



一类浮游动植物数学模型的斑图形成分析

陈毅敏¹, 李 旭²

(1. 浙江理工大学理学院, 杭州 310018; 2. 浙江理工大学科技与艺术学院, 浙江绍兴 312369)

摘 要: 针对一类具有捕食与被捕食关系的浮游动植物反应扩散模型, 为研究其在二维空间区域上斑图的存在性, 利用偏微分方程线性稳定性理论, 通过对常数平衡解的稳定性研究, 得到了该模型存在斑图的充分条件。结果表明: 在所研究的水域内, 浮游动物具有很强的再生能力, 共存定态的浮游动植物密度均与空间位置无关且具有持久性。因而, 如果要使得平衡状态的浮游动植物密度与空间位置有关, 必须使得捕食者浮游动物具有相对小的初始密度。最后, 对给定的系统参数进行了数值分析, 数值分析结果与理论分析一致。研究成果可为保持局部水域生态系统的平衡提供一定的理论依据。

关键词: 浮游动植物; 反应扩散模型; 斑图; 常数平衡解; 稳定性; 生态平衡; 二维空间

中图分类号: O193

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2020) 05-0730-07

Analysis on pattern formation of a zooplankton-phytoplankton mathematical model

CHEN Yimin¹, LI Xu²

(1. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. Keyi College of Zhejiang Sci-Tech University, Shaoxing 312369, China)

Abstract: For a reaction diffusion model of Zooplankton-Phytoplankton with predator-prey relationship, in order to study the existence of patterns in two-dimensional space, the linear stability theory of partial differential equations was utilized to study the stability of constant equilibrium solution so as to gain the sufficient conditions for patterns in the model. The results show that the zooplankton has strong reproduction ability in the studied area, and the density of zooplankton and phytoplankton which coexist in a steady state has no relation with spatial position and is of persistence. Consequently, to make the density of zooplankton and phytoplankton in a steady state related to the spatial position, the predator zooplankton must keep a relatively small initial density. Finally, the numerical analysis of the given system parameters was carried out. The conclusion of the numerical analysis is consistent with the theoretical analysis. The research results can provide a theoretical basis for maintaining the ecological balance of local water system.

Key words: zooplankton-phytoplankton; reaction diffusion model; pattern; constant steady state solution; stability; ecological balance; two-dimensional space

收稿日期: 2019-11-02 网络出版日期: 2020-06-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(11671359); 浙江理工大学科技与艺术学院重点项目(KY2019001)

作者简介: 陈毅敏(1995-), 女, 湖北枣阳人, 硕士研究生, 主要从事微分方程与动力系统方面的研究。

通信作者: 李 旭, E-mail: lixu@zstu.edu.cn

0 引言

有数据显示,地球上水资源的覆盖率大约为 71%。每年水域生态系统给人类提供的大量自然资源,为人类带来了巨大的财富^[1]。浮游生物作为水域中其它生物生产力的基础,对调节水域生态系统的平衡起到极其重要的作用。浮游生物主要包括浮游植物与浮游动物两大类。浮游植物作为食物链中底层的一种生物,通常起到为上一级的水域生物提供能量的作用;而浮游动物通常以浮游植物为食,能够对浮游植物的数量起到一定的控制作用^[2]。浮游动物与浮游植物之间存在捕食与被捕食的关系,数学上一般利用捕食与被捕食的模型来描述水域中浮游生物之间的相互作用^[3]。

生物种群的斑图问题是生态学的一个热点问题。斑图是指在空间或时间上具有某种规律性的非均匀宏观结构^[4]。自然界中存在各式各样的斑图现象,例如,流体中由于对流引起的斑图、气体放电中的斑图以及动物体表的花纹、细菌群体中由竞争合作行为引起的种群密度增长现象等。国内外学者对斑图问题做了大量研究。早在 1952 年,为了揭示斑图的本质规律,英国数学家图灵(A. M. Turing)转向生物学领域进行研究,利用反应扩散模型来说明“扩散驱动不稳定性”是斑图形成的原因之一^[5]。在 1993 年时,Pearson^[6]给出了一个反应扩散模型,展示了各种不规则的斑图。

为了进一步认识生态系统中种群入侵及增长等问题,生物学与应用数学领域的学者通过数学模型来研究斑图现象。Potapov 等^[7]针对种群密度大的情况,采用趋化性模型研究了具有趋化现象的斑图形成现象。Ma 等^[8]在带有 Neumann 边界条件的有界区域内,研究了具有体积填充效应的反应扩散趋化模型的全局分支现象以及定态解的稳定性问题。Li 等^[9]通过建立具有 Holling-II 型响应功能的简单浮游动植物系统,研究了浮游植物产生的毒素以及提供给浮游植物的避难所对水域中浮游动植物相互作用的影响。张真真等^[10]提出了一种模型,以研究对浮游动植物的相互作用,并分析了模型中平衡点的存在性问题以及平衡点稳定的充分条件。Zhao 等^[11]基于非线性常微分方程,研究了一类具有非自治密度依赖的有毒浮游动植物系统的动力学性质,得到了系统正周期解存在性的充分条件。白云霄^[12]采用线性分析与相平面分析相结合的方法,研究了具有 Allee 效应的捕食与被捕食模型,得到不同的斑图结构。高海燕^[13]讨论了趋化模型在二维空间中的局部分支解的存在性。

本文在二维空间区域上,研究一类刻画局部水域浮游动植物动力学行为的反应扩散模型斑图的存在性,通过分析常数平衡解的稳定性,获得产生斑图(即浮游动植物的数量依赖空间位置的平衡态)的充分条件,进而揭示浮游动植物密度结构之间的相互依赖性及其对初始密度与生存空间的依赖性,为保持局部水域的生态平衡提供理论依据。

1 模型介绍

考虑在局部水域生态系统中具有捕食与被捕食关系的一类浮游动植物反应扩散模型^[14]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + r_1 u(1-u) - \frac{u^2 v}{a^2 + u^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D \Delta v + r_2 v \left(\frac{u^2}{a^2 + u^2} - \mu \right) \end{cases}, s \in \Omega, t > 0 \quad (1)$$

且该模型服从 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial \Omega} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \quad (2)$$

其中: $s = (x, y)$; $\Omega = [0, l_x] \times [0, l_y]$, l_x 与 l_y 是正实数; \mathbf{v} 是 $\partial \Omega$ (表示 Ω 的边界) 光滑处的向外单位法线向量; $u(s, t)$, $v(s, t)$ 分别表示被捕食者浮游植物和捕食者浮游动物在空间 s 处时间 t 的密度; $D > 0$ 表示 $v(s, t)$ 的扩散系数; $r_1 > 0$ 是 $u(s, t)$ 的内部净增长率; $r_2 > 0$ 是 $v(s, t)$ 的内部净增长率; $\mu \in \left(0, \frac{1}{1+a^2}\right)$

表示环境对 $v(s, t)$ 的最大承载量; $a > 1$ 且 $\frac{1}{a^2}$ 是浮游动物的被捕食率。 Δ 是二维 Laplace 算子, 即 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} +$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。 本文将通过分析系统(1)–(2)常数平衡解的稳定性, 研究其斑图的存在性条件, 进而分析浮游动植物的生存

状态对扩散系数、净增长率、环境的最大承载量、捕食率以及初始密度的依赖性。

2 斑图的存在性

首先给出二维空间 Ω 上满足 Neumann 边界条件的负 Laplace 算子特征值问题的性质,该性质是后面的研究的基础。

引理 1 特征值问题^[13]

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \lambda u \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(l_x, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, l_y) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

有特征值

$$\lambda = \lambda_{mn} = \lambda_m + \lambda_n = \left(\frac{m\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2, m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

且与之相对应的特征函数为

$$\varphi_{mn}(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{l_y}\right), m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

通常称 $\sqrt{\lambda_{mn}}$ 为波数,记为 k_{mn} ; $\varphi_{mn}(x, y)$ 为对应于波数 k_{mn} 的模式。

用通常的分离变量法很容易证明该引理,此处省略其证明过程。系统(1)–(2)的常数平衡解(即不依赖于空间变量 x 及 y 的定态解) (\bar{u}, \bar{v}) 满足下面常微分方程组:

$$\begin{cases} f(\bar{u}, \bar{v}) = r_1 \bar{u}(1 - \bar{u}) - \frac{\bar{u}^2 \bar{v}}{a^2 + \bar{u}^2} = 0 \\ g(\bar{u}, \bar{v}) = r_2 \bar{v} \left(\frac{\bar{u}^2}{a^2 + \bar{u}^2} - \mu \right) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

方程组(6)又称为系统(1)–(2)的反应系统。通过简单计算知,方程组(6)有四个解:

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 0), P_3 = (u_0, v_0), P_4 = (u_1, v_1).$$

其中:

$$u_0 = \sqrt{\frac{a^2 \mu}{1 - \mu}}, v_0 = \frac{r_1 \sqrt{\frac{a^2 \mu}{1 - \mu}} \left(1 - \sqrt{\frac{a^2 \mu}{1 - \mu}}\right)}{\mu},$$

及

$$u_1 = -\sqrt{\frac{a^2 \mu}{1 - \mu}} < 0, v_1 = \frac{-r_1 \sqrt{\frac{a^2 \mu}{1 - \mu}} \left(1 - \sqrt{\frac{a^2 \mu}{1 - \mu}}\right)}{\mu} < 0.$$

根据生物学含义, u 和 v 的值不可能小于 0, 所以 P_4 没有意义。因而,只需要讨论 P_1 , P_2 和 P_3 的稳定性,进而获得斑图的存在性条件。本文有如下结论:

定理 1 对于系统(1)–(2),下列叙述是正确的:

a) 平衡点 $P_1 = (0, 0)$ 总是不稳定的。让系统参数 D, r_1, r_2, a, μ 以及 l_x, l_y 固定,如果存在正常数 m, n 使得不等式

$$0 < k_{mn} < \sqrt{r_1} \quad (7)$$

成立,则可以在 P_1 处分支出斑图。

b) 平衡点 $P_2 = (1, 0)$ 总是不稳定的。让系统参数 D, r_1, r_2, a, μ 以及 l_x, l_y 固定,如果存在正常数 m, n 使得不等式

$$0 < k_{mn} < \sqrt{\frac{r_2}{D} \left(\frac{1}{1 + a^2} - \mu \right)} \quad (8)$$

成立,则能在 P_2 处分支出斑图。不等式(7)–(8)中的 k_{mn} 称为不稳定波数。

c) 平衡点 $P_3 = (u_0, v_0)$ 总是稳定的。因此,在 P_3 处不会分支出斑图。

证明 利用扰动方法证明,令

$$u = \bar{u} + U, v = \bar{v} + V,$$

将上式代入系统(1)–(2),则可得在常数平衡解 (\bar{u}, \bar{v}) 处的线性化系统:

$$\begin{cases} \mathbf{W}_t = \mathbf{Q}\mathbf{W}, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \nu} = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \setminus \{\text{非光滑点}\}, t > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{其中: } \mathbf{W} = (U, V)^T, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \Delta + r_1(1 - 2\bar{u}) - \frac{2a^2\bar{u}\bar{v}}{(a^2 + \bar{u}^2)^2} & -\frac{\bar{u}^2}{a^2 + \bar{u}^2} \\ r_2 \frac{2a^2\bar{u}\bar{v}}{(a^2 + \bar{u}^2)^2} & D\Delta + r_2\left(\frac{\bar{u}^2}{a^2 + \bar{u}^2} - \mu\right) \end{pmatrix}.$$

设系统(9)解的形式为

$$\mathbf{W} = \sum_{m,n} \mathbf{A}(m, n) e^{\sigma t} \varphi_{mn}(x, y),$$

其中:二维向量 $\mathbf{A}(m, n)$ 称为 Fourier 系数; σ 为扰动 (U, V) 关于时间的增长率,依赖于 λ_{mn} , $m, n = 0, 1, 2, \dots$, 为特征矩阵 \mathbf{Q} 的特征根。下文中的 λ_{mn} 均由式(4)定义。

在 $P_1 = (0, 0)$ 处,特征矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_{mn} + r_1 & 0 \\ 0 & -D\lambda_{mn} - r_2\mu \end{pmatrix}, m, n = 0, 1, 2, \dots.$$

显然, \mathbf{Q} 有特征根

$$\sigma_{mn}^1 = r_1 - \lambda_{mn}, \sigma_{mn}^2 = -D\lambda_{mn} - r_2\mu < 0, m, n = 0, 1, 2, \dots.$$

易见, $\sigma_{00}^1 = r_1 > 0$ 。因此,结论 a) 得证。

在 $P_2 = (1, 0)$ 处,特征矩阵为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_{mn} - r_1 & -\frac{1}{1 + a^2} \\ 0 & -D\lambda_{mn} + r_2\left(\frac{1}{1 + a^2} - \mu\right) \end{pmatrix}, m, n = 0, 1, 2, \dots.$$

易得, \mathbf{Q} 有特征根

$$\sigma_{mn}^3 = -r_1 - \lambda_{mn} < 0, \sigma_{mn}^4 = r_2\left(\frac{1}{1 + a^2} - \mu\right) - D\lambda_{mn}, m, n = 0, 1, 2, \dots.$$

则至少存在一个正根 $\sigma_{00}^4 = r_2\left(\frac{1}{1 + a^2} - \mu\right)$ 。故结论 b) 得证。

在 $P_3 = (u_0, v_0)$ 处,相应的特征矩阵是

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_{mn} - r_1\left(1 - 2\mu\left(1 - \sqrt{\frac{a^2\mu}{1-\mu}}\right)\right) & -\mu \\ 2r_1r_2(1-\mu)\left(1 - \sqrt{\frac{a^2\mu}{1-\mu}}\right) & -D\lambda_{mn} \end{pmatrix}, m, n = 0, 1, 2, \dots.$$

则特征方程为

$$\sigma^2 - \text{tr}\mathbf{Q}\sigma + \det\mathbf{Q} = 0 \quad (10)$$

其中:

$$\begin{cases} \text{tr}\mathbf{Q} = -(1 + D)\lambda_{mn} - r_1\left(1 - 2\mu\left(1 - \sqrt{\frac{a^2\mu}{1-\mu}}\right)\right) \\ \det\mathbf{Q} = D\lambda_{mn}^2 + Dr_1\left(1 - 2\mu\left(1 - \sqrt{\frac{a^2\mu}{1-\mu}}\right)\right)\lambda_{mn} + 2r_1r_2\mu(1-\mu)\left(1 - \sqrt{\frac{a^2\mu}{1-\mu}}\right) \end{cases}, m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

为了分析特征值的取值,令

$$H(a) = 1 - 2\mu \left(1 - \sqrt{\frac{a^2 \mu}{1 - \mu}} \right).$$

显然, $H(a)$ 关于 a 单调递增, 再由已知条件 $a > 1$, 有

$$H(a) > H(1) = 1 - 2\mu \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{1 - \mu}} \right).$$

又因为 $0 < \mu < \frac{1}{1+a^2} < \frac{1}{2}$, 所以 $H(a) > 1 - 2\mu > 0$ 恒成立。进而可得

$$\begin{cases} \operatorname{tr} \mathbf{Q} = -(1+D)\lambda_{mn} - r_1 H < 0 \\ \det \mathbf{Q} = D\lambda_{mn}^2 + Dr_1 H\lambda_{mn} + 2r_1 r_2 \mu (1-\mu) \left(1 - \sqrt{\frac{a^2 \mu}{1-\mu}} \right) > 0 \end{cases}, m, n = 0, 1, 2, \dots.$$

显然, 特征方程(10)的解要么都是负实数, 要么都是具有负实部的虚数。因此, P_3 总是稳定的, 不会分支出斑图, 因而结论 c) 得证。定理证毕。

定理 1 确立了产生斑图的充分条件。所得结论有如下生物学意义:

a) 由不等式(7)知, 在其他参数固定的前提下, 如果浮游动植物的初始密度 $(u, v)(0, x, y)$ 均很小(接近 $(0, 0)$), 则在越小的水域或浮游植物有越小的净增长率, 系统不会产生斑图。因此, 浮游动植物密度将趋于 $(0, 0)$, 即浮游动植物均最终灭绝。

b) 由不等式(8)知, 固定其他参数, 如果浮游动植物的初始密度 $(u, v)(0, x, y)$ 接近 $(1, 0)$, 则在越小的水域或浮游动物的净增长率与扩散率的比值越小, 系统不会产生斑图。因而浮游动植物的密度将均匀分布, 即趋向于 $(1, 0)$, 因而该水域将只有浮游植物生存, 浮游动物将灭绝。

c) 由定理 1 中的结论 c) 知, 如果浮游动植物的初始密度 $(u, v)(0, x, y)$ 接近 (u_0, v_0) , 则系统不会产生斑图。因此, 浮游动植物的密度终将趋向于 (u_0, v_0) , 即浮游动植物将共存于该水域且均匀分布, 即密度不会依赖于空间位置。

d) 基于定理 1 中的结论 a)–c) 及上述分析, 可得: 在环境承载力及浮游动物的被捕食率固定的前提下, 要使得浮游动植物共存且非均匀分布(即系统(1)–(2)会分支出斑图), 则需要在较大的水域、浮游植物有较大的净增长率或浮游动物的净增长率与扩散率的比值较大以及浮游动植物的初始密度远离 (u_0, v_0) 等。

3 数值分析

本文给出具体的系统参数, 通过编写 Matlab 程序对二维系统(1)–(2)进行数值分析, 给出理论分析结果。分析区域 Ω 取为正方形区域 $[0, 7\pi] \times [0, 7\pi]$, 即 $l_x = l_y = 7\pi$; 固定系统参数 $D = 0.1$, $a = 1.1$, $\mu = 0.4$ 。

对于定理 1 中的结论 a), 选取 $r_1 = 0.9$, $r_2 = 1.5$ 。初始值为 $u(s, 0) = (\epsilon + 0.1) \cos \frac{3\pi x}{l_x} \cos \frac{3\pi y}{l_y}$, $v(s, 0) = (\epsilon + 0.1) \cos \frac{3\pi x}{l_x} \cos \frac{3\pi y}{l_y}$, $\epsilon = 0.001$ 。通过计算, 可得 $k_{54}^2 = 0.8367 < r_1$ 。因此, 存在多个满足不等式(7)的不稳定波数, 则在 $P_1 = (0, 0)$ 处会分支出斑图, 数值结果见图 1(a)–(b)。

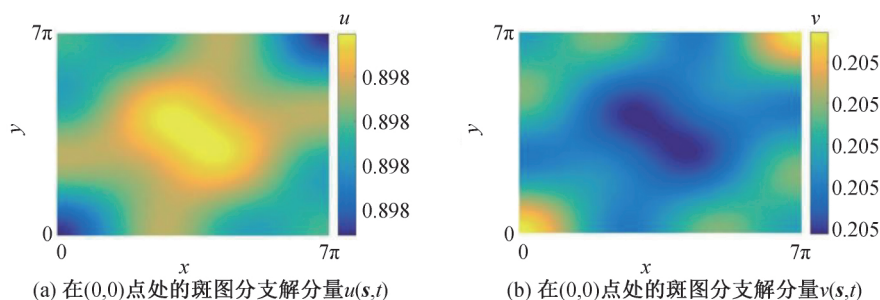
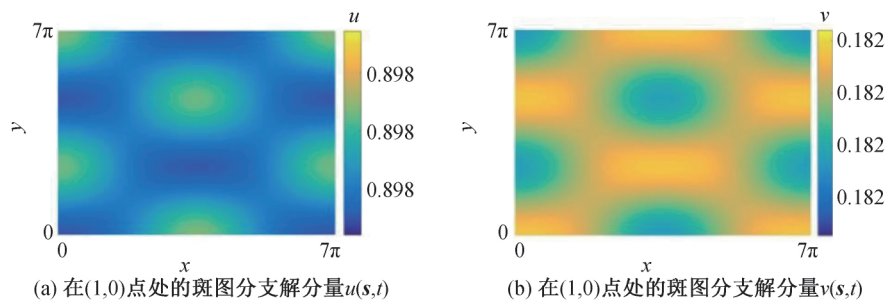
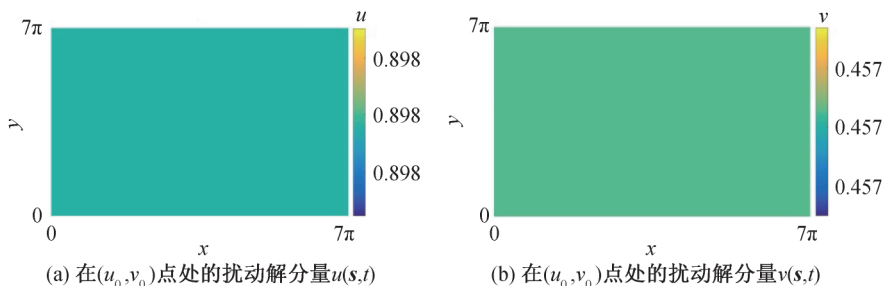


图 1 系统(1)–(2)在平衡点 $(0,0)$ 处的斑图分支解 ($t=355$)

图2 系统(1)–(2)在平衡点(1,0)处的斑图分支解($t=235$)

对于定理1中的结论b),选取 $r_1=0.8$, $r_2=1.8$, 初始值为 $u(s,0)=1+\epsilon \cos \frac{2\pi x}{l_x} \cos \frac{3\pi y}{l_y}$, $v(s,0)=(\epsilon+0.15) \cos \frac{2\pi x}{l_x} \cos \frac{3\pi y}{l_y}$, $\epsilon=0.001$. 则 $\frac{r_2}{D} \left(\frac{1}{1+a^2} - \mu \right) \approx 0.945$, $k_{63}^2=0.9184$. 因此,存在多个波数满足不等式(8),从而在 $P_2=(1,0)$ 处存在斑图,数值结果见图2(a)–(b)。

对于定理1中的结论c),取 $r_1=2$, $r_2=0.5$, 则 $P_3=(0.898, 0.457)$ 。初始值为 $u(s,0)=u_0+\epsilon \cos \frac{2\pi x}{l_x} \cos \frac{4\pi y}{l_y}$, $v(s,0)=v_0+\epsilon \cos \frac{2\pi x}{l_x} \cos \frac{4\pi y}{l_y}$, $\epsilon=0.001$. 从图3(a)–(b)可见,在 P_3 附近的扰动解趋向于均匀定态 P_3 。实际上,经过多次数值实验发现,任意选取系统参数 D, a, μ, r_1 以及 r_2 的值,在平衡点 $P_3=(u_0, v_0)$ 附近扰动时,系统均趋向于均匀定态 P_3 。

图3 系统(1)–(2)在平衡点 $P_3=(u_0, v_0)=(0.89814, 0.45739)$ 的扰动解($t=500$)

4 结 论

本文从理论上分析了在二维局部空间域上,具有捕食与被捕食关系的一类浮游动植物反应扩散模型斑图的存在性问题。通过对所有常数平衡解的稳定性分析,获得产生斑图的充分条件,即当环境承载力与浮游动物的被捕食率固定时,要使得浮游动植物共存且密度分布不均,则需要较大的水域、浮游植物有较大的净增长率或是浮游动物的净增长率与扩散率的比值较大、浮游动植物的初始密度远离正平衡点。为了保持局部水域生态系统的平衡,则需要越小的水域或是浮游植物有越小的净增长率或是浮游动植物的净增长率与扩散率的比值越小或是浮游植物、动物的初始密度接近正平衡点。最后,从数值分析上说明了理论分析结果的正确性。

参考文献:

- [1] Adler R. The crystal ball of chaos[J]. Nature, 2001, 414(6863): 480-481.
- [2] 赵冬至. 中国典型海域赤潮灾害发生规律[M]. 北京:海洋出版社, 2010: 66-76.
- [3] Fussmann G F, Ellner S P, Shertzer K W, et al. Crossing the Hopf bifurcation in a live predator-prey system[J]. Science, 2000, 290(5495): 1358-1360.
- [4] 欧阳颀. 反应扩散系统中的图灵斑图动力学介绍:非线性科学专题之十[J]. 物理通报, 1999(5): 4-7.
- [5] Turing A M. The chemical basis of morphogenesis[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, 1952, 237(641): 37-72.

- [6] Pearson J E. Complex patterns in a simple system[J]. Science, 1993, 261(5118): 189-192.
- [7] Potapov A B, Hillen T. Metastability in chemotaxis models[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2005, 17(2): 293-330.
- [8] Ma M J, Wang Z A. Global bifurcation and stability of steady states for a reaction-diffusion-chemotaxis model with volume-filling effect[J]. Nonlinearity, 2015, 28(8): 2639-2660.
- [9] Li J, Song Y Z, Wan H, et al. Dynamical analysis of a toxin-producing phytoplankton-zooplankton model with refuge[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2017, 14(2): 529-557.
- [10] 张真真, 曼合布拜·热合木. 一类浮游动植物模型的全局稳定性[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2015, 32(4): 410-417.
- [11] Zhao Y Q, Rehim M. Modeling and analysis a non-autonomous phytoplankton-zooplankton mode[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2019, 36(2): 127-140.
- [12] 白云霄. Allee 效应下捕食模型的斑图研究[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(4): 252-257.
- [13] 高海燕. 一类 Keller-Segel 趋化模型的分支结构[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(3): 64-67.
- [14] David L J. An introduction to nonlinear partial differential equations[M]. 2ed. New Jersey: John Wiley & Sons Interscience, 2008: 341.

(责任编辑:康 锋)