近

输入:原始网格 M ,平衡权重 ω ,保型能量权值 w_p, w_l , 压缩因子 τ

输出:结果网格 M'

- 1 初始化 $\mathbf{Y}^{(0)} = \mathbf{0}, \mu > 0, \rho > 1$;
- 2 while(能量未收敛){
- 3 使用式(15)求解 $\mathbf{C}^{(k+1)}$;
- 4 使用式(18)–(19)求解 $\mathbf{V}^{(k+1)}$;
- 5 根据式(14)更新 $\mu^{(k+1)}$;
- 6 根据式(14)更新 $\mathbf{Y}^{(k+1)}$;
- 7 }
- 8 返回结果网格的顶点位置 \mathbf{V}' ;

3 结果与讨论

为测试和评估本文方法,本文通过实验分析参数设置对算法的影响,并与现有方法进行对比。实验所用软件环境为 Windows 10 操作系统,硬件环境为 3.4 GHz Intel Core i5-7500 CPU,并搭配 16 GB 内存,算法中涉及的线性方程组求解及相关矩阵运算使用 Eigen 库。实验中所用模型的信息如表 1 所示,为了使得参数设置不受模型尺寸与初始拓扑影响,本文将输入模型的三维坐标统一归一化到 $[0,1]$,然后将式(9)中的权重默认设置为: $w_p = 0.1w_l = \omega$ 。

表 1 所用模型的信息

模型名称	顶点数/个	面片数/个	初始 E_D^{mean}	初始 E_D^{max}
布片	229	403	6.7321×10^{-2}	9.0474×10^{-3}
T 恤	714	1272	1.4493×10^{-2}	2.1362×10^{-1}
裙子	760	1381	5.2335×10^{-3}	2.8551×10^{-2}
短裙	560	993	5.1211×10^{-2}	4.6866×10^{-3}

本文从两方面评估方法的有效性,即可展误差与逼近误差。因此,本文给出如下量化评估方法:

差与逼近误差。因此,本文给出如下量化评估方法:

a)对于可展误差,定义平均可展误差: $E_D^{\text{mean}} = \frac{1}{N_{\text{in}}} \sum_{v \in V_{\text{in}}} |K(v)|$ 和最大可展误差: $E_D^{\text{max}} = \max\{|K(v)| : v \in V_{\text{in}}\}$ 。

b)对于逼近误差,采用距离与面积变化率进行刻画。由于曲面在变形过程中顶点的分布可能发生切向偏移,常用的点到点欧氏距离不能准确描述实验方法的逼近效果,故本文使用逼近曲面 M' 到原始曲面 M 的全局误差——霍斯托夫距离进行度量: $E_H = \max\{\min\{\|v_i - v_j\|_2 | v_j \in M\} | v_i \in M'\}$;同时,为保持曲面的表面积,引入曲面表面积变化率: $E_A = |\text{Area}(M') - \text{Area}(M)| / \text{Area}(M')$ 。

本文采用颜色映射热力图可视化可展误差,颜色表示每个顶点的高斯曲率绝对值,深色表示绝对值较小可展性较好,颜色越浅则可展性越差。

为观察参数 μ 和 ρ 对实验结果的影响,本文在相同平衡权重 ω 下,比较不同 μ 和 ρ 下的实验结果(见图 2—图 3)。由图 2(a)可见,公式总能量下降速度与 μ 成反比,即 μ 越小能量下降越快。而当 μ 取值过小时,如 $\mu = 10^3$,能量曲线出现波动现象(见图 2(a)中方块标记曲线)。但是,从固定 μ 设置不同 ρ 值的实验结果(见图 2(b))中发现,当 $\rho = 1.02$ 时在相同迭代次数内方程总能量下降得更低,并且下降曲线也更为光滑。图 3 为不同权重下的可展逼近得到的模型,以图 3(b)的实验结果为比较基准, μ 值设置更大的实验结果(见图 3(c)—(d))与之在相同迭代次数下相比,曲面的可展逼近效果十分有限;与不同 ρ 值的实验结果(见图 3(e)—(f))相比较, $\rho = 1.02$ 对应的实验结果显然具有更好的可展逼近效果,并且未出现额外的高斯曲率奇异点。根据本文实验,参数设置为 $\mu = 10^3, \rho = 1.02$ 的情况下能够得到最优的实验结果。

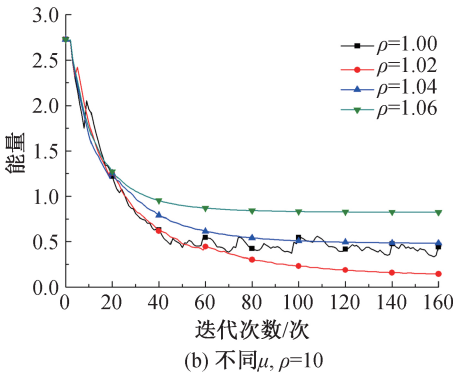
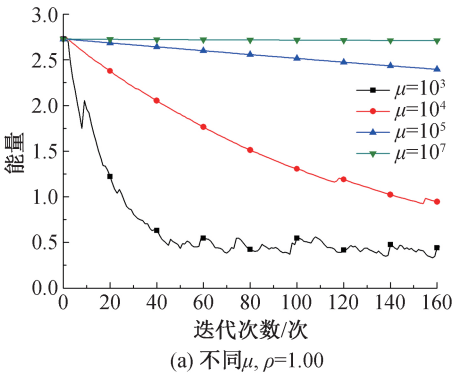


图 2 不同 μ 和 ρ 情况下方程总能量与迭代次数的关系曲线

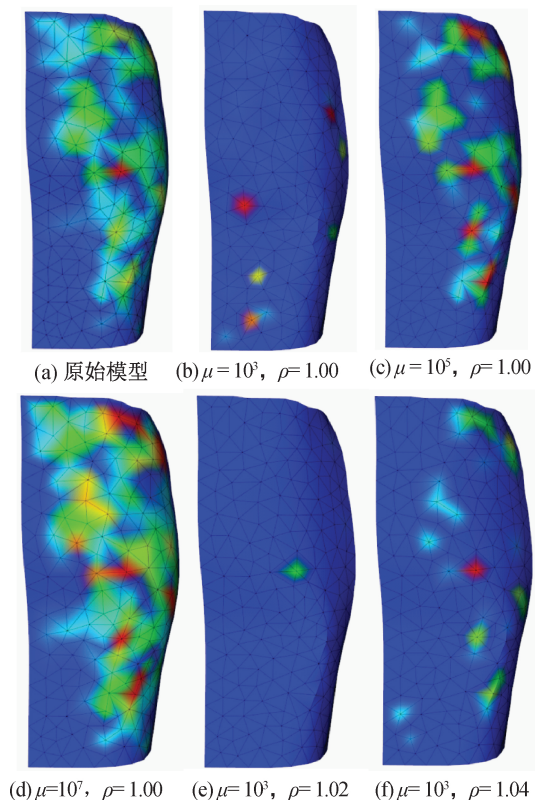


图 3 不同 μ 和 ρ 情况下本文方法对布片模型处理后的高斯曲率分布

图 4 和图 5 展示了在相同 μ 和 ρ 情况下,不同平衡权重 ω 对应的实验结果。从图 4 可见,当 ω 过小,将导致数值求解不稳定,使实验结果的可展与逼近误差均较大;当 ω 增大至 10^{-3} 及以上,随着 ω 增大逼近误差逐渐降低,同时可展性误差逐渐升高,说明 ω 能够有效平衡算法的可展性优化效果和逼近程度。根据本文实验,多数情况下,当 $\omega = 0.01$ 时,算法能够获得较平衡的实验结果。

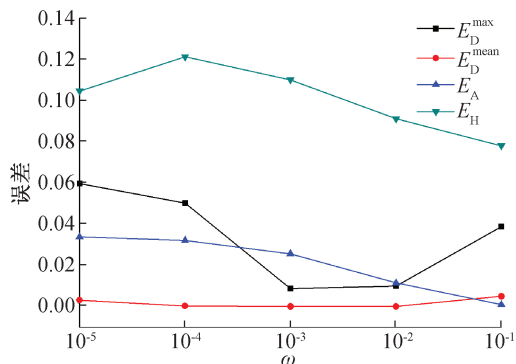


图 4 不同平衡权重 ω 下的误差曲线

为验证本文提出的松弛可展约束并使用稀疏优化的方法能否获得更好的可展性优化效果和逼近精度,本文分别使用本文方法以及未松弛可展约束的方法^[16-17]测试了 T 恤模型。其中文献[16]和文献[17]均采用严格的可展约束,实验结果见图 6。文献[16]

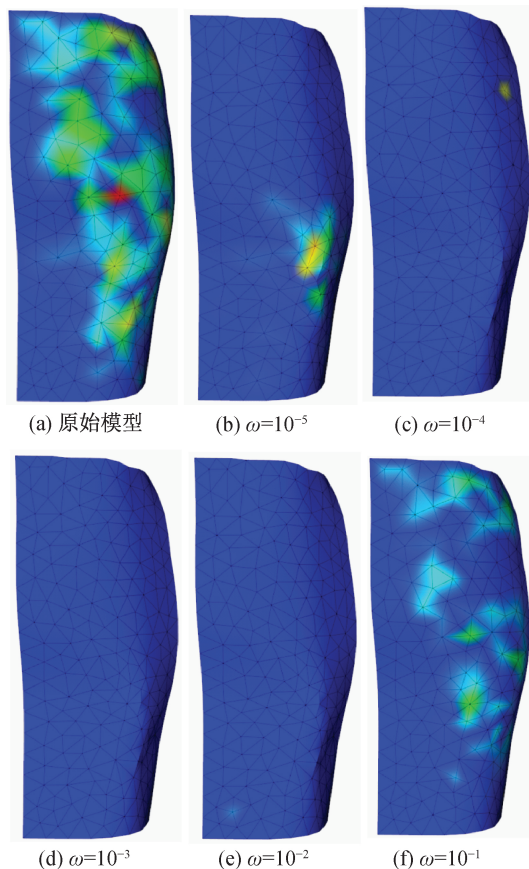


图 5 不同 ω 情况下本文方法对布片模型处理后的高斯曲率分布的方法基于可展拉普拉斯,并使用直接牛顿法求解,虽然整体有不错的可展逼近效果,但从图 6(c)的实验结果中能够看出,T 恤模型两侧腋下部分均有较大的形变。文献[17]的方法是在更新网格时使用拉普拉斯变形提供了一定的保形效果,但正是由于拉普拉斯变形的平滑效果也导致了模型大部分细节的丢失,图 6(d)中 T 恤下部左右两边的凹陷均被抹平。而本文方法的实验结果(图 6(e)),模型上两处高斯曲率误差集中的位置符合实际中服装“省尖”所存在的位置;从误差数据(表 2)也能够看到,本文方法具有与文献[16]方法同一数量级的可展逼近效果,同时在各项逼近误差上相比两种对比方法均有 40% 以上的领先。

为分析本文方法的逼近效果,本文使用裙子模型进行了实验,并与文献[19]的方法进行比较,结果见图 7。文献[19]与本文方法类似添加了逼近约束,但文献[19]选择边长作为约束目标,导致逼近过程中出现不规则褶皱,如图 7(b)模型左上角。而本文方法使用了描述局部特征的拉普拉斯坐标作为逼近约束,虽然损失了少部分的逼近精度,但是并未出现上述的情况,保持了模型的光滑;并且得益于稀疏优化的思想,高斯曲率分布更合理,使得本文方法在平均可展误差方面比文献[19]的方法降低了约 35%。

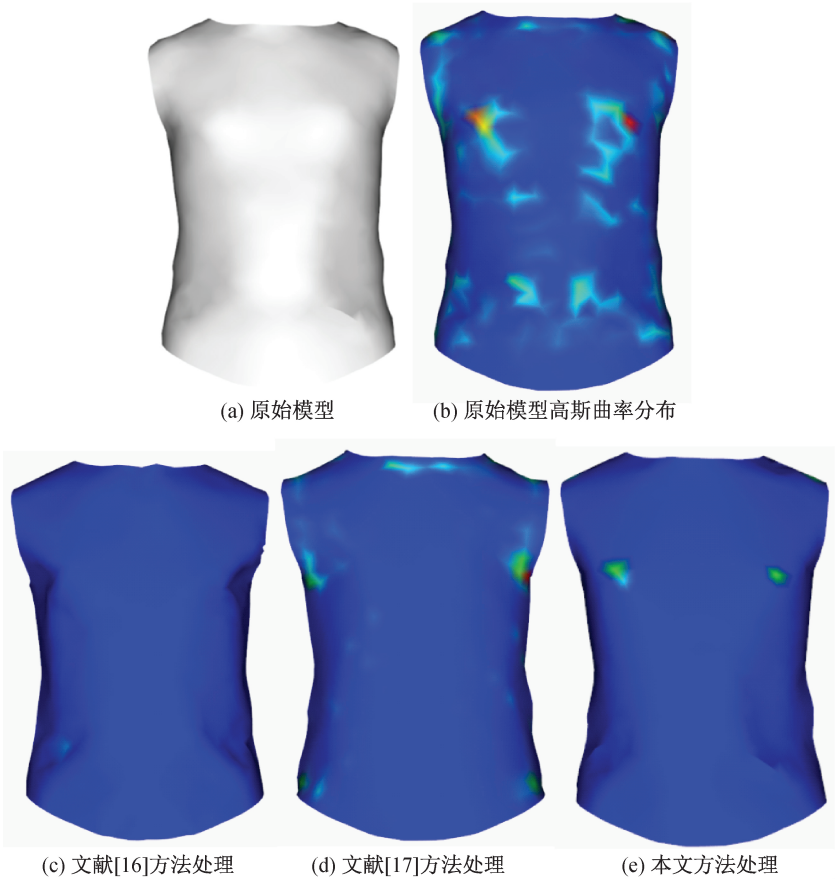


图 6 文献[16-17]和本文方法对 T 恤模型处理后的高斯曲率分布

此外,本文与文献[13]中的方法也进行了比较实验,该方法同样采用将曲面的高斯曲率聚集到部分顶点的思想,实验结果如图 8 所示。从图 8(c)中可以看到,由于文献[13]通过定义“铰链”聚集高斯曲率,导致该方法对应的模型上出现明显的“折痕”,与之相比本文方法的逼近结果更加自然,同时在可展逼近效果上也有较大优势,在实际中应用更加灵活。

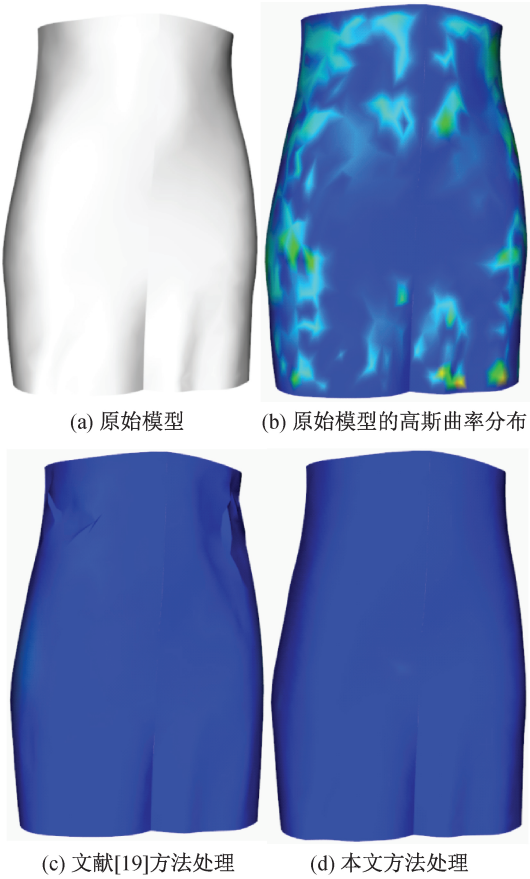


图 7 文献[19]和本文方法对裙子模型处理后的高斯曲率分布

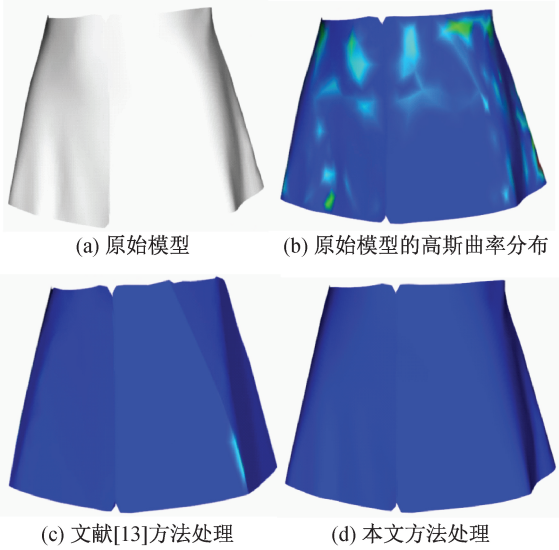


图 8 文献[13]和本文方法对短裙模型处理后的高斯曲率分布

本文方法的主要耗时步骤为计算 $\mathbf{V}^{(k+1)}$ 所涉及大型稀疏线性方程组的求解。虽然本文运用乔利斯基分解法,对系数矩阵进行结构预分解,加快了求解效率,但仍占用了大部分计算开销。本文

比较了各个算法在不同模型上的运行时间,实验数据见表 2。由表 2 可见,本文方法相比于文献 [19]方法具有明显优势,而与其他方法相比,效率相当。

表 2 各实验结果具体误差数据

模型名称	逼近方法	实验结果	运行时间/s	E_D^{mean}	E_D^{max}	E_H	$E_A/\%$
布片	本文方法	图 3 (b)	8.55	2.7745×10^{-3}	1.1169×10^{-2}	1.5007×10^{-1}	0.23
		图 3 (c)	8.52	1.6757×10^{-4}	1.9974×10^{-2}	1.7317×10^{-1}	2.89
		图 3 (d)	8.54	2.1600×10^{-3}	4.7360×10^{-2}	1.2795×10^{-1}	1.77
		图 3 (e)	8.47	5.6185×10^{-3}	6.2477×10^{-2}	9.7886×10^{-2}	0.40
		图 3 (f)	8.49	1.1846×10^{-2}	7.2532×10^{-2}	2.6447×10^{-3}	0.28
布片	本文方法	图 5 (b)	8.43	3.0678×10^{-3}	5.9685×10^{-2}	1.0454×10^{-1}	0.34
		图 5 (c)	8.54	3.3930×10^{-4}	5.0200×10^{-2}	1.2115×10^{-1}	0.32
		图 5 (d)	8.50	5.8801×10^{-5}	8.7605×10^{-3}	1.1000×10^{-1}	0.26
		图 5 (e)	8.48	5.8221×10^{-4}	9.9057×10^{-3}	9.1085×10^{-2}	0.11
		图 5 (f)	8.51	4.9937×10^{-3}	3.8701×10^{-2}	7.8035×10^{-2}	0.01
T 恤	本文方法	图 6 (e)	29.5	7.3233×10^{-4}	7.8881×10^{-2}	4.4676×10^{-2}	1.46
	文献[16]	图 6 (c)	22.4	1.5679×10^{-4}	2.7492×10^{-2}	7.7625×10^{-2}	5.63
	文献[17]	图 6 (d)	27.7	8.3107×10^{-3}	7.4100×10^{-1}	1.1681×10^{-1}	10.86
裙子	本文方法	图 7 (d)	27.5	3.3928×10^{-3}	3.5497×10^{-2}	1.6202×10^{-2}	0.48
	文献[19]	图 7 (c)	35.4	6.7812×10^{-3}	3.8843×10^{-2}	1.7285×10^{-2}	0.55
短裙	本文方法	图 8 (d)	18.1	9.6969×10^{-5}	2.6369×10^{-3}	3.7109×10^{-2}	0.37
	文献[13]	图 8 (c)	17.8	2.4952×10^{-4}	1.1590×10^{-2}	2.4129×10^{-2}	0.19

4 结 论

本文提出了一种基于稀疏优化模型的离散曲面可展性逼近方法。该方法松弛了曲面严格可展的约束,采用稀疏优化方法自动优化高斯曲率场的分布,求解时使用 ADMM 迭代求解,保证了方程的收敛性。实验结果表明,与未考虑保形的文献[16]方法的比较实验中,本文在可展性优化效果上有一定劣势,但在其余情况下本文方法均能得到良好的可展效果,同时能够较好地控制逼近精度。

由于自动优化高斯曲率分布的方法具有一定的随机性,在某些场合可能导致逼近结果不符合实际期望,此时为获得满意的结果需要调节方程中的参数多次尝试,这将限制该方法的在不同情况下的适用性。在未来的工作中,将结合半自动方法,在部分确定异点位置的情形下探索符合实际需求的高斯曲率场的求解方法。

参考文献:

[1] Bo P B, Zheng Y J, Chu D H, et al. As-developable-as-possible B-spline surface interpolation to B-spline curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2020, 79: 101863.

[2] Liu Y, Pottmann H, Wallner J, et al. Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces [C]//ACM SIGGRAPH 2006. New York: ACM Press, 2006: 681-689.

[3] Rabinovich M, Hoffmann T, Sorkine-Hornung O. Discrete geodesic nets for modeling developable surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics, 2018, 37(2): 16-33.

[4] Rabinovich M, Hoffmann T, Sorkine-Hornung O. The shape space of discrete orthogonal geodesic nets [J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 37(6): 228-245.

[5] Ion A, Rabinovich M, Herholz P, et al. Shape approximation by developable wrapping [J]. ACM Transactions on Graphics, 2020, 39(6): 200-211.

[6] Kilian M, Flöry S, Chen Z G, et al. Curved folding [J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(3): 75-83.

[7] Kilian M, Monszpart A, Mitra N J. String Actuated Curved Folded Surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics, 2017, 36(3): 25-37.

[8] Rabinovich M, Hoffmann T, Sorkine-Hornung O. Modeling curved folding with freeform deformations [J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 38(6): 170-181.

[9] Decaudin P, Julius D, Wither J, et al. Virtual garments: A fully geometric approach for clothing design [J]. Computer Graphics Forum, 2006, 25(3):

- 625-634.
- [10] Jung A, Hahmann S, Rohmer D, et al. Sketching folds: Developable surfaces from non-planar silhouettes [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(5): 1-12.
- [11] Zeng L, Liu Y J, Chen M, et al. Least squares quasi-developable mesh approximation [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2012, 29(7): 565-578.
- [12] Zhang Y B, Wang C C L, Ramani K. Optimal fitting of strain-controlled flattenable mesh surfaces [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2016, 87(9): 2873-2887.
- [13] Stein O, Grinspun E, Crane K. Developability of triangle meshes [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): 211-220.
- [14] Sellán S, Aigerman N, Jacobson A. Developability of heightfields via rank minimization [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(4): 109.
- [15] Wang C C L, Tang K. Achieving developability of a polygonal surface by minimum deformation: A study of global and local optimization approaches [J]. *The Visual Computer*, 2004, 20(8/9): 521-539.
- [16] Wang C C L. Towards flattenable mesh surfaces [J]. *Computer-Aided Design*, 2008, 40(1): 109-122.
- [17] Wang C C L. A least-norm approach to flattenable mesh surface processing [C]//2008 IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications. Stony Brook, NY, USA: IEEE, 2008: 131-138.
- [18] 徐鹏飞, 刘利刚. 三维网格曲面的可展性优化算法 [J]. *计算机学报*, 2010, 33(5): 927-934.
- [19] Tang K, Chen M. Quasi-developable mesh surface interpolation via mesh deformation [J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2009, 15(3): 518-528.
- [20] Carmo M D. *Differential Geometry of Curves and Surfaces* [M]. New York: Prentice-Hall, 1976: 56-80.
- [21] Candes E J, Tao T. Decoding by linear programming [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, IEEE, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [22] Stoker J J. *Differential geometry* [M]. New York: Wiley-Interscience, 1969: 23-40.
- [23] Meyer M, Desbrun M, Schröder P, et al. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds [M]//Hege H C, Polthier K. *Mathematics and Visualization*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003: 35-57.
- [24] Li K, Yang J Y, Lai Y K, et al. Robust non-rigid registration with reweighted position and transformation sparsity [J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2019, 25(6): 2255-2269.
- [25] Boyd S. *Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers* [M]. Boston: Now Publishers Inc, 2010: 11-21.
- [26] Flannery B P, Press W H, Teukolsky S A, et al. *Numerical recipes in C* [J]. Press Syndicate of the University of Cambridge, New York, 1992, 24(78): 36.

(责任编辑:康 锋)