浙江理工大学学报，2021，45(2)：256-265
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10. 3969/j.issn.1673－3851(n).2021. 02.014

分数阶过度相依及其在投资多元化问题中的应用

胡觉亮[1]**，陈维茹**[1]**，韩曙光**[1,2]**，杨建萍**[1]
（1.浙江理工大学理学院，杭州 310018；2.阿尔伯塔大学计算科学系，加拿大埃德蒙顿 T6G 2E8）

摘　要：针对几乎喜爱风险但在某些财富水平又厌恶风险的投资者，建立了更精确的风险相依模型，将原有的整数阶过度相依理论推广到了分数阶。首先，针对实际应用中投资者的效用函数难以确定的问题，建立了分数阶过度相依基于分布函数的等价刻画；其次，考虑到金融理论中金融衍生品通常表示为某些主要资产的一个单调递增凸性变换，讨论了分数阶过度相依在单调递增凸性变换下是否具有不变性；最后，将分数阶过度相依模型应用于投资多元化的问题中，以说明该模型的有效性，并进一步扩展了确保投资多元化的充分条件，为风险喜爱投资者面对较复杂投资时提供了适合的组合。

关键词：分数阶过度相依；喜爱风险；效用函数；单调凸性变换；多元化

中图分类号：O211. 9；O29　　　**文献标志码：**A　　　**文章编号：**1673-3851 (2021) 03-0256-10

Fractional order excess dependence and its application in investment diversification

HU Jueliang[1]，*CHEN Weiru*[1]，*HAN Shuguang*[1,2]，*YANG Jianping*[1]
（1. School of Science，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China；
2. Department of Computing Science，University of Alberta，Edmonton T6G 2E8，Canada）

Abstract：In order to establish a more accurate risk dependence model for investors who almost love risks but hate risks at some wealth levels，the original integer-order excess dependence theory is extended to the fractional order. Firstly，to solve the problem that it is difficult to determine the utility function of investors in practical application，an equivalent characterization based on the distribution function is established for the fractional order excess dependence. Secondly，considering that financial derivatives are usually expressed as a monotone increasing convexity transformation of some primary assets in the finance theory，the question whether fractional order excess dependence has invariance under monotone increasing convexity transformation is discussed. Finally，the fractional order excess dependence model is applied in the problem of investment diversification to illustrate the effectiveness of the model proposed in the paper and the sufficient conditions to ensure the investment diversification are further extended to provide a suitable portfolio for risk-loving investors in the face of complex investments.

Key words：fractional order excess dependence；risk loving；utility function；monotone convexity transformation；diversification

---

收稿日期：2020－06－09　　**网络出版日期**：2020－10－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11701518)；浙江省自然科学基金项目(LQ17A010011)；浙江理工大学科研启动基金项目(16062097-Y)
作者简介：胡觉亮（1958－　），男，浙江杭州人，教授，主要从事组合优化及其应用方面的研究。
通信作者：杨建萍，E-mail：yangjp @zstu.edu.cn

0 引　言

在金融投资领域，许多投资策略的制定需要借助相应的风险相依模型[1-2]。在已有的风险相依模型中，相依性最弱的是 Wright[3] 提出的一阶期望相依模型，它用单调增效用函数来刻画投资者风险偏好，有效地回答了投资者为什么需要进行分散投资这一的经典问题，并且为这部分投资者提供了一些需要进行分散投资的充分必要条件。由于一阶期望相依模型考虑的对象是风险偏好具有单调增效用函数的投资者，它不能有效解释风险偏好具有凸性单调增的效用函数（风险喜爱）与风险偏好具有凹性单调增效用函数（风险厌恶）的投资者投资行为的差异性，导致了此模型的局限性。

近年来有许多研究者为了能给具有不同风险偏好的投资者提供更精确的相依模型，采用不同效用函数和相依结构研究高阶期望相依。Li[4] 通过考虑一类由 Caballé 等[5] 提出的"混合风险规避"效用函数，引入了高阶期望相依；Denuit 等[6] 通过事例说明，两个连续整数阶期望相依之间存在跳跃，并采用 Leshno 等[7] 提出的几乎风险厌恶效用函数类，引入了几乎期望相依（Almost expectation dependence，AED）以填补连续整数阶期望相依之间的间隙；最近，Henry Chiu[8] 为了给面对多个复杂投资的投资者提供更为有效的投资决策，考虑了多个风险投资之间的偏相关关系，通过一般的风险厌恶效用函数，引入了条件期望相依。

到目前为止，有关一阶期望相依模型的研究成果绝大部分针对的是风险厌恶投资者。事实上，在实际投资中，许多投资者是风险喜爱的。Denuit 等[6] 考虑投资者喜爱风险的偏好，提出了与高阶期望相依模型相对的高阶过度相依模型。高阶过度相依模型广泛应用于投资组合的多样性问题和基于 CAPM 模型[9] 假设的资产定价符号的确定性问题中。与期望相依相比，过度相依的理论研究成果相对偏少。本文的目的是进一步研究过度相依理论并探讨其在投资多元化问题中的应用。

事实上，Denuit 等[6] 提出的整数阶过度相依模型依然存在着间隙，即：存在着大量的资产收益，它们之间存在着某种比较弱的相依关系，但不能用整数阶过度相依来建模。另一方面，整数阶过度相依模型针对喜爱风险的投资者，而市场中存在着大量不完全喜爱风险的投资者。例如：人们在买股票（表现为喜爱风险）的同时会买保险（表现为厌恶风险）。对于这一类投资者来说，这两个资产是负相依的，对其分散投资才能获得最佳收益。因此，研究并准确刻画一种符合不完全喜爱风险投资者偏好的相依模型，是非常有意义的。

为了刻画这种"不完全喜爱风险"的偏好，Friedman 等[10] 提出了一类凹凸相间的效用函数，即在中间财富水平是凸函数，在高财富水平和低财富水平都是凹函数；Markowitz[11] 提出了 S 形效用函数；Kahnemann 等[12] 提出参考点相依效用函数；Bell[13] 提出了部分凹函数；等等。近年来，一些研究者采用对效用函数的导数增加条件的方法来表示这一类风险偏好，如：Leshno 等[7] 提出的 U_ε 效用函数类，Müller 等[14] 提出的 U_γ 效用函数类。

因此，为了建立适合"几乎喜爱风险"投资偏好的风险相依模型，本文在 Müller 等[14] 提出的分数阶随机占优的基础上，利用效用函数类 U_γ，建立了一种结构更灵活的过度相依模型，本文称之为分数阶过度相依。这种过度相依符合投资者几乎喜爱风险但在某些财富水平又厌恶风险的偏好。本文提出的分数阶过度相依与 Denuit 等[6] 在 2015 年利用效用函数 U_ε 提出的几乎过度相依不同，它可以作为一阶过度相依和二阶过度相依之间的一种连续化。

Wright[3] 在研究优化投资组合问题时，利用负一阶期望相依解释了为什么投资要注重分散性，得到了确保投资多元化的一个充分条件。Denuit 等[6] 利用几乎负一阶期望相依模型对此充分条件进行了推广。本文使用了分数阶过度相依模型，利用分数阶过度相依的等价刻画，进一步推广了 Wright[3] 和 Denuit 等[6] 得到的结论，为几乎喜爱风险但在某些财富水平又厌恶风险的决策者提供一个确保投资多元化的充分条件。

1　分数阶过度相依的定义

Müller 等[14] 对几乎喜爱风险这类风险偏好提供了一个基于 Neumann-Morgenstern 数值表示的定义。

定义 1　对任意两个资产回报 X 和 Y，几乎喜爱风险的投资者偏好 X 于 Y（记：$X \succ Y$），当且仅当对所有的效用函数 $u(\cdot) \in U_\gamma$，满足：

$$\mathrm{E}[u(X)] \geqslant \mathrm{E}[u(Y)],$$

其中：$U_\gamma=\{u\in U:0\leqslant\gamma u'(x)\leqslant u'(y),x\leqslant y\}$，$U$ 表示 $\mathbf{R}$ 上所有可微效用函数所构成的集合，$\gamma\in[0,1]$。

为了符合投资者几乎喜爱风险但在某些财富水平又厌恶风险的的偏好，本文扩展了已有的风险相依模型，提出了如下的分数阶过度相依概念。

定义 2 设随机变量 $X_i(i=1,2)$ 表示第 i 个投资的收益。如果对所有的效用函数 $u(\cdot)\in U_\gamma$，满足：

$$\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\leqslant 0 \tag{1}$$

则称随机变量 X_1 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2；若对所有的效用函数 $u(\cdot)\in U_\gamma$，满足：

$$\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\geqslant 0 \tag{2}$$

则称随机变量 X_1 是正 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2。其中：$\mathrm{Cov}(X,Y)$ 表示随机变量 X 和 Y 的协方差。

对任意的 $\gamma\in[0,1]$，因为关系式 $U_1\subseteq U_\gamma\subseteq U_0$ 成立，所以 $(1+\gamma)$ 阶过度相依是 1 阶过度相依与 2 阶过度相依之间的一个连续化。

2 分数阶过度相依的性质

首先，从定义 2 中可以得到两个相对简单且有用的性质：

性质 1 当 $0\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant 1$，若 X_1 是负(正)$(1+\gamma_2)$ 阶过度相依于 X_2，则 X_1 是负(正)$(1+\gamma_1)$ 阶过度相依于 X_2。

性质 2 若 X_1 是负(正)$(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2，则 $-X_1$ 是正(负)$(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2。

为了简便，定义函数：

$$F^*(x)=\mathrm{E}[X_1]P(X_2>x),G^*(x)=\mathrm{E}[X_1I(X_2>x)] \tag{3}$$

其中：$I(X_2>x)$ 为示性函数。

定理 1 对于给定的 $\gamma\in[0,1]$，以下三个结论是等价的：

a) X_1 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2；

b) 对于所有的效用函数 $u(\cdot)\in U_\gamma^*$，满足：

$$\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\leqslant 0,$$

其中：$U_\gamma^*=\left\{u:0\leqslant\gamma\dfrac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\dfrac{u(x_4)-u(x_3)}{x_4-x_3},\forall x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\right\}$；

c) 对任意的 $t\in\mathbf{R}$，

$$\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{4}$$

证明 首先证明 a)⇒b)。由于 U_γ^* 满足平移刻度变化不变性，并且 Müller 等[14]提出：对所有 $u(\cdot)\in U_\gamma^*$ 存在一个效用函数序列 $\{u_n:u_n\in U_\gamma,n=1,2,\cdots\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$，则 a)⇒b)。

其次证明 b)⇒c)。对于任意给定的 $t\in\mathbf{R}$，定义 $u_t(\cdot)$，使其一阶导数满足：

$$u'_t(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant t,\\ 1, & G^*\geqslant F^*,x>t,\\ \gamma, & G^*<F^*,x>t.\end{cases}$$

显然有 $u_t(x)\in U_\gamma^*$。不失一般性，假设 (X_1,X_2) 的联合密度函数为 $f(x_1,x_2)$，边际密度函数为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X_1u_t(X_2)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1u_t(x_2)f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x_2)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x_1f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\right]\mathrm{d}x_2\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x_2)\mathrm{d}G^*(x),\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[u_t(X_2)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x_2)\mathrm{E}[X_1]f(x_2)\mathrm{d}x_2=-\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x_2)\mathrm{d}F^*(x).$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X_1,u_t(X_2)]&=\mathrm{E}[X_1u_t(X_2)]-\mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[u_t(X_2)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}-u_t(x)\mathrm{d}G^*(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}-u_t(x)\mathrm{d}F^*(x)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}u_t(x)\mathrm{d}(F^*(x)-G^*(x)).\end{aligned}$$

再利用分部积分法，

$$\mathrm{Cov}[X_1,u_t(X_2)]=\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x.$$

若 $\mathrm{Cov}[X_1,u_t(X_2)]\leqslant 0$，则$\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant 0$。

最后证明 c)⇒a)。不失一般性，可以假设：$R=\sup_{x\in R}u'(x)\in(0,+\infty)$。对任意确定的数 $n\geqslant 2$，定义 $\varepsilon_n=2^{-n}$，K 为不等式$R(1-k\varepsilon_n)\geqslant\inf_{x\in R}u'(x)$成立时数 k 的最大值。将区间$(-\infty,+\infty)$分割为小区间$[z_k,z_{k+1}]$的并，即

$$z_0=-\infty,z_{K+1}=+\infty,z_k=\sup\{x:u'(x)\geqslant R(1-k\varepsilon_n)\},k=1,2,\cdots,K.$$

再定义：

$$m_k=\sup\{u'(x):z_{k-1}<x\leqslant z_k\}=R(1-(k-1)\varepsilon_n).$$

可以得到：

$$\gamma(m_k+R\varepsilon_n)\leqslant u'(x)\leqslant m_k,x\in(z_{k-1},z_k],k=1,2,\cdots,K+1.$$

再利用放缩法得到：

$$\sum_{k=1}^{K+1}\int_{z_{k-1}}^{z_k}[G^*(x)-F^*(x)]_+\,u'(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{K+1}m_k\int_{z_{k-1}}^{z_k}[G^*(x)-F^*(x)]_+\,\mathrm{d}x.$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]&=\mathrm{E}[X_1u(X_2)]-\mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[u(X_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}u'(x)[G^*(x)-F^*(x)]\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{K+1}\int_{z_{k-1}}^{z_k}u'(x)[G^*(x)-F^*(x)]_+\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{K+1}\int_{z_{k-1}}^{z_k}u'(x)[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{k=1}^{K+1}m_k\int_{z_{k-1}}^{z_k}[G^*(x)-F^*(x)]_+\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{K+1}(m_k+R\varepsilon_n)\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $T_k=\int_{z_{k-1}}^{z_k}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x$，$c_k=\int_{z_{k-1}}^{z_k}[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x$. 可以得到：

$$\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\leqslant\sum_{k=1}^{K+1}m_kT_k-\gamma R\varepsilon_n\sum_{k=1}^{K+1}c_k.$$

对于任意的 $k=1,2,\cdots,K+1$，注意到：

$$\sum_{i=1}^{k}T_i=\int_{z_0}^{z_k}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x.$$

根据条件 c)得到 $\sum_{i=1}^{K+1}T_i\leqslant 0$。又因为 m_k 是一个非负递减序列，因此有$\sum_{k=1}^{K+1}T_km_k\leqslant 0$。 即

$$\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\leqslant-\gamma R\varepsilon_n\sum_{k=1}^{K+1}c_k\leqslant-\gamma R\varepsilon_n\int_{-\infty}^{+\infty}[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\to 0$。

证毕。

注：定义 2 中，效用函数可微的条件不是必不可少的。U_γ 可以用 U_γ^* 来替代。

在实际应用中，很难确定各个投资者效用函数的显性表达式。有了定理 1 这一等价刻画，验证资产之间是否具有分数阶过度相依只需要知道它们的分布。通过一个简单例子用以说明等价性质在实际判定过度相依性中的有效性。

例 1 假设 $X_i(i=1,2)$ 为资产 i 的投资回报。(X_1,X_2) 的联合分布见表 1。通过计算可以得到：

表 1 资产 X_1 和 X_2 的联合分布

(X_1,X_2)	联合概率 P
(1, 2)	1/2
(−2,1)	1/10
(−3/4, 3)	2/5

$$G^*(x)=\mathrm{E}(X_1\mid X_2>x)P(X_2>x)=\begin{cases}0.2, & 1\leqslant x<2,\\ -0.3, & 2\leqslant x<3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

和 $F^*(x)\equiv 0$。因此，

$$G^*(x)-F^*(x)=\begin{cases}0.2, & 1\leqslant x<2,\\ -0.3, & 2\leqslant x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由定理 1 可知：X_1 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2，当且仅当 $2/3\leqslant\gamma\leqslant 1$。

由性质 2 可知：正、负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依之间具有对偶性，因此正 $(1+\gamma)$ 阶过度相依也存在着一个基于分布函数的等价刻画。

定理 2 对于给定 $\gamma\in[0,1]$，以下三个结论是等价的：

a) X_1 是正 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2；

b) 对于所有的效用函数 $u(x)\in U_\gamma^*$，$\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\geqslant 0$；

c) 对任意的 $t\in\mathbf{R}$，

$$\int_t^{+\infty}\gamma\,[G^*(x)-F^*(x)]_+-[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\geqslant 0 \tag{5}$$

证明 定理 2 的证明过程类似于定理 1，略。

定理 3 假设 X_2 是离散型随机变量，其可能的实现值是 $x_1<x_2<\cdots<x_n$。则 X_1 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2，当且仅当对所有的 x_i，$i=1,2,\cdots,n$，

$$\int_{x_i}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{6}$$

证明 必要性显然成立。因此只需要证明其充分性。为此，进行分类讨论：

a) 当 $t\geqslant x_n$ 时，由 $G^*(t)=F^*(t)=0$，可得 $\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x=0$。

b) 当 $t\leqslant x_1$ 时，由于 $G^*(t)=F^*(t)=\mathrm{E}(X_1)$，且

$$\begin{aligned}&\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\\ &=\int_t^{x1}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x+\\ &\quad\int_{x1}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\\ &=\int_{x1}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant 0.\end{aligned}$$

c) 当 $x_i\leqslant t<x_{i+1}$，$1\leqslant i<n$ 时，$G^*(x_i)=G^*(s)$，$F^*(x_i)=F^*(s)$，其中 $x_i\leqslant s<x_{i+1}$。若 $G^*(x_i)-F^*(x_i)\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}&\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_{xi}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant 0.\end{aligned}$$

若 $G^*(x_i)-F^*(x_i)\leqslant 0$，则

$$\begin{aligned}&\int_t^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_{xi+1}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma\,[F^*(x)-G^*(x)]_+\,\mathrm{d}x\leqslant 0.\end{aligned}$$

证毕。

定理 4　假设 X_1 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2。对任意的递增且凸函数 $h_1(\cdot)$，X_1 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 $h_1(X_2)$。对任意的常数 $a \geqslant 0$，递减函数 $h_2(\cdot)$，$aX_1+h_2(X_2)$ 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 $h_1(X_2)$。

证明　令 $\varphi(t)=[\mathrm{E}(X_1 \mid X_2>t)-\mathrm{E}(X_1)]_+-\gamma[\mathrm{E}(X_1)-\mathrm{E}(X_1 \mid X_2>t)]_+$，则

$$\varphi(h_1^{-1}(t))=[\mathrm{E}(X_1 \mid h_1(X_2)>t)-\mathrm{E}(X_1)]_+-\gamma[\mathrm{E}(X_1)-\mathrm{E}(X_1 \mid h_1(X_2)>t)]_+.$$

由式(4)可得：对任意的 $x \in \mathbf{R}$，

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) P(X_2>t) \mathrm{d} t \leqslant 0.$$

因为 $h_1(\cdot)$ 是递增的凸函数，所以 $h_1{}'(t) \geqslant 0$ 且非减。对任意的 $x \in \mathbf{R}$，

$$\int_{h_1^{-1}(x)}^{+\infty} \varphi(t) P(X_2>t) h_1{}'(t) \mathrm{d} t \leqslant 0.$$

令 $t=h_1^{-1}(s)$，得到：

$$\begin{aligned}\int_x^{\infty} \varphi(h_1^{-1}(s)) P(h_1(X_2)>s) \mathrm{d} s &=\int_x^{\infty} \varphi(h_1^{-1}(s)) P(X_2>h_1^{-1}(s)) \mathrm{d} s \\ &=\int_{h_1^{-1}(x)}^{\infty} \varphi(t) P(X_2>t) h_1{}'(t) \mathrm{d} t \leqslant 0.\end{aligned}$$

因此 X_1 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 $h_1(X_2)$。

令 $h_2(\cdot)$ 为递减函数，对所有的 $u(\cdot) \in U_\gamma$，

$$\operatorname{Cov}[X_1, u(h_1(X_2))] \leqslant 0, \operatorname{Cov}[h_2(X_2), u(h_1(X_2))] \leqslant 0.$$

则

$$\operatorname{Cov}[aX_1+h_2(X_2), u(h_1(X_2))]=a \operatorname{Cov}[X_1, u(h_1(X_2))]+\operatorname{Cov}[h_2(X_2), u(h_1(X_2))] \leqslant 0.$$

即 $aX_1+h_2(X_2)$ 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 $h_1(X_2)$。

证毕。

3　分数阶过度相依与几乎一阶过度相依之间的关系

Leshno 等[7]在定义几乎随机占优法则时考虑效用函数类 U_1^{ε}。对 $\forall \varepsilon \in(0,1/2)$，

$$U_1^{\varepsilon}=\left\{u \in U_0 \mid u'(x) \leqslant \inf\left\{u'(x)\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)\right\}\right\} \tag{7}$$

Denuit 等[6]基于效用函数类 U_1^{ε}，引出了几乎一阶过度相依概念。

定义 3　如果对所有的效用函数 $u(\cdot) \in U_1^{\varepsilon}$，满足：$\operatorname{Cov}[X_1, u(X_2)] \leqslant 0$，则称 X_1 是几乎负一阶过度相依于 X_2。

Denuit 等[6]证明了式(8)是满足几乎负一阶过度相依性的一个充分条件。下文将进一步证明式(8)是几乎负一阶过度相依性的一个充分必要条件。

定理 5　对任意给定的 $\varepsilon \in(0,1/2)$，X_1 是几乎负一阶过度相依于 X_2，当且仅当

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+ \mathrm{d} x \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty}|G^*(x)-F^*(x)| \mathrm{d} x \tag{8}$$

证明

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}[X_1, u(X_2)] &=\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)] u'(x) \mathrm{d} x \\ &\leqslant \sup\{u'(x)\} \int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+ \mathrm{d} x-\inf\{u'(x)\} \int_{-\infty}^{+\infty}[F^*(x)-G^*(x)]_+ \mathrm{d} x \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \inf\{u'(x)\}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+ \mathrm{d} x-\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty}|G^*(x)-F^*(x)| \mathrm{d} x\right).\end{aligned}$$

因此，若不等式(8)成立，则 $\operatorname{Cov}[X_1, u(X_2)] \leqslant 0$。定理 5 的充分性得证。

令 $\gamma=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$，定义 $u(\cdot)$ 使其一阶导数满足：

$$u'(x)=\begin{cases}1, & G^*\geqslant F^*,\\ \gamma, & G^*<F^*.\end{cases}$$

显然有 $u(x)\in U_\varepsilon^1$。因为,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]u'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+-\gamma[F^*(x)-G^*(x)]_+\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1-\varepsilon}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+\mathrm{d}x-\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}|G^*(x)-F^*(x)|\mathrm{d}x\Big],\end{aligned}$$

所以,若 $\mathrm{Cov}[X_1,u(X_2)]\leqslant 0$,则不等式(8)成立。定理 5 的必要性得证。

证毕。

推论 1 若 X_1 是负$(1+\gamma)$阶过度相依于 X_2,则 X_1 是几乎负一阶过度相依于 X_2。但反之不成立。

证明 由定理 1 可得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+\mathrm{d}x\leqslant\frac{\gamma}{1+\gamma}\int_{-\infty}^{+\infty}|G^*(x)-F^*(x)|\mathrm{d}x.$$

令 $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{1+\gamma}$,由定理 5 可知:$X_1$ 是几乎负一阶过度相依于 X_2。

下面证明反之不成立。

本文构造了两个随机变量 X_1 和 X_2,其联合分布如表 2。

表 2 X_1 和 X_2 的联合分布

(X_1,X_2)	联合概率 P
$(1,-2)$	2/5
$(1,6)$	1/10
$(-2,-4)$	1/10
$(-3/4,3)$	2/5

通过计算得到:

$$G^*(x)=\mathrm{E}(X_1\mid X_2>x)P(X_2>x)=\begin{cases}0.1, & 3\leqslant x<6,\\ -0.2, & -2\leqslant x<3,\\ 0.2, & -4\leqslant x<-2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

和 $F^*(x)\equiv 0$。因此,

$$G^*(x)-F^*(x)=\begin{cases}0.2, & -4\leqslant x<-2,\\ -0.2, & -2\leqslant x<3,\\ 0.1, & 3\leqslant x<6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $\varepsilon\in(7/17,1/2)$,不等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}|G^*(x)-F^*(x)|\mathrm{d}x$$

成立。由定理 5 可知:X_1 是几乎负一阶过度相依于 X_2。但同时不等式

$$\int_{3}^{+\infty}[G^*(x)-F^*(x)]_+\mathrm{d}x\geqslant\int_{3}^{+\infty}[F^*(x)-G^*(x)]_+\mathrm{d}x$$

成立。由定理 1 得:对任意的 $\gamma\in(0,1)$,X_1 不是负$(1+\gamma)$阶过度相依于 X_2。

证毕。

4 在投资多元化问题中的应用

本文考虑两个资产或金融衍生品的投资组合问题。用 $X_i(i=1,2)$ 表示第 i 个投资产品的最终回报率。用 λ 表示对 X_1 的投资比例。假设初始用于投资的财富等于 1,投资者是风险喜爱的。基于 Von Neumann 等[15]的期望效用理论,投资者最终财富的随机优化模型为:

$$\max\mathrm{E}[u(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)] \tag{9}$$

假设 λ^* 为模型(9)的最优唯一解。Wright[3]针对厌恶风险的投资者研究了投资组合中的分散性问题,得到了确保投资多元化的一个充分条件。Denuit 等[6]把厌恶风险投资者的效用函数限制到 $U_2^{*}=\{u(x)\in U\mid$

$u''(x) \leqslant \inf u''(x)(1/\varepsilon - 1) \leqslant 0\}$，对投资多元化问题做了进一步的研究，并推广了 Wright[3] 得到的结论。本文利用分数阶过度相依模型，把效用函数限制到 $U_\gamma^1 = \{u \mid u'(x) > 0, u''(x) \leqslant 0, u''(y) \leqslant \gamma u''(x), x \leqslant y\}$，通过研究投资收益 (X_1, X_2) 的联合分布，也得到了一个确保投资多元化的充分条件。

4.1　确保投资多元化的条件

定理 6　设 X_1 和 X_2 是两个重要资产或金融衍生品，满足 $\mathrm{E}[X_1] \geqslant \mathrm{E}[X_2]$。若 X_1 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2，或 $X_1 - X_2$ 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2，则对效用函数 $u(\cdot) \in U_\gamma^1$ 的投资者，$\lambda^* > 0$。

证明　令 $L(\lambda) = \mathrm{E}[u(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)]$。对目标函数一阶求导得：

$$L'(\lambda) = 0,$$

即：

$$\mathrm{E}[(X_1 - X_2)u'(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)] = 0.$$

假设 λ^* 为其唯一解。$\lambda^* > 0$，当且仅当 $L'(0) > 0$。此时，

$$\mathrm{E}[(X_1 - X_2)u'(X_2)] > 0,$$

即：

$$\mathrm{E}[X_1 u'(X_2)] > \mathrm{E}[X_2 u'(X_2)] \tag{10}$$

再令 $t(x) = -u'(x)$，则 $t(x) \leqslant 0$ 且 $t(x) \in U_\gamma$。式(10)转化为：

$$\mathrm{E}[X_1 t(X_2)] < \mathrm{E}[X_2 t(X_2)] \tag{11}$$

因为，

$$\mathrm{Cov}[X_1, t(X_2)] = \mathrm{E}[X_1 t(X_2)] - \mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[t(X_2)],$$
$$\mathrm{Cov}[X_2, t(X_2)] = \mathrm{E}[X_2 t(X_2)] - \mathrm{E}[X_2]\mathrm{E}[t(X_2)],$$

所以，式(11)进一步转化为：

$$\mathrm{Cov}[X_1, t(X_2)] + \mathrm{E}[X_1]\mathrm{E}[t(X_2)] < \mathrm{Cov}[X_2, t(X_2)] + \mathrm{E}[X_2]\mathrm{E}[t(X_2)]$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Cov}[X_1, t(X_2)] < \mathrm{Cov}[X_2, t(X_2)] + (\mathrm{E}[X_2] - \mathrm{E}[X_1])\mathrm{E}[t(X_2)].$$

因为 X_1 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2 且 $t(x) \in U_\gamma$，所以 $\mathrm{Cov}[X_1, t(X_2)] < 0$；又因为 $t(x)$ 是非减函数，所以 $\mathrm{Cov}[X_2, t(X_2)] \geqslant 0$；同时，因为 $t(x) \leqslant 0$ 且 $\mathrm{E}[X_1] \geqslant \mathrm{E}[X_2]$，所以 $(\mathrm{E}[X_1] - \mathrm{E}[X_2])\mathrm{E}[t(X_2)] \leqslant 0$。

同理，因为，

$$\mathrm{Cov}[X_1 - X_2, t(X_2)] = \mathrm{E}[(X_1 - X_2)t(X_2)] - \mathrm{E}[X_1 - X_2]\mathrm{E}[t(X_2)],$$

所以，式(10)转化为：

$$-\mathrm{Cov}[X_1 - X_2, t(X_2)] - (\mathrm{E}[X_1] - \mathrm{E}[X_2])\mathrm{E}[t(X_2)] \geqslant 0.$$

因为 $X_1 - X_2$ 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2，所以 $\mathrm{Cov}[X_1 - X_2, t(X_2)] < 0$。

证毕。

定理 6 是确保投资多元化的一个充分条件，它推广了 Wright[3] 和 Denuit 等[6] 得到的结论，并进一步得到了推论 2。

推论 2　设 X_1 和 X_2 是两个重要资产或金融衍生品，满足 $\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_2]$。若 X_1 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2 且 X_2 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_1，或 $X_1 - X_2$ 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2 且 $X_2 - X_1$ 是严格的负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_1，则对效用函数 $u(\cdot) \in U_\gamma^1$ 的投资者，$0 < \lambda^* < 1$。

证明　通过两次使用定理 6 的证明方法，其中将 λ^* 倍的初始财产投给 X_1，且将 $(1-\lambda^*)$ 倍的初始财产投给 X_2。经过简单计算得到 $\lambda^* > 0$ 且 $1 - \lambda^* > 0$。

4.2　算例

本文选取 2013—2015 年沪深 300 指数及黄金指数的年收益率值，利用 $(1+\gamma)$ 阶过度相依模型，针对投资多元化问题，提供了一个算例。为了方便计算，用经验分布估计将这两个指数的年收益率的联合分布。投资者的效用函数 $u(\cdot)$ 的一阶导数满足：

$$u(x) = \begin{cases} 1/2\gamma, & x \leqslant 0, \\ 1/x, & x > 0, \end{cases}$$

即 $u(x) \in U_\gamma^1$。对具有上述 $u(x)$ 的投资者，最优解 λ^* 满足：

$$\mathrm{E}[u(\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2)] = \max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}\mathrm{E}[u(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)],$$

即：

$$\mathrm{E}[(X_1 - X_2)u(\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2)] \tag{12}$$

假设 X_1 为沪深 300 指数的年收益率，X_2 为黄金指数的年收益率，(X_1, X_2) 的联合分布见表 3。

表 3 年收益率 X_1 和 X_2 的联合分布

(X_1, X_2)	联合概率 P
(51.66, −1.50)	1/3
(5.58, −10.46)	1/3
(−11.28, 8.48)	1/3

通过计算可得：

$$G^*(x) = \mathrm{E}(X_1 \mid X_2 > x)P(X_2 > x) = \begin{cases} 15.32, & x < -10.46, \\ 13.46, & -10.46 \leqslant x < -1.50, \\ -3.76, & -1.50 \leqslant x < 8.48, \\ 0, & x \geqslant 8.48, \end{cases}$$

以及

$$F^*(x) = \mathrm{E}(X_1)P(X_2 > x) = \begin{cases} 15.32, & x < -10.46, \\ 10.213, & -10.46 \leqslant x < -1.50, \\ 5.107, & -1.50 \leqslant x < 8.48, \\ 0, & x \geqslant 8.48. \end{cases}$$

因此，

$$G^*(x) - F^*(x) = \begin{cases} 0, & x < -10.46, \\ 3.247, & -10.46 \leqslant x < -1.50, \\ -8.867, & -1.50 \leqslant x < 8.48, \\ 0, & x \geqslant 8.48. \end{cases}$$

由定理 1 可知：当且仅当 $29.093/88.493 \leqslant \gamma \leqslant 1$，$X_1$ 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_2。同时 X_2 是负 $(1+\gamma)$ 阶过度相依于 X_1。

最终财富的联合分布见表 4。通过分类讨论 λ^*，求得式(12)的解。

表 4 最终财富 $\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2$ 的联合分布

(X_1, X_2)	$\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2$	联合概率 P
(51.66, −1.50)	$53.16\lambda^* - 1.50$	1/3
(5.58, −10.46)	$16.04\lambda^* - 10.46$	1/3
(−11.28, 8.48)	$8.48 - 19.76\lambda^*$	1/3

a) 当 $0 \leqslant \lambda^* < 1.50/53.16$ 时，

$$\mathrm{E}[(X_1 - X_2)u'(\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2)] = \frac{34.6}{3\gamma} - \frac{19.76}{3(8.48 - 19.76\lambda^*)} = 0.$$

经计算得 $\lambda^* \notin [0, 1.50/53.16)$，式(12)无解。

b) 当 $1.50/53.16 \leqslant \lambda^* < 8.48/19.76$ 时，

$$\mathrm{E}[(X_1 - X_2)u'(\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2)] = \frac{17.72}{53.16\lambda^* - 1.50} + \frac{8.02}{3\gamma} - \frac{19.76}{3(8.48 - 19.76\lambda^*)} = 0.$$

经计算得 $\lambda^* \notin [1.50/53.16, 8.48/19.76)$，式(12)无解。

c) 当 $10.46/16.04 < \lambda^* \leqslant 1$ 时，

$$\mathrm{E}[(X_1 - X_2)u'(\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2)] = \frac{17.72}{53.16\lambda^* - 1.50} + \frac{16.04}{3(16.04\lambda^* - 10.46)} - \frac{9.88}{3\gamma} = 0.$$

经计算得 $\lambda^* \notin (10.46/16.04, 1]$，式(12)无解。

d) 当 $8.48/19.76 \leqslant \lambda^* \leqslant 10.46/16.04$ 时，

$$\mathrm{E}[(X_1 - X_2)u'(\lambda^* X_1 + (1-\lambda^*)X_2)] = \frac{17.72}{53.16\lambda^* - 1.50} + \frac{16.04}{3(16.04\lambda^* - 10.46)} - \frac{9.88}{3\gamma} = 0.$$

即：

$$\lambda^{*}=(51.66\gamma+2.79)/98.8776\in[8.48/19.76,10.46/16.04].$$

通过上述讨论，得式(12)的最优解为 $\lambda^{*}=(51.66\gamma+2.79)/98.8776$。即具有上述 $u(x)$ 的投资者会进行分散投资，其中在沪深 300 指数中投入 $(51.66\gamma+2.79)/98.8776$。

5 结　论

为了符合投资者几乎喜爱风险但在某些财富水平又厌恶风险的风险偏好，本文把原先的过度相依推广到了 $(1+\gamma)$ 阶的过度相依，起到了类似于 Wright[3] 提出的一阶过度相依的作用。本文从四个方面对分数阶过度相依理论进行了研究，并得到如下主要结论：

a) 本文给分数阶过度相依建立了一个基于分布函数的等价刻画。即使无法获知投资者的效用函数，也能确定资产之间是否具有分数阶相依关系。

b) 本文进一步完善了 Denuit 等[6] 提出的几乎负一阶过度相依的充分条件；并论证了 Denuit 等[6] 定义的几乎一阶过度相依与本文定义的分数阶过度相依是两个不同的概念。

c) 在金融市场中，金融衍生品常表示为金融资产的一个单调递增凸性变换。本文证明了分数阶过度相依在单调递增凸性变换下保持不变，因此分数阶过度相依模型在研究金融衍生品及其投资策略的过程中具有一定的优越性。

d) 本文直接使用 $\mathrm{Cov}(X_1,u(X_2))$ 的符号来定义分数阶过度相依，通过限制效用函数，得到了一个确保投资多元化的充分条件。

本文介绍的是 $0\leqslant\gamma\leqslant 1$ 时负(正)$(1+\gamma)$ 阶过度相依及其性质。对于 $\gamma>1$ 的高分数阶负(正)过度相依是今后研究的一个问题，如：如何合理地引入介于二阶与三阶过度相依之间的分数阶过度相依等。

参考文献：

[1] 吴永，何霞，郑文虎. 我国金融行业间风险相依性研究：基于隐马尔科夫混合 Copula 模型[J]. 重庆理工大学学报(自然科学)，2019，33(8)：203-212.

[2] 秦柯，李力. 中国汇市，股市和债市相依结构实证研究：基于资本账户开放加快推进前后的对比分析[J].金融与经济，2019(7)：11-16.

[3] Wright R. Expectation dependence of random variables，with an application in portfolio theory[J].Theory and Decision，1987，22(2)：111-124.

[4] Li J Y. The demand for a risky asset in the presence of a background risk[J]. Journal of Economic Theory，2011，146(1)：372-391.

[5] CaballéJ，Pomansky A. Mixed risk aversion[J]. Journal of Economic Theory，1996，71(2)：485-513.

[6] Denuit M M，Huang R J，Tzeng L Y. Almost expectation and excess dependence notions[J].Theory and Decision，2015，79(3)：375-401.

[7] Leshno M，Levy H. Preferred by " all" and preferred by " most" decision makers：almost stochastic dominance[J]. Management science，2002，48(8)：1074-1085.

[8] Henry ChiuW.Financial risk taking in the presence of correlated non-financial background risk[J].Journal of Mathematical Economics，2020，88：167-179.

[9] Hadar J，Seo T K. Asset proportions in optimal portfolios[J]. The Review of Economic Studies，1988，55(3)：459-468.

[10] Friedman M，Savage L J. The utility analysis of choices involving risk[J]. Journal of Political Economy，1948，56(4)：279-304.

[11] Markowitz H. The utility of wealth[J]. Journal of Political Economy，1952，60(2)：151-158.

[12] Kahneman D，TverskyA. Prospect Theory：An analysis of decision under risk[J]. Econometrica，1979，47(2)：263-291.

[13] Bell D E.The value of pre-decision side bets for utility maximizers[J]. Management Science，1988(6)，34：797-800.

[14] Müller A，Scarsini M，Tsetlin I，et al. Between first-and second-order stochastic dominance[J]. Management Science，2017，63(9)：2933-2947.

[15] Von Neumann J，Morgenstern O. Theory of games and economic behavior[M].2nd. Princeton NJ：Princeton University Press，1947：25-48.

(责任编辑：康　锋)