浙江理工大学学报，2021，45(6)：835-845
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(n).2021.06.017

度量空间中拟双曲映射的局部性质

张秋莹，黄体仁
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：为了研究度量空间中 J. Väisälä 提出的拟双曲映射是否具有从局部到整体的性质，首先，利用拟双曲映射的性质，证明拟双曲映射的逆映射是一个完全拟双曲映射；其次，为了保证曲线分点的个数为有限数，引入了拟 John-ball 域的概念，从而建立局部拟双曲度量与整体拟双曲度量之间的关系；最后，在两个适当的拟凸度量空间之间，证明半局部的拟双曲映射是全局的拟双曲映射。

关键词：拟共形映射；拟双曲映射；拟双曲度量；拟 John-ball 域；度量空间

中图分类号：O174.55　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851（2021）11-0835-11

Local properties of quasi-hyperbolic mapping in metric spaces

ZHANG Qiuying，*HUANG Tiren*
（School of Science，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China）

Abstract：In order to study the problem proposed by J. Väisälä，that is，whether quasi-hyperbolic mapping has properties from local to global in the metric space. First of all，we proved that the inverse mapping of the quasi-hyperbolic mapping is a fully quasi-hyperbolic mapping by using the properties of the quasi-hyperbolic mapping. Secondly，the concept of quasi John-ball domain was introduced to ensure that the number of curve points was a finite number. Thereby，we established the relationship between the local quasi-hyperbolic metric and the global quasi-hyperbolic metric. Finally，we proved that the semi-local quasi-hyperbolic mapping is a global quasi-hyperbolic maping between two appropriate quasi-convex metric spaces.

Key words：quasi-conformal mapping；quasi-hyperbolic mapping；quasi-hyperbolic metric；quasi John-ball domain；metric space

0　引　言

拟双曲度量作为欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中经典双曲度量的自然推广，是由 Gehring 等[1-2]在 20 世纪 70 年代提出的。自出现以来，拟双曲度量已经成为几何函数论的重要研究工具，与拟双曲度量有关的理论已被推广到度量空间和 Banach 空间，具体结论参见文献[3-6]。基于拟双曲度量，Väisälä 等[3]以及其他学者[7-8]在 Banach 空间中研究“Free-dimension”拟共形映射，并得到了很多结果。在自由拟共形的研究中，Väisälä 研究了 Solid 映射[3]、拟双曲映射[4]和粗拟双曲映射[4]等几类映射。其中拟双曲映射不仅是自由拟共形映射的一个特例，也是拟双曲度量空间中的 Bi-Lipschitz 映射。

收稿日期：2020－04－03　　网络出版日期：2021－04－29
基金项目：国家自然科学基金项目（11401531）
作者简介：张秋莹（1997－　），女，江苏南京人，硕士研究生，主要从事拟共形映射和拟双曲映射方面的研究。
通信作者：黄体仁，E-mail：htiren@zstu.edu.cn

1998 年,Heinonen 等[9]证明,在包括欧几里得空间在内的一大类空间中,拟共形映射和拟对称映射是定量等价的,由于这两个概念是等价的,因此数学工作者对研究适当空间之间的拟对称映射非常感兴趣。Huang 等[10]证明,在两个适当的度量空间之间的拟对称映射下,拟双曲度量是拟不变的;此外,他们还证明,拟双曲度量的拟不变性意味着对应的映射是拟共形的。Liu 等[11]研究了粗的拟双曲映射和拟对称映射之间的关系,证明:在两个适当的拟双曲度量空间中,若同胚映射是一个粗拟双曲映射,那么它是拟对称映射。本文主要考虑拟双曲映射的局部性质,并研究两个适当的度量空间之间的如下问题:

设 X,Y 为两个度量空间,G,G' 为 X,Y 的子域,$f:G\to G'$ 为同胚映射,如果存在 $M\geqslant 1$,使得对 $\forall x\in G$,都有区域 $D(x)\subset G$,使得 $f|_{D(x)}:D(x)\to f(D(x))$ 为 M- 拟双曲映射,设 $M_0=M_0(M)$,那么 f 是否是 G 上整体的 M_0-拟双曲映射?

上述问题就是 Väisälä 在文献[3]中提出的“Open problem 13”,即拟双曲映射是否具有从局部到整体的性质。

Huang 等研究了 Väisälä 的这个问题,在文献[12]“Theorem 1.10”中报道了该问题的结论:

设 X 为 c_1- 拟凸、dense 度量空间,Y 为 c_2- 拟凸、dense、proper 度量空间,$G\not\subset X$ 和 $G'\not\subset Y$ 为两个子域,如果同胚映射 $f:G\to G'$ 为 semi-local M -拟双曲映射和 semi-local η-拟对称映射,则 f 在 G 上为整体的 M_0- 拟双曲映射,其中:$M_0=M_0(c_1,c_2,\eta,M)$。

本文进一步研究 Väisälä 提出的这个问题,得到以下结论:对于满足一定条件的拟凸度量空间 X 和 Y,G,G' 分别是 X、Y 中子域,且 G 为拟 John-ball 域,则可以得到拟双曲映射 $f:G\to G'$ 的局部到整体的性质。本文首先介绍了一些基本概念,如拟凸度量空间、拟双曲映射等,然后介绍了一些引理、定理及其证明,最后概括了本文的结论及不足之处。

1 预备知识

在本文中,对任意 x,$y\in X$,开球表示为 $B(x,r)=\{y:|x-y|<r\}$;$\delta_G(x)=\mathrm{dist}(x,X\backslash G)$ 表示 x 到 $X\backslash G$ 的距离。

任意连续映射 $\gamma:[a,b]\to X$ 的长度定义为:

$$l(\gamma)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{m}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})|\right\},$$

其中:上确界是由划分 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 决定;若 $l(\gamma)<\infty$,则曲线 γ 称为可求长的。若对任意 x,$y\in G$,在 G 中存在可求长曲线连接 x,y,则称 $G\not\subset X$ 为可求长连通区域。

定义 1[12] 设 γ 为 $G\not\subset X$ 中可求长曲线,则 γ 的拟双曲长度定义为:

$$l_k(\gamma)=\int_\gamma\frac{\mathrm{d}s}{\delta_G(x)}.$$

G 中 x,y 之间拟双曲距离定义为:

$$k_G(x,y)=\inf_{\gamma}l_k(\gamma).$$

定义 2[12] 设 $c\geqslant 1$,如果对任意 x,$y\in X$,存在曲线 γ 连接 x,y,满足 $l(\gamma)\leqslant c|x-y|$,则称 X 为 c-拟凸度量空间。

定义 3[10] 若度量空间 X 中任意一个闭球都是紧集,则称 X 为 proper 空间。

定义 4[10] 设 X 为度量空间,若对任意 x_1,$x_2\in X$,r_1,$r_2\in\mathbf{R}^+$,当 $|x_1-x_2|<r_1+r_2$ 时,有 $B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)\neq\varnothing$,则称 X 为 dense 空间。

定义 5[12] 设 $f:X\to Y$ 为同胚映射,如果存在 $M\geqslant 1$, 使得对任意 x,$y\in G$, 有

$$\frac{k_G(x,y)}{M}\leqslant k_{G'}(f(x),f(y))\leqslant Mk_G(x,y),$$

则称 f 为 M- 拟双曲映射,简称 $M-\mathrm{QH}$。若 f 在 G 的任意的子域上都是 M- 拟双曲映射,那么称 f 为 fully M -拟双曲映射。

定义 6[10] 设 $f:X\to Y$ 为同胚映射,对任意 $x\in X$,$D=B(x,\delta_G(x))$,如果 f 限制在 D 上为 M- 拟双

曲映射，则称 f 称为 semi-local M -拟双曲映射。

定义 7　设 X 为度量空间，$B=B(x,r)$ 为 X 中的开球，对于任意 $y\in B$，如果在 B 中存在一条可求长曲线 γ 连接 x,y，对任意 $u\in[0,l(\gamma)]$，曲线 γ 的弧长参数曲线 $\gamma_s:[0,l(\gamma)]\to B$ 满足：$\gamma_s(0)=x,\gamma_s(l(\gamma))=y,\mathrm{dist}(\gamma_s(u),X\backslash B)\geqslant\frac{u}{\sigma}$，则称 B 为拟 σ-John-ball，其中 $\sigma\geqslant 1$ 为一个常数。

定义 8　设 X 为一个度量空间，$G\not\subset X$ 为 X 中的子域，若 G 中每一个开球 $B(x,r)$ 都是拟 σ-John-ball，则称 G 为拟 σ-John-ball 域。

定义 9[11]　设 $f:G\to G'$ 为同胚映射，如果满足以下条件：

$$\sup_{0<r<r_{x,\alpha}}\left\{\frac{d(f(\overline{B}))}{\mathrm{dist}(f(\overline{B}),G'\backslash f(\alpha B))}\right\}\leqslant M,$$

则称 f 有 (M,α)-环性质，其中：$d(f(\overline{B}))$ 表示 $f(\overline{B})$ 的直径，$r_{x,\alpha}=\frac{\delta_G(x)}{\alpha}$，$B=B(x,r)$，$\alpha B=B(x,\alpha r)$。

定义 10[11]　设 $G\not\subset X$ 和 $G'\not\subset Y$ 是两个子域，$0<t_0\leqslant 1$，存在同胚映射 $\theta:[0,t_0)\to[0,\infty)$，其中 $\theta(0)=0$，设 $f:G\to G'$ 为同胚映射，若对任意 $x,y\in G$，满足 $|x-y|\leqslant t_0\delta_G(x)$，如果有

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\delta_{G'}(f(x))}\leqslant\theta\left(\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\right),$$

则称 f 为 (θ,t_0) -relative 映射。若 $t_0=1$，那么称 f 为 θ -relative 映射。

为了证明定理 1，本文给出下面一些引理。

引理 1[13]　设 X 为 c- 拟凸度量空间，且 $G\not\subset X$ 是一个域。

a) 对 G 中任意两点 x,y，有

$$|x-y|\leqslant(\mathrm{e}^{k_G(x,y)}-1)\delta_G(x).$$

b) 设 $z\in G$，$0<t<1$，若 $x,y\in\overline{B}^G\left(z,\frac{t}{2c}\delta_G(z)\right)$，则

$$\frac{c}{c+t}\,\frac{|x-y|}{\delta_G(z)}\leqslant k_G(x,y)\leqslant\frac{c}{1-\frac{c+1}{2c}t}\,\frac{|x-y|}{\delta_G(z)}.$$

c) 设 $x,y\in G$，且 $|x-y|\leqslant\frac{1}{3c}\delta_G(x)$ 或 $k_G(x,y)\leqslant 1$，那么

$$\frac{1}{2}\,\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\leqslant k_G(x,y)\leqslant 3c\,\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}.$$

由于拟双曲度量的性质非常复杂，而上述引理 1 建立了拟双曲度量与范数之间的关系，从而可以用简单的范数来表示复杂的拟双曲度量。

引理 2[13]　设 X 为 c- 拟凸度量空间，$G\not\subset X$ 是一个子域，则度量空间 (G,k_G) 为 λ -拟凸的，其中 λ 为大于 1 的任意常数。

引理 3[12]　设 X、Y 为 c_1、c_2- 拟凸度量空间，$G\not\subset X$ 和 $G'\not\subset Y$ 为两个子域，$f:G\to G'$ 为同胚映射，记 $L(x,f)=\limsup\limits_{y\to x}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$，其中 x 为非孤立点，有以下结论：

a) 若 f 是 M- 拟双曲映射，则对 $\forall x\in G$，有下面不等式：

$L(x,f)\cdot\delta_G(x)\leqslant c_1 M\cdot\delta_{G'}(f(x))$ 和 $L(f(x),f^{-1})\cdot\delta_{G'}(f(x))\leqslant c_2 M\cdot\delta_G(x)$.

b) 对任意 $x\in G$，若 a) 中上述不等式成立，则 f 为 $2c_1c_2M$ -拟双曲映射。

引理 4[13]　设 X 为 c- 拟凸度量空间，$G\not\subset X$ 为 X 中的子域。对于任意的 $x\in G$ 和 $0<s<\frac{1}{c}$，令 $D=B(x,\delta_G(x))$，当 $|x-y|\leqslant s\delta_G(x)$ 时，有

$$k_D(x,y)\leqslant\frac{c}{1-sc}\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\right).$$

2 定理及其证明

本文定理 1 通过建立局部拟双曲度量与整体拟双曲度量之间的关系,得到了拟双曲映射具有局部到整体的性质。这一节介绍本文的主要结论及其证明。

定理 1 设 X 为 c_1-拟凸、dense 度量空间,Y 为 c_2-拟凸、dense、proper 度量空间,$G \not\subset X$ 为 X 中拟 σ-John-ball 域,$\sigma \geqslant 1$,$G' \not\subset Y$ 为 Y 中的子域,设同胚映射 $f: G \to G'$ 为 semi-local M- 拟双曲映射,$M \geqslant 1$,则 f 在 G 上为 M_1-拟双曲映射。

2.1 引理 5 和引理 6

在证明定理 1 之前,本文先给出引理 5 和引理 6。

引理 5 设 X、Y 为 c_1、c_2- 拟凸度量空间,$G \not\subset X$ 和 $G' \not\subset Y$ 为两个子域,如果同胚映射 $f: G \to G'$ 为 M- 拟双曲映射,则 f 为 fully M_2- 拟双曲映射,其中 $M_2 = 12c_1c_2M^2 \cdot \max\{c_1, c_2\}$.

证明 设任意 $D^* \subset G$ 为 G 中的子域,$f(D^*)$ 表示 D^* 在 f 下的像,固定一点 $x \in D^*$,由引理 3 可知,只需要证明:

$L(x,f) \cdot \delta_{D^*}(x) \leqslant 6c_1c_2M^2 \cdot \delta_{f(D^*)}(f(x))$ 和 $L(f(x), f^{-1}) \cdot \delta_{f(D^*)}(f(x)) \leqslant 6c_1c_2M^2 \cdot \delta_{D^*}(x)$.

由于相似性,令 $\delta_G(x) = \delta_{G'}(f(x)) = 1$.

因为 f 为 M- 拟双曲映射,由引理 3 有 $L(x,f) \leqslant c_1M$, $L(f(x), f^{-1}) \leqslant c_2M$,因此,只要证明:

$$\frac{1}{6c_1M} \leqslant \frac{\delta_{D^*}(x)}{\delta_{f(D^*)}(f(x))} \leqslant 6c_2M \tag{1}$$

由于对称性,只需要证明式(1)右端不等式。下面分两种情况展开讨论:

a) $\delta_{f(D^*)}(f(x)) \geqslant \frac{1}{3c_2M}$. 由于 $D^* \subset G$,可以得到:

$$\frac{\delta_{D^*}(x)}{\delta_{f(D^*)}(f(x))} \leqslant 3c_2M\delta_{D^*}(x) \leqslant 3c_2M\delta_G(x) = 3c_2M.$$

b) $\delta_{f(D^*)}(f(x)) < \frac{1}{3c_2M}$. 取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{3c_2M} - \delta_{f(D^*)}(f(x))$,由 $\delta_{f(D^*)}(f(x))$ 的定义可知,存在一点 $f(y) \in Y \backslash f(D^*)$,使得:

$$|f(x) - f(y)| < \delta_{f(D^*)}(f(x)) + \varepsilon < \frac{1}{3c_2M} \tag{2}$$

于是:

$$\delta_{G'}(f(y)) \geqslant \delta_{G'}(f(x)) - |f(x) - f(y)| > 1 - \frac{1}{3c_2M} > 0 \tag{3}$$

因此,可以推出 $f(y) \in G'$.令 y 为 $f(y)$ 逆映射到 X 上对应的点,不难知道 $y \in G \backslash D^*$.

因为 $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{3c_2M} = \frac{\delta_{G'}(f(y))}{3c_2M}$,根据引理 1c),可得:

$$k_{G'}(f(x), f(y)) \leqslant 3c_2 \frac{|f(x) - f(y)|}{\delta_{G'}(f(x))} < \frac{1}{M} \tag{4}$$

由于 f 为 M -拟双曲映射,所以:

$$k_G(x, y) \leqslant Mk_{G'}(f(x), f(y)) \leqslant 1 \tag{5}$$

再次应用引理 1c),结合式(2)—(5),可以推出:

$$\delta_{D^*}(x) \leqslant |x - y| \leqslant 2k_G(x,y)\delta_G(x) = 2k_G(x,y) \leqslant 2Mk_{G'}(f(x), f(y)) <$$
$$6c_2M\frac{|f(x) - f(y)|}{\delta_{G'}(f(x))} = 6c_2M|f(x) - f(y)| \leqslant 6c_2M[\delta_{f(D^*)}(f(x)) + \varepsilon].$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时,得 $\delta_{D^*}(x) \leqslant 6c_2M\delta_{f(D^*)}(f(x))$.

因此,式(1)右式得证,根据引理 3b),可知 $f|_{D^*}$ 为 M_2-拟双曲映射,其中:

$$M_2 = 12c_1c_2M^2 \cdot \max\{c_1, c_2\}.$$

引理 6　设 X 为 c_1-拟凸、dense 度量空间，且 $G\not\subset X$ 为 X 中的拟 σ-John-ball 域，Y 为 c_2-拟凸、proper、dense 度量空间，$G'\not\subset Y$ 为 Y 中的子域，对于 $\forall x\in G$，$D=B(x,\delta_G(x))$，$D'=f(D)$，若同胚映射 $f:G\to G'$ 为 semi-local M- 拟双曲映射，$M>1$，则：

$$\delta_{D'}(f(x))\geqslant\tau\delta_{G'}(f(x)),$$

其中：$\tau=\dfrac{1}{3M_4}$，$M_4=(1+M_5)^{27c_1{}^4(1+\sigma)+1}-1$，$M_5=27c_2\mathrm{e}^{\frac{4c_1M_2}{2c_1-1}}$.

证明　本文主要分三步来完成定理证明。

a) 证明 f 具有(M_3,α)- 环性质，其中 $M_3=3\mathrm{e}^{\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}}$，$\alpha=3c_1$.

对于任意 $z\in D$，$B=B(z,r)$，$3c_1r<\delta_G(z)$，令 $B_1=3c_1B\subseteq D$，要证存在常数 M_3，使得：

$$d(f(\overline{B}))\leqslant M_3\cdot\mathrm{dist}(f(\overline{B}),G'\backslash f(\alpha B))\tag{6}$$

对于 $\forall a\in\overline{B}$，$\exists b\in\overline{B}$，使得：

$$|f(a)-f(b)|\geqslant\frac{1}{3}d(f(\overline{B})).$$

因为 $B_1=3c_1B\subseteq D$，且 $a,b\in\overline{B}=\overline{B}\left(z,\dfrac{1}{3c_1}\delta_{B_1}(z)\right)$，根据引理 1b)，有：

$$k_{B_1}(a,b)\leqslant\frac{c_1}{1-\dfrac{c_1+1}{2c_1}\cdot\dfrac{2}{3}}\frac{|a-b|}{\delta_{B_1}(z)}=\frac{3c_1^2}{2c_1-1}\frac{|a-b|}{\delta_{B_1}(z)}<\frac{3c_1^2}{2c_1-1}\cdot\frac{2}{3c_1}=\frac{2c_1}{2c_1-1}.$$

结合引理 1a)，可以得到：

$$\ln\frac{|f(a)-f(b)|}{\delta_{f(B_1)}(f(a))}\leqslant\ln\left(1+\frac{|f(a)-f(b)|}{\delta_{f(B_1)}(f(a))}\right)\leqslant k_{f(B_1)}(f(a),f(b))\leqslant M_2k_{B_1}(a,b)\leqslant\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}.$$

因为 $|f(a)-f(b)|\geqslant\dfrac{1}{3}d(f(\overline{B}))$，有：

$$d(f(\overline{B}))\leqslant3|f(a)-f(b)|\leqslant3\mathrm{e}^{\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}}\delta_{f(B_1)}(f(a))\leqslant3\mathrm{e}^{\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}}d(f(a),Y\backslash f(B_1)).$$

由于 a 的任意性，可以得到：

$$d(f(\overline{B}))\leqslant3\mathrm{e}^{\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}}\inf_{a\in\overline{B}}d(f(a),Y\backslash f(B_1))\leqslant3\mathrm{e}^{\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}}\inf_{a\in\overline{B}}d(f(a),G'\backslash f(B_1))\leqslant$$

$$3\mathrm{e}^{\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}}d(f(a),G'\backslash f(3c_1B)).$$

因此，式(6)成立，其中 $M_3=3\mathrm{e}^{\frac{2c_1M_2}{2c_1-1}}$，$\alpha=3c_1$.

b) 对任意 $x,y\in D=B(x,\delta_G(x))$，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M_4\delta_{D'}(f(x))$，其中：

$$M_4=(1+27c_2\mathrm{e}^{\frac{4c_1M}{2c_1-1}})^{27c_1^4(1+\sigma)+1}-1.$$

记 $D'=f(D)$，$|x-y|=t\delta_D(x)$。下面分两种情形来证明 b)：

情形 1：当 $0<t<\dfrac{1}{(3c_1)^3}$ 时，f 为$(\theta,\tilde{t})$ -relative 映射，其中 $\tilde{t}=\dfrac{1}{(3c_1)^3}$.

设 m 为使得$(3c_1)^mt<1$ 成立的最大整数，$m\geqslant3$，即$(3c_1)^3t<1$。对于任意的 $0\leqslant j\leqslant m$，令 $r_j=(3c_1)^jt\delta_D(x)$，$B_j=B(x,r_j)$.在 $Y'\backslash D'$ 上取一点 $f(z)$，使得：

$$|f(z)-f(x)|\leqslant3\delta_{D'}(f(x)).$$

因为 Y 为 c_2- 拟凸的，所以存在可求长曲线 γ 连接 $f(z)$、$f(x)$，使得 $l(\gamma)\leqslant c_2|f(x)-f(z)|$。对曲线 γ 进行如下分割：

$$t_j=\sup_t\{t\in[a,b]:\gamma|_{[t,b]}\subset f(\overline{B_j}),1\leqslant j\leqslant m\},$$

令 $y_j=\gamma(t_j)$，不难证明，$y_j=\gamma(t_j)\in f(S_G(x,r_j))$。令 $x_j=f^{-1}(y_j)$，因为 f 为同胚，所以 $x_j\in S_G(x,r_j)$，对于任意 $2\leqslant j\leqslant m$，由 a) 知，f 具有(M_3,α)- 环性质，可以得到：

$$|f(x)-y_1|\leqslant d(f(\overline{B_1}))\leqslant d(f(\overline{B_{j-1}}))\leqslant M_3 d((f(\overline{B_{j-1}})),G'\backslash f(3c_1B_{j-1}))=$$
$$M_3 d((f(\overline{B_{j-1}})),G'\backslash f(B_j))\leqslant M_3|y_{j-1}-y_j|\leqslant M_3 l(\gamma[t_{j-1},t_j]).$$

关于 $|f(x)-y_1|$,对前 $m-1$ 项求和,可得:

$$(m-1)|f(x)-y_1|\leqslant M_3\sum_{j=2}^{m} l(\gamma[t_{j-1},t_j])\leqslant M_3 l(\gamma)\leqslant M_3 c_2|f(x)-f(z)|\leqslant 3M_3 c_2\delta_{D'}(f(x)).$$

注意到 $y\in D$,$|x-y|=t\delta_D(x)$,$r_0=t\delta_D(x)$,所以 $y\in B_0$。因为 f 有(M_3,α)-环 性质,可以得到:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant d(f(\overline{B_0}))\leqslant M_3 d(f(\overline{B_0}),G'\backslash f(B_1))\leqslant M_3|f(x)-y_1|\leqslant \frac{3c_2M_3^2}{m-1}\delta_{D'}(f(x)) \tag{7}$$

因为 m 为使得$(3c_1)^m t<1$ 成立的最大整数,因此$(3c_1)^{m+1}t\geqslant 1$,又因为$(3c_1)^3 t<1$,从而有:

$$m-1\geqslant \frac{\ln(1/t)}{3\ln(3c_1)} \tag{8}$$

结合式(7)—(8),可以推出:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{\delta_{D'}(f(x))}\leqslant 3c_2M_3^2\,\frac{3\ln(3c_1)}{\ln(1/t)}=\frac{9c_2M_3^2\ln(3c_1)}{\ln(1/t)}=\theta(t).$$

进一步,当 $0<t<\frac{1}{(3c_1)^3}$ 时,可以得到$|f(x)-f(y)|\leqslant M_5\delta_{D'}(f(x))$,其中:

$$M_5=3c_2M_3^2=27c_2\mathrm{e}^{\frac{4c_1M_2}{2c_1-1}}.$$

情形 2:$\frac{1}{(3c_1)^3}\leqslant t<1$.

因为 G 为 X 中拟σ-John-ball 域,所以对任意 x,y,存在一条可求长曲线 γ 连接 x,y,z 为 γ 上一点,γ 的子弧 γ_z 连接 x,z,使得 $l(\gamma_z)\leqslant\sigma\,\mathrm{dist}(z,X\backslash D)=\sigma\delta_D(z)$,且 $l(\gamma)\leqslant c_1|x-y|$,$\sigma\geqslant 1$,令 $t_0=\frac{t}{(3c_1)^3(1+\sigma)}$,对曲线 γ 进行如下分割:

$$t_{i+1}=\inf_t\{t\in[c,d]:\gamma|_{[t,d]}\subseteq B(\xi_j,t_0\delta_D(x)),0\leqslant i\leqslant n-1\},$$

令 $\xi_0=x$,$\xi_{i+1}=\gamma(t_{i+1})$,对 i 求和,可得:

$$(n-1)t_0\delta_D(x)=(n-1)\,\frac{t}{(3c_1)^3(1+\sigma)}\delta_D(x)\leqslant l(\gamma)\leqslant c_1|x-y|\leqslant c_1t\delta_D(x).$$

于是,

$$n\leqslant(3c_1)^3(1+\sigma)c_1+1.$$

由 $\delta_D(x)$ 的定义,可知:

$$\delta_D(x)\leqslant\delta_D(\xi_1)+|\xi_1-x|\leqslant\delta_D(\xi_1)+l(\gamma(t_1))\leqslant\delta_D(\xi_1)+\sigma\delta_D(\xi_1)=(1+\sigma)\delta_D(\xi_1).$$

由 ξ_j 的选取,可知:

$$|\xi_1-x|=t_0\delta_D(x)=\frac{t}{(3c_1)^3(1+\sigma)}\delta_D(x)<\frac{1}{(3c_1)^3(1+\sigma)}\delta_D(x)\leqslant$$
$$\frac{1+\sigma}{(3c_1)^3(1+\sigma)}\delta_D(\xi_1)=\frac{1}{(3c_1)^3}\delta_D(\xi_1).$$

由情形 1,可得:

$$|f(\xi_1)-f(x)|\leqslant M_5\delta_{D'}(f(x)).$$

根据 $\delta_{D'}(f(x))$ 的定义,有:

$$\delta_{D'}(f(\xi_1))\leqslant\delta_{D'}(f(x))+|f(\xi_1)-f(x)|\leqslant\delta_{D'}(f(x))+M_5\delta_{D'}(f(x))=(1+M_5)\delta_{D'}(f(x)) \tag{9}$$

因为:

$$|\xi_2-\xi_1|=t_0\delta_D(x)\leqslant(1+\sigma)t_0\delta_D(\xi_1)\leqslant\frac{\delta_D(\xi_1)}{(3c_1)^3},$$

于是,可以得到:

$$|f(\xi_2)-f(\xi_1)|\leqslant M_5\delta_{D'}(f(\xi_1)).$$

结合式(9)，可以得到：

$$|f(\xi_2)-f(\xi_1)|\leqslant M_5(1+M_5)\delta_{D'}(f(x)).$$

类似地，由 $\delta_D(x)$ 的定义，可以得到：

$$\delta_D(x)\leqslant\delta_D(\xi_2)+|\xi_2-x|\leqslant\delta_D(\xi_2)+l(\gamma(t_2))\leqslant\delta_D(\xi_2)+\sigma\delta_D(\xi_2)=(1+\sigma)\delta_D(\xi_2).$$

由 ξ_j 的选取，可推出：

$$|\xi_3-\xi_2|=t_0\delta_D(x)\leqslant(1+\sigma)t_0\delta_D(\xi_2)\leqslant\frac{\delta_D(\xi_2)}{(3c_1)^3}.$$

由情形 1，可得：

$$|f(\xi_3)-f(\xi_2)|\leqslant M_5\delta_{D'}(f(\xi_2)).$$

又因为：

$$\delta_{D'}(f(\xi_2))\leqslant\delta_{D'}(f(x))+|f(x)-f(\xi_1)|+|f(\xi_1)-f(\xi_2)|\leqslant[1+M_5+M_5(1+M_5)]\delta_{D'}(f(x))=(1+M_5)^2\delta_{D'}(f(x)).$$

所以，

$$|f(\xi_3)-f(\xi_2)|\leqslant M_5\delta_{D'}(f(\xi_2))\leqslant M_5\,(1+M_5)^2\delta_{D'}(f(x)).$$

由 $\delta_D(x)$ 的定义，可以得到下面不等式：

$$\delta_D(x)\leqslant\delta_D(\xi_3)+|\xi_3-x|\leqslant\delta_D(\xi_3)+l(\gamma(t_3))\leqslant\delta_D(\xi_3)+\sigma\delta_D(\xi_3)=(1+\sigma)\delta_D(\xi_3).$$

注意到：

$$|\xi_4-\xi_3|=t_0\delta_D(x)\leqslant(1+\sigma)t_0\delta_D(\xi_3)\leqslant\frac{\delta_D(\xi_3)}{(3c_1)^3},$$

再根据情形 1，有：

$$|f(\xi_4)-f(\xi_3)|\leqslant M_5\delta_{D'}(f(\xi_3)).$$

根据 $\delta_{D'}(f(x))$ 定义，有：

$$\delta_{D'}(f(\xi_3))\leqslant\delta_{D'}(f(x))+|f(x)-f(\xi_1)|+|f(\xi_1)-f(\xi_2)|+|f(\xi_2)-f(\xi_3)|\leqslant[1+M_5+M_5(1+M_5)+M_5\,(1+M_5)^2]\delta_{D'}(f(x))=(1+M_5)^3\delta_{D'}(f(x)).$$

因此，

$$|f(\xi_4)-f(\xi_3)|\leqslant M_5\delta_{D'}(f(\xi_3))\leqslant M_5\,(1+M_5)^3\delta_{D'}(f(x)).$$

重复上述步骤，对 $\forall\,1\leqslant i\leqslant n-1$，有：

$$|f(y)-f(\xi_{n-1})|\leqslant M_5\,(1+M_5)^{n-1}\delta_{D'}(f(x)).$$

所以，

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(\xi_1)|+|f(\xi_1)-f(\xi_2)|+|f(\xi_2)-f(\xi_3)|+\cdots+|f(\xi_{n-1})-f(y)|\leqslant M_5[1+(1+M_5)+(1+M_5)^2+(1+M_5)^3+\cdots+(1+M_5)^{n-1}]\delta_{D'}(f(x))=M_5\,\frac{1-(1+M_5)^n}{1-(1+M_5)}\delta_{D'}(f(x))=[(1+M_5)^n-1]\delta_{D'}(f(x)).$$

又因为 $n\leqslant(3c_1)^3(1+\sigma)c_1+1$，可以推出：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant[(1+M_5)^n-1]\delta_{D'}(f(x))\leqslant[(1+M_5)^{27c_1^4(1+\sigma)+1}-1]\delta_{D'}(f(x)).$$

令

$$M_4=(1+M_5)^{27c_1^4(1+\sigma)+1}-1=(1+27c_2\mathrm{e}^{\frac{4c_1M_2}{2c_1-1}})^{27c_1^4(1+\sigma)+1}-1.$$

因此，当 $|x-y|=t\delta_D(x)$，$0<t<1$ 时，有：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M_4\delta_{D'}(f(x)).$$

c) 证明 $D'\not\subset B(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x)))$，其中 $0<\omega<1$.

假设 $D'\not\subset B(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x)))$ 不成立，即：

$$D'\subseteq B(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x))).$$

由 $\delta_G(x)=\operatorname{dist}(x,X\backslash G)$，易知在 $X\backslash G$ 中存在一个序列$\{\lambda_m\}$，使得：

$$\delta_G(x)\leqslant|\lambda_m-x|\leqslant\delta_G(x)+\frac{1}{m}.$$

根据 dense 空间的定义，有：

$$B\left(\lambda_m,\frac{1}{m}\right)\cap B(x,\delta_G(x))\neq\varnothing.$$

取点列 $\{\zeta_m\}\in B\left(\lambda_m,\frac{1}{m}\right)\cap B(x,\delta_G(x))$，当 $m\to\infty$ 时，$\zeta_m\in\partial G$。因为 $\zeta_m\in D$，所以：

$$f(\zeta_m)\in D'\subseteq B(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x))).$$

又因为 Y 为 proper 空间，由此可知闭球 $\overline{B}(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x)))$ 是紧集，所以 $f(\zeta_m)$ 在 $\overline{B}(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x)))$ 中有聚点。

不妨假设 $m\to\infty$ 时，$f(\zeta_m)\to\zeta_0{}'$，根据 $B(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x)))\subseteq G'$，于是 $\zeta_0{}'\in G'$。不难验证，对于任意 $m\in\mathbf{N}$，都有：

$$\zeta_m\to f^{-1}(\zeta_0{}')\in G.$$

这与 $\zeta_m\in\partial G$ 矛盾。故假设不成立，所以 $D'\not\subset B(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x)))$.

根据 c)结论，$D'\not\subset B(f(x),\omega\delta_{G'}(f(x)))$，取 $\omega=\frac{1}{3}$，那么存在 $y\in D$，有：

$$|f(x)-f(y)|>\frac{1}{3}\delta_{G'}(f(x)).$$

再结合 b)，对任意 $x,y\in D=B(x,\delta_G(x))$，都有$|f(x)-f(y)|\leqslant M_4\delta_{D'}(f(x))$，可以推出：

$$\frac{1}{3}\delta_{G'}(f(x))<|f(x)-f(y)|\leqslant M_4\delta_{D'}(f(x)).$$

因此，

$$\delta_{D'}(f(x))\geqslant\frac{1}{3M_4}\delta_{G'}(f(x)).$$

令

$$\tau=\frac{1}{3M_4},M_4=\left(1+27c_2\mathrm{e}^{\frac{4c_1M_2}{2c_1-1}}\right)^{27c_1^4(1+\sigma)+1}-1.$$

所以，

$$\delta_{D'}(f(x))\geqslant\tau\delta_{G'}(f(x)).$$

因此，完成引理6的证明。

引理6建立了 $\delta_{D'}(f(x))$ 与 $\delta_{G'}(f(x))$ 之间的关系，为得到拟双曲映射下 $k_{D'}(f(x),f(y))$ 和 $k_{G'}(f(x),f(y))$ 的关系起到重要的作用。在证明定理1的过程中，将运用到如下 Bernoulli 不等式：

假设 $\alpha>1$，若 $x>-1$，则 $(1+x)^\alpha\geqslant1+\alpha x$.

2.2 定理1的证明

对于 $\forall x,y\in G,D=B(x,\delta_G(x)),D'=f(D)$，因为 f 为 semi-local M- 拟双曲映射，即$\frac{k_D(x,y)}{M}\leqslant k_{D'}(f(x),f(y))\leqslant Mk_D(x,y)$，要证明$\frac{k_G(x,y)}{M_1}\leqslant k_{G'}(f(x),f(y))\leqslant M_1k_G(x,y)$在 G 上成立，下面分两种情况讨论：

a) $|x-y|\leqslant\frac{1}{3c_1}\delta_G(x)$.

由引理4，当 $s=\frac{1}{3c_1}$ 时，有：

$$k_D(x,y)\leqslant\frac{c_1}{1-\frac{1}{3c_1}c_1}\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\right)\leqslant\frac{3}{2}c_1\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\right).$$

又因为 $D'\subseteq G'$，结合引理 1a)，可以推出：

$$k_{G'}(f(x),f(y))\leqslant k_{D'}(f(x),f(y))\leqslant Mk_D(x,y)\leqslant \frac{3}{2}c_1M\ln\left(1+\frac{|x-y|}{\delta_G(x)}\right)\leqslant \frac{3}{2}c_1Mk_G(x,y).$$

接下来，分两种情况证明 $k_G(x,y)\leqslant M_1k_{G'}(f(x),f(y))$.

情形 1：$|f(x)-f(y)|>\frac{1}{3c_2}\delta_{D'}(f(x))$.

根据引理 6，有 $\delta_{D'}(f(x))\geqslant \tau\delta_{G'}(f(x))$，结合引理 1a)，可以得到：

$$k_{G'}(f(x),f(y))\geqslant \ln\left(1+\frac{|f(x)-f(y)|}{\delta_{G'}(f(x))}\right)\geqslant \ln\left(1+\frac{\tau}{3c_2}\right).$$

因为 X 为 c_1-拟凸的，所以对 $\forall x,y\in G$，存在可求长曲线 γ 连接 x,y，使得 $l(\gamma)\leqslant c_1|x-y|$.设 γ_s：$[0,l(\gamma)]\to\gamma$ 为曲线 γ 的以弧长为参数的曲线，$\gamma_s(0)=x$，对 $\forall u\in[0,l(\gamma)]$，有 $|\gamma_s(u)-x|\leqslant u$，因此，

$$\delta_G(x)\leqslant|\gamma_s(u)-x|+\mathrm{dist}(\gamma_s(u),X\backslash G)\leqslant u+\delta_G(\gamma_s(u)).$$

又因为 $|x-y|\leqslant\frac{1}{3c_1}\delta_G(x)$，结合 $k_G(x,y)$ 的定义，可以得到：

$$k_G(x,y)\leqslant\int_0^{l(\gamma)}\frac{\mathrm{d}u}{\delta_G(\gamma_s(u))}\leqslant\int_0^{l(\gamma)}\frac{\mathrm{d}u}{\delta_G(x)-u}=\ln\left(1+\frac{l(\gamma)}{\delta_G(x)-l(\gamma)}\right)\leqslant$$

$$\ln\left(1+\frac{c_1|x-y|}{\delta_G(x)-c_1|x-y|}\right)\leqslant\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

所以，

$$k_G(x,y)\leqslant\ln\left(\frac{3}{2}\right)\leqslant\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln\left(1+\frac{\tau}{3c_2}\right)}k_{G'}(f(x),f(y)).$$

情形 2：$|f(x)-f(y)|\leqslant\frac{1}{3c_2}\delta_{D'}(f(x))$.

定义逆映射：$f^{-1}:B'=B(f(x),\delta_{\mathrm{D}'}(f(x)))\to B^*=f^{-1}(B')$。由引理 5 知，$f^{-1}$ 在 $k_{G'}$ 度量下为 M_2-拟双曲映射，其中 $M_2=12c_1c_2M^2\cdot\max\{c_1,c_2\}$。根据引理 4，当 $s=\frac{1}{3c_2}$ 时，有：

$$k_{B'}(f(x),f(y))\leqslant\frac{3}{2}c_2\ln\left(1+\frac{|f(x)-f(y)|}{\delta_{\mathrm{D}'}(f(x))}\right).$$

又因为 $B^*\subseteq G$，所以 $k_G(x,y)\leqslant k_{B^*}(x,y)$. 结合引理 6、引理 1a)和 Bernoulli 不等式，可以得到：

$$k_G(x,y)\leqslant k_{B^*}(x,y)\leqslant M_2k_{B'}(f(x),f(y))\leqslant\frac{3}{2}c_2M_2\ln\left(1+\frac{|f(x)-f(y)|}{\delta_{\mathrm{D}'}(f(x))}\right)$$

$$\leqslant\frac{3}{2}c_2M_2\ln\left(1+\frac{|f(x)-f(y)|}{\tau\delta_{G'}(f(x))}\right)\leqslant\frac{3c_2M_2}{2\tau}\ln\left(1+\frac{|f(x)-f(y)|}{\delta_{G'}(f(x))}\right)$$

$$\leqslant\frac{3c_2M_2}{2\tau}k_{G'}(f(x),f(y)).$$

令

$$M_1=\max\left\{\frac{3}{2}c_1M,\frac{\ln(3/2)}{\ln(1+\tau/(3c_2))},\frac{3c_2M_2}{2\tau}\right\},$$

其中：$M_2=12c_1c_2M^2\cdot\max\{c_1,c_2\}$，$\tau=\frac{1}{3M_4}$，$M_4=(1+27c_2\mathrm{e}^{\frac{4c_1M_2}{2c_1-1}})^{27c_1^4(1+\sigma)+1}-1$.

b) $|x-y|>\frac{1}{3c_1}\delta_G(x)$.

由引理 2 知，在 G 中存在可求长曲线 γ 连接 x,y，使得 $l_{k_G}(\gamma)\leqslant\lambda_1k_G(x,y)$.令 $\gamma:[a,b]\to G$，定义 γ 上一系列点 $x=g_0,g_1,\cdots,g_p=y$ 如下：

$$t_j = \sup_t \left\{ t \in [a,b]: |\gamma(t) - g_{j-1}| \leqslant \frac{\delta_G(g_{j-1})}{3c_1}, 1 \leqslant j \leqslant p \right\},$$

令 $t_0 = a, g_j = \gamma(t_j)$,对 $1 \leqslant j \leqslant p-1$,有 $|g_{j-1} - g_j| = \dfrac{\delta_G(g_{j-1})}{3c_1}, |g_{p-1} - g_p| \leqslant \dfrac{\delta_G(g_{j-1})}{3c_1}$.

又因为 $|x-y| > \dfrac{1}{3c_1}\delta_G(x)$,所以 $p \geqslant 2$. 由 a) 的结论,有:

$$\begin{aligned}
k_{G'}(f(x), f(y)) &\leqslant \sum_{j=1}^{p-1} k_{G'}(f(g_{j-1}), f(g_j)) + k_{G'}(f(g_{p-1}), f(g_p)) \\
&\leqslant M_1 \Big[\sum_{j=1}^{p-1} k_G(g_{j-1}, g_j) + k_G(g_{p-1}, g_p) \Big] \leqslant M_1 l_{k_G}(\gamma) \\
&\leqslant \lambda_1 M_1 k_G(x,y).
\end{aligned}$$

同理,在 G' 中存在可求长曲线 $\tilde{\gamma}'$ 连接 $f(x), f(y)$,使得 $l_{k_{G'}}(\tilde{\gamma}') \leqslant \lambda_2 k_{G'}(f(x), f(y))$.设 $\tilde{\gamma} = f^{-1} \circ \tilde{\gamma}'$: $[c,d] \rightarrow G$,由 $\tilde{\gamma}'$ 的定义可知,$\tilde{\gamma}$ 为连接 x, y 的可求长曲线,定义 $\tilde{\gamma}$ 上一系列点 $x = h_0, h_1, \cdots, h_q = y$ 如下,令 $t_0 = c, h_i = \tilde{\gamma}(t_i)$,

$$t_i = \sup_t \left\{ t \in [c,d]: |\tilde{\gamma}(t) - h_{i-1}| \leqslant \frac{\delta_G(h_{i-1})}{3c_1}, 1 \leqslant i \leqslant q \right\},$$

对任意 $1 \leqslant i \leqslant q-1$,有 $|h_{i-1} - h_i| = \dfrac{\delta_G(h_{i-1})}{3c_1}, |h_{q-1} - h_q| \leqslant \dfrac{\delta_G(h_{i-1})}{3c_1}$。又因为 $|x-y| > \dfrac{1}{3c_1}\delta_G(x)$,所以 $q \geqslant 2$. 由 a)的结果可知:

$$\begin{aligned}
k_G(x,y) &\leqslant \sum_{i=1}^{q-1} k_G(h_{i-1}, h_i) + k_G(h_{q-1}, h_q) \\
&\leqslant M_1 \Big[\sum_{i=1}^{q-1} k_{G'}(f(h_{i-1}), f(h_i)) + k_{G'}(f(h_{q-1}), f(h_q)) \Big] \\
&\leqslant M_1 l_{k_{G'}}(\tilde{\gamma}') \leqslant \lambda_2 M_1 k_{G'}(f(x), f(y)).
\end{aligned}$$

综上可知,f 是 G 上的 M_1-拟双曲映射。

3 结 论

本文研究了度量空间中拟双曲映射局部到整体的性质,部分回答了 Väisälä 在文献[3]中提出的问题,得到以下结论:假设 X、Y 为适当的度量空间,G 是 X 的满足拟 σ-John-ball 的子域,如果同胚映射 f 为 semi-local M-拟双曲映射,则 f 是 G 上的全局的 M_1-拟双曲映射。

相比于 Huang 等[12]的结论,本文去掉了 f 是 semi-local η-拟对称映射的条件,但是在证明引理 6 时,为了控制分割点的个数,本文引入了拟 σ-John-ball 域的条件,因此本文的不足之处在于,G 必须是拟 σ-John-ball 域。如果要完全解决 Väisälä 提出的问题,可能还要在拟双曲度量空间中建立各种覆盖引理,如 Vitali 覆盖引理、Besicovitch 覆盖引理以及曲线族模的下界理论。

参考文献:

[1] Gehring F W, Palka B P. Quasiconformally homogeneous domains[J]. Journal d'-Analyse Mathématique, 1976, 30(1): 172-199.

[2] Gehring F W, Osgood B G. Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric[J]. Journal d'-Analyse Mathématique, 1979, 36(1): 50-74.

[3] Väisälä J. The free quasiworld. Freely quasiconformal and related maps in Banach spaces[J]. Banach Center Publications, 1999, 48(1): 55-118.

[4] Tukia P, Väisälä J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A I Mathematica, 1980, 5: 97-114.

[5] Rasila A, Talponen J. On quasihyperbolic geodesics in Banach spaces[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae

Mathematica，2014，39：163-173.

[6] Rasila A，Talponen J. Convexity properties of quasihyperbolic balls on Banach spaces[J]. Annales-Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica，2012，37：215-218.

[7] 钟根红，李林钟，马晓艳. 广义三角函数与双曲函数的 Wilker-Huygens 型不等式[J].浙江理工大学学报(自然科学版)，2019，41(1)：118-121.

[8] Herron D，Buckley S. Quasihyperbolic geodesics are hyperbolic-quasigeodesics[J]. Journal of the European Mathematical Society，2020，22:1917-1970.

[9] Heinonen J，Koskela P. Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry[J]. Acta Mathematica，1998，181(1)：1-61.

[10] Huang X，Liu J. Quasihyperbolic metric and quasisymmetric mappings in metric spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society，2015，367(9)：6225-6246.

[11] Liu H，Huang X. The properties of quasisymmetric mappings in metric spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2016，435(2)：1591-1606.

[12] Huang X，Liu H，Liu J. Local properties of quasihyperbolic mappings in metric spaces[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica，2016，41：23-40.

[13] Huang M，Rasila A，Wang X，et al. Semisolidity and locally weak quasisymmetry of homeomorphisms in metric spaces[J]. Studia Mathmatica，2018，242(3)：267-301

(责任编辑:康　锋)