



# 具有脉冲效应的 Holling-type II 捕食者—食饵模型

葛建国<sup>1</sup>, 潘诗瑶<sup>2</sup>

(1.杭州科技职业技术学院基础教学部, 杭州 311402; 2.温州理工学院数据科学与人工智能学院, 浙江温州 325035)

**摘要:** 采用脉冲模拟喷洒杀虫剂、释放食饵等人为引起的种群数量的突变, 讨论了具有脉冲效应的 Holling-type II 捕食者—食饵模型, 探究了不同参数条件下该系统周期轨道的存在性以及 Zhukovsky 拟稳定性, 进而分析了人为因素对种群间生态平衡状态的影响。首先, 基于积分估计讨论了半平凡脉冲周期轨道的 Zhukovsky 拟稳定性。其次, 根据脉冲集的具体位置对非平凡周期轨道的存在性及 Zhukovsky 拟稳定性展开了分类讨论。一方面, 基于格林公式以及 Poincaré-Bendixson 定理, 通过对参数进行约束提出了判断该系统是否存在周期轨道的充分条件, 即当参数的具体取值满足相应的条件时, 可判定该参数条件下系统周期轨道的存在性; 另一方面, 对存在的脉冲周期轨道, 进一步分析其 Zhukovsky 拟稳定性, 即讨论了在允许时滞存在的情况下, 脉冲周期轨道与其充分小邻域内的解是否保持大致的同步。所得结果推广了 Holling-type II 捕食者—食饵模型的一般性结论, 更贴合实际生物背景。

**关键词:** 脉冲效应; Holling-type II 捕食者—食饵模型; 周期轨道; 存在性; Zhukovsky 拟稳定性

**中图分类号:** O175.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-3851 (2021) 11-0846-10

## A Holling-type II predator-prey model with impulsive effects

GE Jianguo<sup>1</sup>, PAN Shiyao<sup>2</sup>

(1.Department of Basic Education, Hangzhou Polytechnic, Hangzhou 311402, China;

2.School of Data Science and Artificial Intelligence, Wenzhou University of Technology, Wenzhou 325035, China)

**Abstract:** In this paper, the mutation of population caused by the spraying of insecticides and the release of prey was simulated using impulses and the Holling-type II predator-prey model with impulsive effects was discussed. Then, the existence and Zhukovsky quasi-stability of periodic orbits were investigated under different parameter conditions, and the impact of human factors on the ecological balance among populations was further analyzed. Firstly, the Zhukovsky quasi-stability of semi-trivial impulsive periodic orbits was discussed based on integral estimation. Secondly, the existence and Zhukovsky quasi-stability of non-trivial periodic orbits were discussed according to the specific position of the impulsive set. On the one hand, based on Green's formula and Poincaré-Bendixson theorem, this paper proposed the sufficient conditions for judging whether there existed periodic orbits in the system by constraining the parameters, i.e., when the specific values of parameters met the corresponding conditions, the existence of periodic orbits could be determined under the given parameters. On the other hand, this paper further analyzed the Zhukovsky quasi-stability of the existing impulsive periodic orbits, i.e., whether the impulsive periodic orbits maintained roughly synchronized with solutions in their sufficiently small neighborhood in case of the time delay allowed. The results promoted the general conclusions of the Holling type II predator-prey model and better conformed to the actual biological background.

**Key words:** impulsive effects; a Holling-type II predator-prey model; periodic orbits; existence; Zhukovsky quasi-stability

0 引 言

脉冲动力系统是一类允许在某些瞬间发生突跃的不连续动力系统。它在原微分方程系统的基础上加入脉冲效应以模拟状态突变或外界扰动等因素,推广了经典动力系统,为物理、生物等自然科学中的一些现象提供了数学建模的框架<sup>[1-3]</sup>。在过去的几十年里,脉冲动力系统一直是备受关注的研究主题。Kaul<sup>[4-6]</sup>建立了许多脉冲半动力系统的重要性质,包括周期性、回复性和稳定性等。Lakshmikantha 等<sup>[7]</sup>提出了脉冲系统解的拟稳定性概念。Ding<sup>[8]</sup>首次将 Zhukovsky 稳定性用于脉冲动力系统的研究中,建立了脉冲动力系统 Zhukovsky 拟稳定性概念。Zhukovsky 拟稳定性相比较轨道稳定性而言,对时间具有更强的约束性,同时又允许时滞的存在,更适合脉冲动力系统的研究,但目前,基于 Zhukovsky 拟稳定性的讨论相对较少。

Aziz-Alaoui 等<sup>[9]</sup>讨论了修正后的 Holling-type II 捕食者—食饵模型,主要研究了系统解的有界性、全局稳定性等,但仅分析了微分方程形式下的捕食者—食饵模型,讨论了种群内部(即无外界干扰)的生态平衡状态,未考虑种群内部竞争及外界干扰的共同作用下系统周期轨道的性态。因而,本文在文献[9]的基础上,进一步引入了脉冲效应,以模拟外界因素的干扰。脉冲效应,从生物意义上看,是指当物种密度到达一定程度时,人为地喷洒杀虫剂或释放食饵,使物种的数量发生突跃<sup>[10]</sup>。本文用状态依赖脉冲来模拟这一行为,使得新系统更贴近实际应用场景。由于周期轨道能够反映不同因素共同作用下生态系统的平衡状态,因此本文的研究将围绕系统的周期轨道展开。

基于上述讨论,本文主要研究了下述具有状态依赖脉冲效应的 Holling-type II 捕食者—食饵模型,其具体表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left[ r_1 - b_1 x(t) - \frac{a_1 y(t)}{x(t) + k_1} \right], & x \neq h, \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[ r_2 - \frac{a_2 y(t)}{x(t) + k_2} \right], & x \neq h, \\ \Delta x = x(t^+) - x(t) = -ux(t), & x = h, \\ \Delta y = y(t^+) - y(t) = vy(t) + \alpha, & x = h \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 $t$ 时刻的物种密度; $b_i, r_i, a_i$ 以及 $k_i (i=1, \cdots, 2)$ 为正值常数; $h \in [0, \infty), \alpha \in [0, \infty), u \in (0, 1), v \in (-1, \infty); t^+$ 表示发生脉冲后的瞬间。记 $l_1$ 为垂直等值线 $y=(r_1-b_1x)(x+k_1)/a_1, l_2$ 为水平等值线 $y=r_2(x+k_2)/a_2$ ,系统(1)对应的微分方程的相图如图 1 所示。

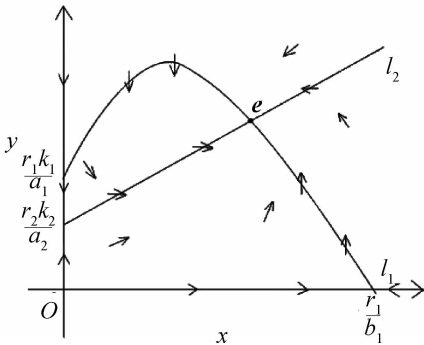


图 1 系统(1)对应的微分方程的相图

当食饵的数量在 $t_h$ 时刻到达极限值 $h$ 时,喷洒杀虫剂或释放食饵,使得食饵和捕食者的数量分别突变为 $(1-u)x(t_h)$ 以及 $(1+v)y(t_h)+\alpha$ 。本文假设:

$$r_2k_2/a_2 < r_1k_1/a_1,$$

以保证系统(1)存在唯一的内部平衡点,记为 $e$ 。注意到 $e=(x^*, y^*)$ 满足<sup>[6]</sup>:

$$y^* = \frac{r_2(x^* + k_2)}{a_2}。$$

本文对具有脉冲效应的 Holling-type II 捕食者—食饵模型进行了研究。首先,对于系统(1)半平凡周期

轨道,采用积分估计,提出了判断其 Zhukovsky 拟稳定性的充分条件;然后根据脉冲集的具体位置,借助格林公式、Poincaré-Bendixson 定理等对非平凡周期轨道的存在性以及 Zhukovsky 拟稳定性展开进一步讨论;最后从生物背景角度分析了本文定理的一些实际意义。

## 1 脉冲系统

首先考虑如下微分方程系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left[ r_1 - b_1 x(t) - \frac{a_1 y(t)}{x(t) + k_1} \right], \\ \dot{y}(t) = y(t) \left[ r_2 - \frac{a_2 y(t)}{x(t) + k_2} \right] \end{cases} \quad (2)$$

记  $f_1(x, y) = x(t) \left[ r_1 - b_1 x(t) - \frac{a_1 y(t)}{x(t) + k_1} \right]$ ,  $f_2(x, y) = y(t) \left[ r_2 - \frac{a_2 y(t)}{x(t) + k_2} \right]$ , 则  $F = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  为系统(2)的向量场。由于第一象限  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  为系统(1)的不变区域,且  $x \geq 0, y \geq 0$  符合生物意义,本文始终考虑该区域内的解的性态。 $\varphi$  为  $F$  定义于  $\Omega$  上的流,即  $\varphi: \Omega \times \mathbf{R} \rightarrow \Omega$  是一个连续函数满足  $\varphi(p, 0) = p$ ,  $\forall p = (x, y) \in \Omega$  以及  $\varphi(\varphi(p, t), s) = \varphi(p, t + s)$ ,  $\forall p \in \Omega, t, s \in \mathbf{R}$ 。若  $S \subset \Omega$  且  $J \subset \mathbf{R}$ , 则记  $\varphi(S \times J) = S \cdot J$ , 特别地,有  $\varphi(p, t) = p \cdot t$ 。对点  $p \in \Omega$ , 过点  $p$  的轨道为集合  $\gamma(p) = p \cdot \mathbf{R}$ 。过点  $p$  的正向半轨道和负向半轨道分别表示为集合  $\gamma^+(p) = p \cdot \mathbf{R}^+$  以及  $\gamma^-(p) = p \cdot \mathbf{R}^-$ 。

记  $\Sigma^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = (1-u)h, y \geq 0\}$ ,  $\Sigma^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = h, y \geq 0\}$ , 称  $\Sigma^2$  为脉冲集,并假定  $\Sigma^1$  横截于向量场  $F = (f_1, f_2)$ 。由式(1)可知,脉冲函数  $I: \Sigma^2 \rightarrow \Sigma^1$  满足:对每一  $(h, y) \in \Sigma^2$ , 有  $I(h, y) = ((1-u)h, (1+v)y + \alpha)$ , 并且  $\Sigma^1 = I(\Sigma^2)$ 。对点  $p \in \Sigma^2$ , 将  $I(p)$  记为  $p^+$ , 并称之为点  $p$  突跃到点  $p^+$ 。对每一点  $p \in \Omega \setminus \Sigma^2$ , 令  $\Sigma^2(p)$  表示集合  $\gamma^+(p) \cap \Sigma^2$ 。定义函数  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$  (即非负实数空间)为:

$$\psi(p) = \begin{cases} s, p \cdot s \in \Sigma^2, p \cdot t \notin \Sigma^2, t \in (0, s), \\ +\infty, \Sigma^2(p) = \emptyset. \end{cases}$$

通常,  $\psi: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$  是不连续的。但 Ciesielski<sup>[11]</sup> 给出了一系列保证  $\psi$  连续的条件。因此,本文假设  $\psi$  是定义在  $\Omega$  上的连续函数。

下面定义脉冲系统  $(\Omega, \tilde{\varphi})$ 。对点  $p \in \Omega$ , 过点  $p$  的脉冲轨迹记为  $\tilde{\varphi}(p)$ ,  $\tilde{\varphi}(p)$  定义于  $\mathbf{R}^+$  的子集,取值于  $\Omega$ 。若  $\Sigma^2(p) = \emptyset$ , 则有  $\psi(p) = +\infty$ , 此时令  $\tilde{\varphi}_p(t) = p \cdot t, \forall t \in \mathbf{R}^+$ 。若  $\Sigma^2(p) \neq \emptyset$ , 则一定存在某时刻  $t_0 > 0$ , 使得  $p \cdot t_0 = p_1 \in \Sigma^2$  且  $p \cdot t \notin \Sigma^2, \forall 0 < t < t_0$ 。因此,可以这样定义  $[0, t_0]$  上的  $\tilde{\varphi}_p(t)$ :

$$\tilde{\varphi}_p(t) = \begin{cases} p \cdot t, & 0 \leq t < t_0, \\ p_1^+, & t = t_0, \end{cases}$$

其中:  $\psi(p) = t_0$  且  $p_1^+ = I(p_1) \in \Omega$ 。

当  $t_0 < +\infty$  时,可以继续定义从  $p_1^+$  出发的轨迹。类似地,若  $\Sigma^2(p_1^+) = \emptyset$ , 即  $\psi(p_1^+) = +\infty$ , 则定义  $\tilde{\varphi}_p(t) = p_1^+ \cdot (t - t_0), \forall t_0 < t < +\infty$ 。反之,令  $\psi(p_1^+) = t_1$  且  $p_1^+ \cdot t_1 = p_2 \in \Sigma^2$ , 于是可以这样定义  $[t_0, t_0 + t_1]$  上  $\tilde{\varphi}_p(t)$ :

$$\tilde{\varphi}_p(t) = \begin{cases} p_1^+ \cdot (t - t_0), & t_0 \leq t < t_0 + t_1, \\ p_2^+, & t = t_0 + t_1, \end{cases}$$

其中:  $p_2^+ = I(p_2)$ 。

以此类推,在整个过程中要么存在某个  $n$  使得  $\Sigma^2(p_n^+) = \emptyset$ , 这意味着系统在进行有限次上述步骤后结束,要么上述步骤无限进行下去,即  $\Sigma^2(p_n^+) \neq \emptyset, n = 1, 2, 3, \dots$ 。于是,可以定义于区间  $[0, T(p))$  的脉冲轨迹  $\tilde{\varphi}_p$ , 其中:  $T(p) = \sum_{i=0}^{+\infty} t_i$ 。在定义了  $\Omega$  上任一点  $p$  的轨迹  $\tilde{\varphi}_p$  之后,记  $\tilde{\varphi}(p, t) = \tilde{\varphi}_p(t), p \in \Omega, t \in [0, T(p))$ 。由此,得到了一个满足以下性质的脉冲系统  $(\Omega, \tilde{\varphi})$ :

$$a) \tilde{\varphi}(p, 0) = p, p \in \Omega;$$

b)  $\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}(p, t), s) = \tilde{\varphi}(p, t + s), p \in \Omega, t, s \in [0, T(p)), t + s \in [0, T(p))$ .

在上述定义的  $\tilde{\varphi}$  下,称  $(\Omega, \tilde{\varphi})$  为与  $\varphi$  相关的脉冲动力系统. 同时,为方便书写,将  $\tilde{\varphi}(p, t)$  简记为  $p * t$ . 于是 b) 可以表示为  $(p * t) * s = p * (t + s)$ . 一般地,对点  $p \in \Omega$ ,由  $t \rightarrow p * t$  定义的映射  $\tilde{\varphi}_p: \mathbf{R}^+ \rightarrow \Omega$  以及对  $t \in \mathbf{R}^+$ ,由  $p \rightarrow p * t$  定义的映射  $\tilde{\varphi}': \Omega \rightarrow \Omega$  未必连续. 此外,若  $S \subset \Omega$  且  $J \subset \mathbf{R}^+$ ,则记  $S * J = \{p * t | p \in S \text{ 且 } t \in J\}$ . 若  $J = \{t\}$ ,则记  $S * t = S * \{t\} = \tilde{\varphi}'(S)$ .

在下文中,对点  $p \in \Omega$ ,记  $B(p, \delta) = \{q \in \Omega | d(p, q) < \delta\}$  为以点  $p$  为中心,以  $\delta > 0$  为半径的  $\Omega$  上的开区域,其中:  $d$  是  $\mathbf{R}^2$  上的一般度量. 对  $S \subset \Omega, \Omega$  中  $S$  的  $r$  邻域记为  $U(S, r) = \{p \in \Omega | d(p, S) < r\}, r > 0$ , 其中:  $d(p, S) = \inf\{d(p, q) | q \in S\}$ .

下面介绍本文需要用到的一些基本定义. 对点  $p \in \Omega$ ,记  $\gamma^+(p) = p * \mathbf{R}^+$  或  $\tilde{\varphi}_p(\mathbf{R}^+)$  为点  $p$  的正向轨道. 若  $p * \mathbf{R}^+ \subset S, \forall p \in S$ ,则称  $\Omega$  的子集  $S$  是正向不变的. 对点  $p \in \Omega$ ,定义  $\omega^+(p) = \{q \in \Omega: p * t_n \rightarrow q, t_n \rightarrow +\infty\}$  为  $p$  在  $(\Omega, \tilde{\varphi})$  中的正极限集. 一定条件下,  $\omega^+(q)$  也可以是一条周期轨道. 若存在  $\gamma^+(p)$  的某邻域,使得  $\gamma^+(p)$  是该邻域内唯一的周期轨道,则称之为极限环. 对极限环  $\Gamma$ ,若给定  $\Gamma$  的邻域  $U$ ,存在一个  $\Gamma$  的正向不变邻域  $V$  使得  $V \subset U$ ,那么称该极限环  $\Gamma$  是稳定的.

**定义 1**<sup>[4]</sup> 若轨道  $\gamma^+(p)$  有  $k$  个分支,且  $\tau$  是满足  $p * \tau = p$  的最小正数,则称  $\gamma^+(p)$  是阶为  $k$ 、周期为  $\tau$  (的脉冲)周期轨道,并且称点  $p$  为  $k$  阶(脉冲)周期点. 特别地,若周期轨道  $\gamma^+(p)$  始终位于  $\Omega$  的边界  $\partial\Omega$  上,则称该轨道为半平凡周期轨道.

下面给出 Zhukovsky 拟稳定性的概念,其中,时间再参数化是指存在一个同胚  $\tau_q: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ ,满足  $\tau_q(0) = 0$ .

**定义 2**<sup>[8]</sup> 对点  $p \in \Omega$ ,若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \epsilon) > 0$  使得当  $q \in B(p, \delta)$  时,都能找到一个时间再参数化函数  $\tau_q(t)$ ,满足  $d(q * \tau_q(t), p * t) < \epsilon, \forall t \geq 0$ ,则称正向轨道  $\gamma^+(p)$  是 Zhukovsky 拟稳定的. 若轨道还满足  $\exists \sigma > 0$ ,使得当  $q \in B(p, \sigma)$  时,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(q * \tau_q(t), p * t) = 0$ ,则称  $\gamma^+(p)$  是渐近 Zhukovsky 拟稳定的.

通常,用时间再参数化的方法定义 Zhukovsky 拟稳定性. 若令  $\bar{t} = \tau_q(t)$  且  $h(\bar{t}) = \tau_q^{-1}(\bar{t}) = t$ ,则有  $d(p * t, q * \tau_q(t)) = d(p * h(\bar{t}), q * \bar{t})$ . 于是可以得到上述定义的一个等价定义: 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(p, \epsilon) > 0$ ,使得当  $d(p, q) < \delta$  时,可以找到一个时间再参数化  $h_p$ ,满足  $d(p * h_p(t), q * t) < \epsilon, \forall t \geq 0$ ,则轨道  $\gamma^+(p)$  是 Zhukovsky 拟稳定的. 同理,若还满足  $\exists \sigma > 0$ ,使得当  $q \in B(p, \sigma)$  时  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(p * h_p(t), q * t) = 0$ ,则称  $\gamma^+(p)$  是渐近 Zhukovsky 拟稳定的.

解对初值的连续依赖性动力系统理论中的一个重要性质,相应地,脉冲动力系统也有类似的性质,称为拟连续依赖性. Ding<sup>[12]</sup> 对该性质进行了详细介绍.

**定义 3**<sup>[12]</sup> 对脉冲系统  $(\Omega, \tilde{\varphi}), p \in \Omega, \forall \epsilon > 0, \sigma > 0$  以及  $T > 0$ ,都  $\exists \delta = \delta(p, \epsilon, \sigma, T) > 0$  使得当  $d(p, q) < \delta$  时,可以找到一个  $\sigma^-$  再参数化函数  $\tau_q$ ,满足不等式  $d(q * \tau_q(t), p * t) < \epsilon, \forall t \in [0, T]$ .

显然,拟连续依赖性动力系统中解对初值的连续依赖性的推广. Ding<sup>[8]</sup> 已经证明: 脉冲系统具有拟连续依赖性,当且仅当其脉冲时间函数  $\psi$  是连续的. 因此,本文在下面的研究中始终假设该脉冲系统  $(\Omega, \tilde{\varphi})$  满足拟连续依赖性.

下面给出下文需要用到的一些引理,这些引理已经被完整地证明<sup>[8, 13]</sup>.

**引理 1**<sup>[8]</sup> 对点  $p \in \Omega$ ,若正向极限集  $\omega^+(p)$  是稳定的极限环  $\Gamma$ ,则正向半轨  $\gamma^+(p)$  是渐近 Zhukovsky 拟稳定的. 显然,  $\Gamma$  也是渐近 Zhukovsky 拟稳定的.

**引理 2**<sup>[13]</sup> 设正向半轨道  $\gamma^+(p)$  保持在不含奇点的有界闭区域内,则  $\omega^+(p)$  为一条闭轨.

引理 2 所叙述的内容也被称为 Poincaré-Bendixson 定理.

2 系统的周期轨道

本节主要考虑系统(1)的周期解的存在性以及 Zhukovsky 拟稳定性.

2.1 半平凡周期轨道

记  $a = ((1 - u)h, 0)$ . 首先考虑  $\alpha = 0$  的情形,表示对该模型在  $t_{h_i}$  时刻仅进行人为喷洒农药处理,使得

捕食者与食饵的数量发生锐减。此时,若系统还满足  $0 < h < \frac{r_1}{b_1}$ ,则由图 1 可知,  $a * \mathbf{R}^+$  是一条半平凡周期轨道。记作:

$$\lambda = \left[ \frac{r_1 - (1-u)b_1 h}{(1-u)(r_1 - b_1 h)} \right]^{-\frac{r_2}{r_1}}.$$

下面先分析半平凡周期轨道  $a * \mathbf{R}^+$  的 Zhukovsky 拟稳定性。

**定理 1** 若  $\alpha=0, 0 < h < \frac{r_1}{b_1}$  且

$$1 + v < \lambda \quad (3)$$

则系统的半平凡周期轨道  $\Gamma = a * \mathbf{R}^+$  是渐近 Zhukovsky 拟稳定的。

**证明** 令点  $p_0$  为  $\Sigma^1$  上接近于点  $a$  的一点,并记  $p_0 = ((1-u)h, n_0)$ , 其中:  $n_0 > 0$  是一个充分小的实数。现在,考虑轨道  $\gamma^+(p_0)$ 。它将会与  $\Sigma^2$  相交于一点  $q_0 = p_0 \cdot \phi(p_0) = (h, n)$ 。根据解对初值的连续依赖性,可知  $n = n(n_0)$  也充分小。

下面估计  $n$  的取值,由式(2)可得:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \left( r_2 - \frac{a_2 y}{x + k_2} \right)}{x \left( r_1 - b_1 x - \frac{a_1 y}{x + k_1} \right)}.$$

对其进行参数分离并积分,可得:

$$\int_{n_0}^n \frac{1}{y} dy = \int_{(1-u)h}^h \frac{r_2 - \frac{a_2 y}{x + k_2}}{x \left( r_1 - b_1 x - \frac{a_1 y}{x + k_1} \right)} dx \quad (4)$$

其中:  $y = y(x, n_0)$  充分小,  $\{x, y(x) | (1-u)h \leq x < h\}$  是系统(1)过点  $p_0$  的一个轨道片段。

对式(4)的右端进行简单的积分估计,即:

$$\int_{(1-u)h}^h \frac{r_2 - \frac{a_2 y}{x + k_2}}{x \left( r_1 - b_1 x - \frac{a_1 y}{x + k_1} \right)} dx = \int_{(1-u)h}^h \frac{r_2}{x(r_1 - b_1 x)} dx + O(n_0),$$

可以得到:

$$n = \lambda^{-1} n_0 + o(n_0).$$

令  $p_1 = I(q_0) = ((1-u)h, n_1)$ , 其中:  $n_1 = (1+v)n$ 。于是,由式(3)可知,对充分小的  $n_0$ , 始终有  $n_1 < n_0$ 。根据解对初值的连续依赖性,可以得到对每一充分接近于  $\Gamma$  的点  $p$ , 当  $t \rightarrow +\infty$  时,其轨道  $\gamma^+(p)$  趋于  $\Gamma$ 。即如果点  $p$  充分接近于  $\Gamma$ , 那么  $\omega^+(p) = \Gamma$ 。于是,由引理 1, 可以推出周期轨道  $\Gamma$  是渐近 Zhukovsky 拟稳定的。证毕。

根据上述证明,还可以得到推论 1。

**推论 1** 若  $\alpha=0, 0 < h < \frac{r_1}{b_1}$  且  $1+v > \lambda$ , 则  $\Gamma = a * \mathbf{R}^+$  不是渐近 Zhukovsky 拟稳定的。

## 2.2 非平凡周期轨道

下面再分析非平凡周期轨道的存在性以及 Zhukovsky 拟稳定性。根据图 1 可知,当  $h \geq \frac{r_1}{b_1}$  时,系统不存

在非平凡脉冲周期轨道。因此,只需要讨论  $h \leq x^*$  以及  $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$  两种情形。

2.2.1 情形 1:  $h \leq x^*$

令  $b = ((1-u)h, y_b)$  为  $\Sigma^1$  与  $l_1$  的交点, 其中:  $y_b = [r - (1-u)b_1h][(1-u)h + k]/a_1$ 。记  $b_1 = b \cdot \phi(b) = (h, y_h), c = (h, 0)$ 。于是可知, 从  $\overline{ab} = \{((1-u)h, y) \in \Sigma^1 \mid 0 \leq y \leq y_b\}$  上任一点出发的轨道都会与  $\Sigma^2$  相交, 该情形下的相图如图 2 所示。

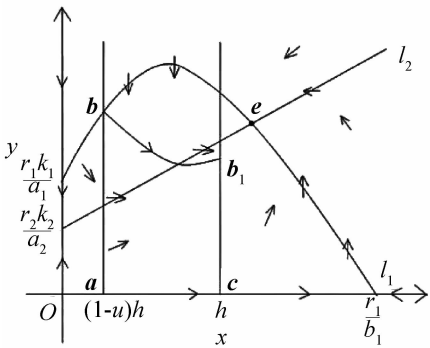


图 2  $h \leq x^*$  时的相图

假设  $(1+v)y_h + \alpha \leq y_b$ 。于是, 可以这样定义一个庞加莱映射  $G: \overline{ab} \rightarrow \overline{ab}$ 。对每一点  $p \in \overline{ab}$ , 轨道  $p \cdot \mathbf{R}^+$  会率先与  $\Sigma^2$  相交于一点, 记为  $p_0$ , 满足  $p_0 = p \cdot \phi(p)$ 。由  $(1+v)y_h + \alpha \leq y_b$  可知,  $p_0^+ = I(p_0) \in \overline{ab}$ 。令  $G(p) = p_0^+$ 。根据脉冲函数  $I$  的连续性以及解对初值的连续依赖性, 可以知道  $G$  为一连续映射。又因为  $\overline{ab}$  同胚于区间  $[0, 1]$ , 于是根据不动点定理, 对任意  $v > -1$  以及  $\alpha \geq 0$ , 函数  $G$  始终存在一个不动点, 记为  $p_1 \in \overline{ab}$ 。显然,  $p_1 \cdot \mathbf{R}^+$  为一条脉冲周期轨道。Ding 等<sup>[13]</sup>证明: 若脉冲函数  $I$  与定义的庞加莱映射  $G$  的复合映射能够保持  $\Sigma^1$  和  $\Sigma^2$  上的点的顺序, 则系统可能存在的周期轨道是一阶的。于是有定理 2:

**定理 2** 假设  $h \leq x^*$ 。若  $(1+v)y_h + \alpha \leq y_b, r_1 + r_2 \leq 2b_1(1-u)h$  且

$$\frac{(1+v)(1-u)[r_1 - b_1(1-u)h]}{r_1 - b_1h - \frac{a_1 y_h}{h + k_1}} < 1 \tag{5}$$

则系统(1)有一条渐近 Zhukovsky 拟稳定的非平凡脉冲周期轨道。

**证明** 由于  $(1+v)y_h + \alpha \leq y_b$ , 在  $\tilde{\varphi}$  的作用下, 多边形  $S = abb_1c$  是正向不变的, 即对  $t \geq 0$ , 有  $S \cdot t \subset S$ 。系统(1)在  $S$  中存在一阶周期轨道  $\Gamma = \gamma^+(p_1)$ , 且  $p_1 \in \overline{ab}$ 。不失一般性, 设  $p_1 = ((1-u)h, y_1) (y_1 \geq 0)$ ,  $p_2 = p_1 \cdot \phi(p_1) = (h, y_1')$ , 于是有  $I(p_2) = p_1$ 。令  $q_1 = ((1-u)h, y_2)$  为  $\Sigma^1$  上充分接近于  $p_1$  的一点。下面考虑轨道  $\gamma^+(q_1)$ 。它首先会与  $\Sigma^2$  相交于一点  $q_2 = (h, y_2')$ 。记  $q_2^+ = q_1 \cdot \phi(q_1) = ((1-u)h, y_3)$ 。

轨道片段  $p_1 \cdot [0, \phi(p_1))$ 、 $q_1 \cdot [0, \phi(q_1))$  以及  $\Sigma^1$ 、 $\Sigma^2$  围成了区域  $\Pi \subset S$ 。假设  $y_1 < y_2$ , 于是有  $y_1' < y_2'$ 。对区域  $\Pi$  应用格林公式, 则有:

$$\oint_{\partial \Pi} f_1 dy - f_2 dx = \iint_{\Pi} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中:  $\partial \Pi$  是区域  $\Pi$  的边界,  $f_1(x, y) = x(t) \left[ r_1 - b_1 x(t) - \frac{a_1 y(t)}{x(t) + k_1} \right]$  且  $f_2(x, y) = y(t) \left[ r_2 - \frac{a_2 y(t)}{x(t) + k_2} \right]$ 。

又根据:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} &= r_1 + r_2 - 2b_1x - 2\frac{a_2y}{x + k_2} - \\ &\quad \frac{a_1k_1y}{(x + k_1)^2} \leq r_1 + r_2 - 2b_1x \end{aligned} \tag{6}$$

于是由条件  $r_1 + r_2 \leq 2b_1(1-u)h$ , 可以得到:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \leq 0,$$

于是有：

$$\oint_{\partial \Pi} f_1 dy - f_2 dx \leqslant 0.$$

显然，在每个轨道片段上有  $f_1 dy - f_2 dx = 0$ ，于是可以得到：

$$\left(\int_{q_1 p_1} + \int_{p_2 q_2}\right) f_1 dy - f_2 dx \leqslant 0 \text{ 或 } \int_{y_2}^{y_1} f_1 dy \leqslant \int_{y_2'}^{y_1'} f_1 dy.$$

通过简单计算，有：

$$(1-u)(y_2 - y_1) \left[ r_1 - b_1(1-u)h - \frac{a_1(y_1 + y_2)}{2[(1-u)h + k_1]} \right] \geqslant (y_2' - y_1') \left[ r_1 - b_1h - \frac{a_1(y_1' + y_2')}{2(h + k_1)} \right].$$

由  $y_1' < y_2' \leqslant y_h$ ，可得：

$$(1-u)(y_2 - y_1)[r_1 - b_1(1-u)h] \geqslant (y_2' - y_1') \left[ r_1 - b_1h - \frac{a_1 y_h}{h + k_1} \right].$$

于是，可以得到：

$$d(p_2, q_2) \leqslant \frac{(1-u)[r_1 - b_1(1-u)h]}{r_1 - b_1h - \frac{a_1 y_h}{h + k_1}} d(p_1, q_1).$$

又因为：

$$d(p_1, q_2^+) = (1+v)d(p_2, q_2),$$

于是，由式(5)可以得到  $d(p_1, q_2^+) < d(p_1, q_1)$ 。由于脉冲函数  $I$  保持  $\Sigma^1$  以及  $\Sigma^2$  上点的顺序，于是可以得出点  $q_2^+$  位于  $p_1$  与  $q_1$  之间。因此，根据解对初值的连续依赖性，可知对充分接近于  $\Gamma$  的任一点  $p$ ，都有当  $t \rightarrow +\infty$  时，轨道  $\bar{\gamma}^+(p)$  趋于  $\Gamma$ 。这就意味着，若点  $p$  充分接近于  $\Gamma$ ，有  $\omega^+(p) = \Gamma$ 。因此，根据引理 1，可以得出周期轨道  $\Gamma$  是渐近 Zhukovsky 拟稳定的。证毕。

当  $\alpha = 0$  时， $a \in \overline{ab}$  为映射  $G$  下的一个不动点。现在讨论第一象限中不存在非平凡脉冲周期轨道的条件。

**定理 3** 令  $h \leqslant x^*$ 。假设  $\alpha = 0, (1+v)y_h \leqslant y_b$ 。若  $r_1 + r_2 \leqslant 2b_1(1-u)h$  且

$$[1 - (1-u)(1+v)]r_1 \geqslant b_1h + \frac{1}{2} \frac{a_1 y_h}{h + k_1} \tag{7}$$

则系统(1)在第一象限中不存在非平凡脉冲周期轨道。

**证明** 由  $\alpha = 0$  可知， $a * R^+$  是系统(1)的一条平凡周期轨道。下面采用反证法。假设  $S = abb_1c$  中存在非平凡的一阶脉冲周期轨道  $\bar{\gamma}^+(p)$ 。令  $p \in \overline{ab}$  为一阶周期点，且  $q = p \cdot \psi(p) = (h, y_0)$ ，于是有  $p = I(q) = ((1-u)h, (1+v)y_0)$ 。类似地，轨道片段  $a \cdot [0, \psi(a))$ 、 $p \cdot [0, \psi(p))$  以及  $\Sigma^1$ 、 $\Sigma^2$  围成了区域  $\Pi' \subset S$ 。考虑对区域  $\Pi'$  应用格林公式，则有：

$$\oint_{\partial \Pi'} f_1 dy - f_2 dx = \iint_{\Pi'} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy,$$

其中： $\partial \Pi'$  是区域  $\Pi'$  的边界， $f_1(x, y) = x(t) \left[ r_1 - b_1x(t) - \frac{a_1 y(t)}{x(t) + k_1} \right]$  且  $f_2(x, y) = y(t) \left[ r_2 - \frac{a_2 y(t)}{x(t) + k_2} \right]$

一方面，由  $r_1 + r_2 \leqslant 2b_1(1-u)h$  可以得到：

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \leqslant 0,$$

而在类似于式(6)中的推导中，等号对区域内的任一点  $(x, y)$  不恒成立，于是散度  $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$  在第一象限的任一子域内不恒为 0，即：

$$\iint_{\Pi'} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy < 0 \tag{8}$$

另一方面, 考虑  $\oint_{\partial H'} f_1 dy - f_2 dx$ . 显然在轨道片段  $a \cdot [0, \phi(a))$  以及  $p \cdot [0, \phi(p))$  上, 有  $f_1 dy - f_2 dx = 0$ . 同样地, 通过简单计算并由式(7)可得:

$$\oint_{\partial H'} f_1 dy - f_2 dx = \int_{aq} f_1 dy - \int_{ap} f_1 dy \geq 0,$$

这与式(8)矛盾. 因此系统(1)在第一象限中不存在非平凡脉冲周期轨道. 证毕.

### 2.2.2 情形 2: $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$

下面再分析  $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$  的情形. 当  $b \cdot R^+ \cap \Sigma^2 \neq \emptyset$  时, 定理 2 以及定理 3 仍然成立, 因此本文不再对该情况进行赘述. 下面分析  $b \cdot R^+ \cap \Sigma^2 = \emptyset$  的情况. 令  $w = (h, y_w)$  为  $\Sigma^2$  与  $l_1$  的交点, 其中:  $y_w = (r_1 - b_1 h)(h + k_1)/a_1$ .  $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$  且  $b \cdot R^+ \cap \Sigma^2 = \emptyset$  时的相图如图 3 所示.

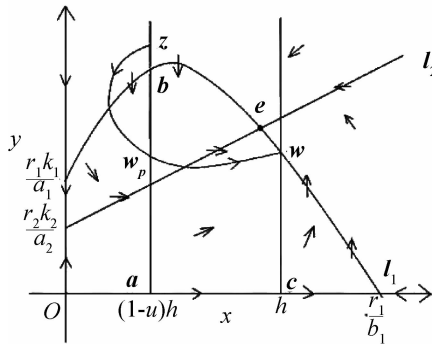


图 3  $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$  且  $b \cdot R^+ \cap \Sigma^2 = \emptyset$  时的相图

根据图 3 可知, 负向轨道  $w \cdot R^-$  首先会与  $\Sigma^1$  相交于介于  $a$  与  $b$  之间的一点, 记为  $w_p = ((1-u)h, y_p)$ , 接着与  $\Sigma^1$  相交于位于  $b$  上方的一点  $z$ .

在  $S' = aw_pwc$  中, 借助类似于定理 3 中的推导过程, 可以得到推论 2.

**推论 2** 令  $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$  且  $b \cdot R^+ \cap \Sigma^2 = \emptyset$ . 若  $\alpha = 0, (1+v)y_w \leq y_p, r_1 + r_2 \leq 2b_1(1-u)h$  且

$$[1 - (1-u)(1+v)]r_1 \geq b_1 h + \frac{1}{2} \frac{a_1 y_w}{h + k_1} \quad (9)$$

则系统(1)在第一象限中不存在非平凡脉冲周期轨道.

下面讨论闭轨的存在性问题, 有定理 4.

**定理 4** 令  $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$  且  $b \cdot R^+ \cap \Sigma^2 = \emptyset$ . 若

$$r_1 \geq 2b_1 h + \frac{a_1 r_2 (2k_1 h + k_1 k_2 + h^2)}{a_2 [(1-u)h + k_1]^2} \quad (10)$$

则系统(1)有一条闭轨.

**证明** 首先说明  $e = (x^*, y^*)$  是不稳定的. 对  $f_1(x, y) = x(t) \left[ r_1 - b_1 x(t) - \frac{a_1 y(t)}{x(t) + k_1} \right], f_2(x, y) = y(t) \left[ r_2 - \frac{a_2 y(t)}{x(t) + k_2} \right]$ , 对系统进行局部线性化处理. 于是在平衡点  $e = (x^*, y^*)$  处, 可以得到如下雅可比矩阵:



$$J = \begin{pmatrix} r_1 - 2b_1x^* - \frac{a_1k_1y^*}{(x^* + k_1)^2} - \frac{a_1x^*}{x^* + k_1} \\ \frac{a_2y^{*2}}{(x^* + k_2)^2}r_2 - \frac{2a_2y^*}{x^* + k_2} \end{pmatrix}.$$

考虑它所对应的特征值  $\lambda_1, \lambda_2$ 。由于  $y^* = \frac{r_2(x^* + k_2)}{a_2}$ , 于是:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= \left[ r_1 - 2b_1x^* - \frac{a_1k_1y^*}{(x^* + k_1)^2} \right] \left[ r_2 - \frac{2a_2y^*}{x^* + k_2} \right] + \frac{a_1x^*}{x^* + k_1} \cdot \frac{a_2y^{*2}}{(x^* + k_2)^2} \\ &= -r_1r_2 + 2b_1r_2x^* + \frac{2a_1k_1r_2^2x^* + a_1k_1k_2r_2^2 + a_1r_2^2x^{*2}}{a_2(x^* + k_1)^2} \\ &= r_2 \left[ -r_1 + 2b_1x^* + \frac{2a_1k_1r_2x^* + a_1k_1k_2r_2 + a_1r_2x^{*2}}{a_2(x^* + k_1)^2} \right]. \end{aligned}$$

又  $(1-u)h < x^* < h$ , 于是由式(10)可以得出,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , 即在  $e = (x^*, y^*)$  处的特征方程有一个具有正实部的特征值。因此,  $e = (x^*, y^*)$  是不稳定的。

下面说明系统(1)一定存在闭轨。由于  $\bar{\gamma}^+(b) \neq \phi$  且  $e$  不稳定, 于是存在充分小的  $\epsilon > 0$ , 使得:

$$\bar{\gamma}^+(b) \cap U(e, \epsilon) = \phi,$$

从而有:

$$\bar{\gamma}^+(b) \cap U(e, \epsilon/2) = \phi.$$

所以  $e \notin \bar{\gamma}^+(b)$ 。又  $\bar{\gamma}^+(b)$  是有界的, 因此, 存在  $\delta > 0$ , 使得:

$$\bar{\gamma}^+(b) \subset \bar{\gamma}^+(b) \subset U(\bar{e}, \delta) \setminus U(e, \epsilon/2),$$

其中:  $U(\bar{e}, \delta) \setminus U(e, \epsilon/2)$  为有界闭区域, 即正半轨  $\bar{\gamma}^+(b)$  保持在不含奇点的有界闭区域中。于是由引理 2 可知,  $\bar{\gamma}^+(b)$  是一条闭轨, 即系统存在闭轨。证毕。

### 3 结 论

本文考虑了具有脉冲效应的 Holling-type II 捕食者—食饵模型。基于积分估计、格林公式、Poincaré-Bendixson 定理等探究了系统(1)周期轨道的存在性和 Zhukovsky 拟稳定性。对于系统(1), 有如下结论:

a) 当物种  $y$  灭绝或不存在时, 可以通过人为喷洒杀虫剂、释放食饵等行为维持物种  $x$  的生态平衡状态, 并且这种状态可以实现 Zhukovsky 拟稳定。

b) 给出了判断是否存在非平凡脉冲周期轨道的充分条件, 即在人为介入和种群内部竞争共同作用下, 当参数满足定理 2 的条件时, 系统存在 Zhukovsky 拟稳定的生态平衡状态; 当参数满足定理 3 或推论 2 中的条件时, 物种  $x, y$  之间不存在生态平衡状态。

c) 当脉冲集的位置满足  $x^* < h < \frac{r_1}{b_1}$  且  $b \cdot \mathbf{R}^+ \cap \Sigma^2 = \phi$  时, 可以通过约束参数保证系统在内部平衡点  $e$  附近存在一条闭轨。即在一定的初始条件且无人因素介入的情况下, 种群内部存在平衡状态。

所得结论推广了 Holling-type II 捕食者—食饵模型的一般性结论, 更贴合实际生物背景。此外, 本文考虑的是线性脉冲下的系统的解的情况, 后续可以进一步对其他形式的脉冲函数进行讨论。

### 参考文献:

- [1] 曾夏萍, 梁志清, 庞国萍, 等. 状态反馈脉冲控制的福寿螺—水稻防控数学模型[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2021, 44(1): 77-87.
- [2] 何德材, 吴兴杰, 李伟伟, 等. 对一类具 Holling II 型功能反应的种群脉冲系统的分析[J]. 桂林电子科技大学学报, 2008 (1): 54-58.

- [3] 杨娟, 傅希林. 基于流转换理论的脉冲微分系统的脉动现象研究[J]. 山东师范大学学报(自然科学版), 2017, 32(1): 1-5.
- [4] Kaul S K. On impulsive semidynamical systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 150(1): 120-128.
- [5] Kaul S K. On impulsive semidynamical systems II: Recursive properties[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1991, 16(7/8): 635-645.
- [6] Kaul S K. Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems[J]. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 1994, 7(4): 509-523.
- [7] Lakshmikantham V, Liu X Z. On quasi stability for impulsive differential systems[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1989, 13(7): 819-828.
- [8] Ding C M. Lyapunov quasi-stable trajectories[J]. Fundamenta Mathematicae, 2013, 220(2): 139-154.
- [9] Aziz-Alaoui M A, Daher Okiye M. Boundedness and global stability for predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(7): 1069-1075.
- [10] Ding C M. A predator-prey model with state dependent impulsive effects[J]. Annales Polonici Mathematici, 2014, 111(3): 297-308.
- [11] Ciesielski K. On semicontinuity in impulsive dynamical systems[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, 2004, 52(1): 71-80.
- [12] Ding C M. Limit sets in impulsive semidynamical systems[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2016, 43(1): 97-115.
- [13] 罗定军, 张祥, 董梅芳. 动力系统的定性与分支理论[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 138-139.
- [14] Ding C M, Duan Z P, Pan S Y. Bendixson criterion in impulsive systems[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(3): 1176-1182.

(责任编辑: 康 锋)