



# 基于 Winkler 弹性地基梁模型的桩承式挡墙托梁受力分析

余文杰, 吴大志

(浙江理工大学建筑工程学院, 杭州 310018)

**摘 要:** 山岭地区的深回填工程常采用桩承式挡墙进行支挡, 目前桩承式挡墙设计时把托梁当作位于桩顶的弹性梁, 没有考虑下部土体对托梁的作用, 这与托梁的实际工作状态不符。基于此, 考虑托梁受下部桩基和填土同时作用, 假设托梁为 Winkler 弹性地基梁, 根据托梁上作用荷载相等的原理, 建立了桩承式挡墙托梁的力学分析模型; 然后基于 Winkler 弹性地基梁的初参数解, 得出托梁不同位置处挠度、转角、弯矩及剪力的解析解, 并通过退化对比验证了所得结果的正确性。进一步研究发现: 按弹性地基梁理论计算所得的梁内最大弯矩和最大剪力, 均小于按传统一般连续梁理论计算的结果, 且最大弯矩与跨度的平方成正比, 最大剪力与跨度成正比。该结论可为桩承式挡墙的设计提供参考。

**关键词:** 桩承式挡墙; 托梁; Winkler 弹性地基; 初参数法; 受力分析

中图分类号: TU318.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2020)01-0109-06

## Study on the joist stress of pile-supported retaining wall based on Winkler's elastic foundation beam model

YU Wenjie, WU Dazhi

(School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Pile-supported retaining wall is often used in deep backfilling projects in mountain areas. During the process of designing a pile-supported retaining wall, the joist is treated as an elastic beam placed on the top of the piles, and the action of lower soil on the joist is omitted, which is not in consistent with the actual working state of the joist. Based on this, the present paper considers that the joist is subjected to the simultaneous action of the lower pile foundation and the filling soil. It is supposed that the joist is a Winkler elastic foundation beam. According to the principle of equal load acting on the joist, the mechanical analysis model of the joist in the pile-supported retaining wall was established. Based on the initial parameter solution of the Winkler elastic foundation beam, the analytical solutions of deflection, rotation angle, bending moment and shear force at different locations of the joist were obtained, and the correctness of the results was verified by comparison of degradation. Further research shows that the maximum bending moment and shear force in the joist calculated by the elastic foundation beam theory are less than those calculated by the conventional continuous beam theory. Besides, the maximum bending moment is proportional to the square of the span, and the maximum shear force is proportional to the span. The conclusions drawn in the present paper can provide the reference for the design of pile-supported retaining wall.

**Key words:** pile-supported retaining wall; joist; Winkler elastic foundation; initial parameter method; stress analysis

收稿日期: 2019-06-27 网络出版日期: 2019-10-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51678533)

作者简介: 余文杰(1995-), 女, 湖北随州人, 硕士研究生, 主要从事桩承式挡墙计算理论方面的研究。

通信作者: 吴大志, E-mail: wudz@zstu.edu.cn

## 0 引言

当前,中国国民经济处于快速发展阶段,受地形地势等诸多因素影响,可利用的土地资源日益紧缺,常常需要在山岭或丘陵地带进行深回填处理。在这些地区修建挡土结构,如果直接以填土作为支挡结构的地基,其地基承载力往往达不到设计要求,故常采用桩基础的形式。桩承式挡墙具有适应地质条件能力强和承受荷载能力大的特点,且其结构的整体刚度与抗变形能力也很强,在工程上得到了广泛的应用。

桩承式挡墙作为一种复合支挡结构,一般由挡土墙、托梁、桩基三部分结构组成,侧向土压力作用于挡墙上,并通过托梁传至桩基,桩基再将力传至深层土体。然而,工程上对桩承式挡墙托梁的设计常常依靠经验进行,其上荷载分布常常简化为均布荷载,也不考虑地基反力作用,将托梁简化为桩上简支梁或连续梁,与实际受力情况有较大差距,设计结果常偏于保守,增加了支挡结构的成本,而在大型工程中,这种成本差异更为明显。

近年来,不少学者对桩承式挡墙托梁的受力和设计方法进行研究,对托梁的研究主要从两方面进行:一是提出真实受力情况下托梁的传力模式;二是对影响托梁承载力的相关因素进行研究,如托梁厚度、配筋率等。张敏<sup>[1]</sup>通过一般连续梁理论计算出最大弯矩和剪力后,按 Winkler 假定将托梁简化为两端自由、受弯矩和剪力作用的弹性地基梁,将梁上荷载分布视为均布荷载。刘黎等<sup>[2]</sup>通过数值分析发现托梁上应力分布为曲线分布,桩与托梁接触位置应力值最大向两边逐渐降低,跨中应力值最小趋近于零。曾俊荃<sup>[3]</sup>基于托梁顶面应力在桩与托梁接触部位以上和附近区域有较为明显的应力集中,托梁上表面的应力分布在桩基位置最大,并向两边逐渐减小的现象,对托梁的内力计算理论进行了优化,但并未考虑地基对托梁的支承作用。Morfidis<sup>[4]</sup>和 Avramidis 等<sup>[5]</sup>在研究地基上梁的受力和弯曲问题时,均考虑了地基反力的影响。万里等<sup>[6]</sup>通过对某桩基托梁挡土墙的原型观测,分析了桩基托梁挡墙的应力分布规律和传递机理,提出了托梁上荷载分布和简化计算方法。赖紫辉<sup>[7]</sup>研究发现,托梁顶面竖直应力在桩顶及附近区域明显集中,按设计荷载相等原理将托梁上荷载分布简化为三角形分布。吴云峰<sup>[8]</sup>着重研究了桩基托梁挡土墙中托梁截面的尺寸及支承条件对其内力、变形的影响,同时利用二维

有限元研究了挡墙、托梁、桩体及地基相互作用下结构的内力和变形情况。胡雪<sup>[9]</sup>将衡重式桩基挡土墙的桩与托梁作为一个整体考虑,进行二者协同工作的受力性状分析,并用 MIDAS GTS 有限元软件研究不同托梁厚度、桩间距、桩宽度、桩长条件下,托梁应力、桩内力、挡土墙水平位移的变化规律。

上述研究有些只考虑将托梁简化为弹性地基梁,不考虑托梁与桩基位置的应力集中现象,有些将托梁按一般连续梁理论设计,不考虑地基反力的作用。实际上托梁在竖向除了承受自重和上部结构传递下来的竖向荷载之外,由于搁置在具有一定弹性的地基上,各点与地基紧密相贴,还承受下部地基对它的反力作用。然而,相关设计规范中并未给出针对桩承式挡墙托梁的分析方法,不同设计者给出的结果差异较大,因此有必要对桩承式挡墙托梁的受力分析进一步开展研究。

本文考虑梁上荷载和地基反力作用,利用 Winkler 弹性地基梁模型的初参数法,考虑荷载的实际分布形式,将梁上的竖向荷载简化为梯形荷载,同时考虑作用在托梁上的竖向荷载分布,获得桩承式挡墙托梁竖直面各处的挠度、转角、弯矩和剪力的解析解。

## 1 计算模型

托梁作为一种连接挡墙与桩基础的结构,可以显著地提高桩承式挡墙的整体性,但其受力情况通常比较复杂。在沿挡土墙方向上,托梁受到由挡土墙传递下来的竖向压力及其自重作用,桩承式挡墙结构受力情况如图 1 所示,其中: $q(x)$ 为由挡墙传递下来的竖向压力大小,其中  $x$  表示托梁水平方向上  $x$  截面位置; $w$  为托梁自重; $f$  为地基反力; $k$  为弹性地基系数; $s$  为地基的沉降。

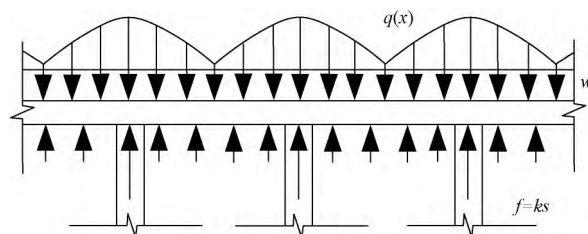


图 1 桩承式挡墙托梁受力简图

从图 1 可以看出,托梁不仅承受上部结构的压力,还受到桩基的支承作用,故可以将托梁与桩基的交点视为固定,按一般连续梁理论计算出支座和跨中处的弯矩和剪力后,每一净跨之间可以按两端自由的弹性地基梁理论进行计算<sup>[1]</sup>。

同时考虑对称性,取托梁一跨的右半部分开展研究,其计算模型如图 2 所示。以托梁跨中截面形心位置为零点,水平坐标  $x$  向右为正,垂直坐标  $y$  向下为正; $M_0$  为跨中弯矩; $M_l$  为支座弯矩; $Q_0$  为跨中剪力; $Q_l$  为支座剪力; $b$  为托梁截面宽度;托梁跨度为  $2l$ 。

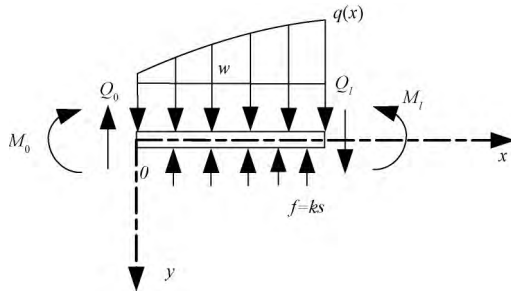


图 2 托梁计算模型

根据 Winkler 假定,利用初参数法,将  $M_0$ 、 $M_l$ 、 $Q_0$ 、 $Q_l$  作为边界条件代入  $M(x)$ 、 $Q(x)$ ,可以计算出托梁在  $x=0$  处的挠度  $y_0$  和转角  $\theta_0$ 。由此可以得到托梁在  $x$  截面处挠度  $y(x)$ 、转角  $\theta(x)$ 、弯矩  $M(x)$  和剪力  $Q(x)$  的初参数解如下:

$$y(x) = y_0 F_1(x) + \frac{1}{\alpha} \theta_0 F_2(x) - \frac{4\alpha^2 M_0}{bk} F_3(x) - \frac{4\alpha Q_0}{bk} F_4(x) + \frac{w}{bk} [1 - F_1(x)] + \frac{4\alpha}{bk} \int_0^l q(u) F_4(x-u) du \quad (1)$$

$$\theta(x) = -4\alpha y_0 F_4(x) + \theta_0 F_1(x) - \frac{4\alpha^3 M_0}{bk} F_2(x) - \frac{4\alpha^2 Q_0}{bk} F_3(x) + \frac{4\alpha w}{bk} F_4(x) + \frac{4\alpha^2}{bk} \int_0^l q(u) F_3(x-u) du \quad (2)$$

$$M(x) = \frac{bk y_0}{\alpha^2} F_3(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^3} F_4(x) + M_0 F_1(x) + \frac{Q_0}{\alpha} F_2(x) - \frac{w}{\alpha^2} F_3(x) - \frac{1}{\alpha} \int_0^l q(u) F_2(x-u) du \quad (3)$$

$$Q(x) = \frac{bk y_0}{\alpha} F_2(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^2} F_3(x) - 4\alpha M_0 F_4(x) + Q_0 F_1(x) - \frac{w}{\alpha} F_2(x) - \int_0^l q(u) F_1(x-u) du \quad (4)$$

其中:  $F_1(x) = \cosh \alpha x \cos \alpha x$ ;  $F_2(x) = \frac{1}{2}(\cosh \alpha x \sin \alpha x + \sinh \alpha x \cos \alpha x)$ ;  $F_3(x) = \frac{1}{2} \sinh \alpha x \sin \alpha x$ ;  $F_4(x) = \frac{1}{4}(\cosh \alpha x \sin \alpha x - \sinh \alpha x \cos \alpha x)$ ;  $\alpha$  为梁的弹性特征长

度,  $E$  为弹性模量,  $I$  为截面惯性矩,  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}}$ 。

## 2 受梯形荷载作用时的托梁的内力和位移解

托梁受力情况复杂多样,针对托梁提出的荷载分布形式有多种,如阶梯型、直线型。本文根据中铁二院研究成果<sup>[7]</sup>及托梁上设计荷载相等的原理,将由挡土墙传递下来的竖向压力简化为三角形荷载,考虑到托梁的自重,作用在托梁上的总荷载可视为三角形荷载和均布荷载的叠加,如图 3 所示。

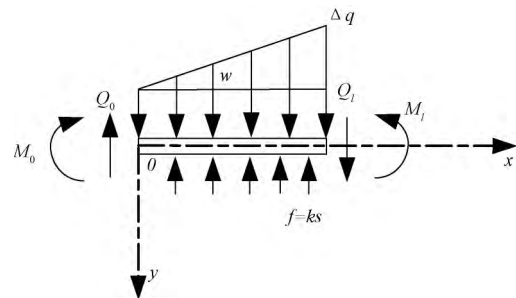


图 3 托梁受力简图

若由挡土墙传递下来的竖向均布荷载大小为  $N$ ,那么三角形荷载的最大值  $\Delta q = 2N$ ,则托梁上的荷载分布  $q(x) = x \Delta q / l$ ,  $x$  为截面到跨中的距离,均布荷载大小为托梁自重为  $q$ 。此时,式(1)~(4)变为:

$$y(x) = y_0 F_1(x) + \frac{1}{\alpha} \theta_0 F_2(x) - \frac{4\alpha^2 M_0}{bk} F_3(x) - \frac{4\alpha Q_0}{bk} F_4(x) + \frac{w}{bk} [1 - F_1(x)] + \frac{\Delta q}{bkl} \left[ x - \frac{1}{\alpha} F_2(x) \right] \quad (5)$$

$$\theta(x) = -4\alpha y_0 F_4(x) + \theta_0 F_1(x) - \frac{4\alpha^3 M_0}{bk} F_2(x) - \frac{4\alpha^2 Q_0}{bk} F_3(x) + \frac{4\alpha w}{bk} F_4(x) + \frac{\Delta q}{bkl} [1 - F_1(x)] \quad (6)$$

$$M(x) = \frac{bk y_0}{\alpha^2} F_3(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^3} F_4(x) + M_0 F_1(x) + \frac{Q_0}{\alpha} F_2(x) - \frac{w}{\alpha^2} F_3(x) - \frac{\Delta q}{\alpha^3 l} F_4(x) \quad (7)$$

$$Q(x) = \frac{bk y_0}{\alpha} F_2(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^2} F_3(x) - 4\alpha M_0 F_4(x) + Q_0 F_1(x) - \frac{w}{\alpha} F_2(x) - \frac{\Delta q}{\alpha^2 l} F_3(x) \quad (8)$$

根据前面的假设,托梁的边界条件可以表述为:

跨中处( $x=0$ ),

$$\begin{cases} M_0 = \frac{\Delta q l^2}{24} + \frac{w l^2}{6} \\ Q_0 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

梁右端处( $x=l$ ),

$$\begin{cases} M_l = -\left(\frac{\Delta q l^2}{8} + \frac{w l^2}{3}\right) \\ Q_l = -\left(\frac{\Delta q l}{2} + w l\right) \end{cases} \quad (10)$$

将以上边界条件式(9)~(10)代入式(7)~(8), 可以计算出托梁在  $x=0$  处的挠度  $y_0$  和转角  $\theta_0$ 。代入式(5)~(8)可得, 桩承式挡墙托梁在不同截面内的挠度、转角、弯矩、剪力的解为:

$$y(x) = y_0 F_1(x) + \frac{1}{\alpha} \theta_0 F_2(x) - \frac{4\alpha^2 M_0}{bk} F_3(x) + \frac{w}{bk} [1 - F_1(x)] + \frac{\Delta q}{bkl} \left[ x - \frac{1}{\alpha} F_2(x) \right] \quad (11)$$

$$\theta(x) = -4\alpha y_0 F_4(x) + \theta_0 F_1(x) - \frac{4\alpha^3 M_0}{bk} F_2(x) + \frac{4\alpha w}{bk} F_4(x) + \frac{\Delta q}{bkl} [1 - F_1(x)] \quad (12)$$

$$M(x) = \frac{bk y_0}{\alpha^2} F_3(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^3} F_4(x) + M_0 F_1(x) - \frac{w}{\alpha^2} F_3(x) - \frac{\Delta q}{\alpha^3 l} F_4(x) \quad (13)$$

$$Q(x) = \frac{bk y_0}{\alpha} F_2(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^2} F_3(x) - 4\alpha M_0 F_4(x) - \frac{w}{\alpha} F_2(x) - \frac{\Delta q}{\alpha^2 l} F_3(x) \quad (14)$$

为了验证式(11)~(14)的正确性, 将问题退化到托梁上受均布荷载作用的情形, 即令  $\Delta q=0$ , 此时, 退化为:

$$y(x) = y_0 F_1(x) + \frac{1}{\alpha} \theta_0 F_2(x) - \frac{4\alpha^2 M_0}{bk} F_3(x) + \frac{w}{bk} [1 - F_1(x)] \quad (15)$$

$$\theta(x) = -4\alpha y_0 F_4(x) + \theta_0 F_1(x) - \frac{4\alpha^3 M_0}{bk} F_2(x) + \frac{4\alpha w}{bk} F_4(x) \quad (16)$$

$$M(x) = \frac{bk y_0}{\alpha^2} F_3(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^3} F_4(x) + M_0 F_1(x) - \frac{w}{\alpha^2} F_3(x) \quad (17)$$

$$Q(x) = \frac{bk y_0}{\alpha} F_2(x) + \frac{bk \theta_0}{\alpha^2} F_3(x) - 4\alpha M_0 F_4(x) - \frac{w}{\alpha} F_2(x) \quad (18)$$

式(15)~(18)与张敏<sup>[1]</sup>在桩基托梁挡土墙设计理论与工程应用研究中的表述完全一致, 这也表明

本文所得到的结果是正确的。

### 3 算例分析与讨论

为了研究托梁上荷载的分布形式对托梁上弯矩和剪力的影响, 分别考虑梯形荷载和均布荷载作用在托梁上的情况。查阅相关资料<sup>[10-12]</sup>后, 算例分析时考虑选取的参数如下: 土体容重为  $18 \text{ kN/m}^3$ , 弹性模量为  $5 \text{ MPa}$ , 泊松比为  $0.2$ , 粘聚力为  $20 \text{ kPa}$ , 内摩擦角为  $30^\circ$ ; 挡土墙、托梁及桩基自重均为  $25 \text{ kN/m}^3$ , 弹性模量取  $25 \text{ GPa}$ , 泊松比  $0.2$ , 托梁截面尺寸为  $2200 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ , 每两根桩基之间的距离为  $3.0 \text{ m}$ 。

谢涛等<sup>[13]</sup>给出了弹性地基系数的经验公式:

$$k = \frac{E}{(1-\mu^2) \sqrt{A}} \quad (19)$$

其中:  $A$  为基础面积;  $\mu$  为泊松比。

由挡土墙传递下来的竖向力分布荷载大小为衡重力挡墙自重与衡重力挡墙上下土压力之和。

由式(19)可求出, 弹性地基系数  $k = 0.316 \times 10^4 \text{ kN/m}^4$ , 托梁的截面惯性矩  $I = 0.0117 \text{ m}^4$ , 托梁的跨度为  $3.0 \text{ m}$ , 所以  $l = 1.5 \text{ m}$ , 托梁每延米自重  $w = 22.00 \text{ kN/m}$ , 由挡土墙传递下来的竖向力分布荷载大小  $N = 296.1200 \text{ kN/m}$ , 三角形荷载的最大值  $\Delta q = 592.2400 \text{ kN/m}$ 。

为了完整地显示整根托梁的内力图, 本文绘制了相邻两跨的弯矩与剪力图, 分别如图4和图5所示。

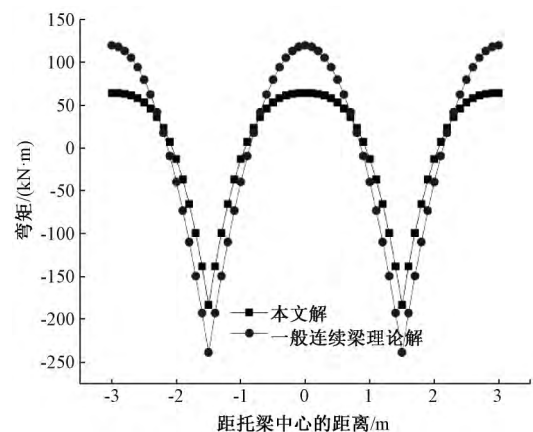


图4 托梁的弯矩图(跨度为  $3 \text{ m}$ )

由图4和图5可知, 两种计算理论所得的托梁上弯矩、剪力分布都具有相同的变化趋势, 但数值大小有较大差异, 运用一般连续梁理论计算得到的梁内最大弯矩与最大剪力值都偏大; 图中所示托梁与桩基交接位置处出现了弯矩与剪力的突变, 这是托梁受桩基反力作用的结果。由图4和图5还可以看出, 弯矩在跨中位置处的变化平缓, 而剪力在托梁与

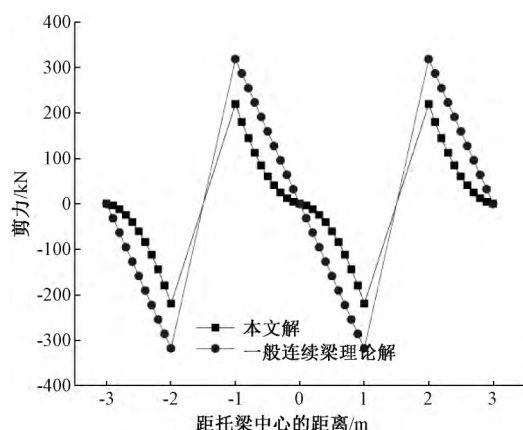


图 5 托梁的剪力图(跨度为 3 m)

桩基交接处的变化幅度大于跨中位置。本文解显示的规律与高志辉<sup>[14]</sup>在模型试验中所得数据规律相符:两桩之间的弯矩值最大,向外逐渐减小,在桩基处减小到最小,然后向外逐渐扩大;在桩基支承部位剪力值最大,向外逐渐减小,两桩之间也逐渐减小,到中间处达到最小。

为了研究跨度对托梁内力的影响,其他参数不变,选取托梁跨度为 2、3、4 m 进行分析,得到托梁上的弯矩和和剪力分布,如图 6 和图 7 所示。由图 6 和图 7 可知,随着托梁跨度的增加,托梁与桩基交接处的弯矩与剪力均增加,在跨中处的弯矩也随之增加。进一步分析表 1 还可以发现,跨度的变化会影响梁内最大弯矩与最大剪力的值,最大弯矩与跨度的平方正相关,最大剪力值与跨度的大小正相关。这也表明在进行桩承式挡墙托梁设计时应选取合适的跨度。

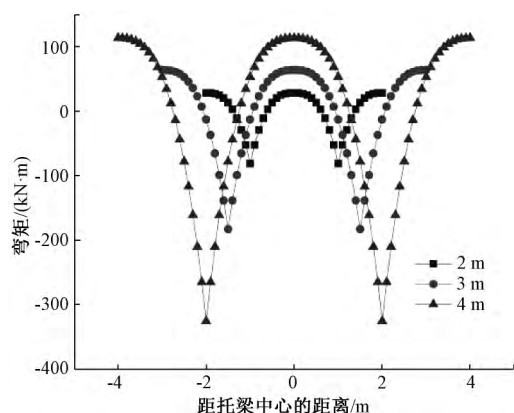


图 6 不同跨度时托梁的弯矩分布

表 1 最大弯矩与最大剪力值

托梁跨度/m	最大弯矩/(kN·m)	最大剪力/kN
2	28.3433	85.0288
3	63.7725	219.4000
4	113.3733	366.0923

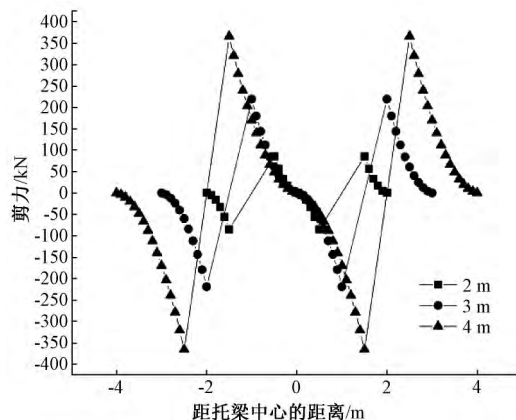


图 7 不同跨度时托梁的剪力分布

## 4 结 论

本文考虑桩承式挡墙所受荷载的实际情况以及托梁自重,假设作用在托梁上的荷载为梯形荷载,同时考虑托梁下部地基反力作用,结合 Winkler 弹性地基梁模型的初参数解法,给出了桩承式挡墙托梁不同截面处挠度、转角、剪力和弯矩的解析解。通过算例分析发现,托梁上部荷载分布形式与跨度对托梁的弯矩与剪力均有影响,具体为:

a)运用 Winkler 弹性地基梁理论求解出的梁内最大弯矩值和最大剪力值均小于一般连续梁理论所得结果,桩承式挡墙托梁采用一般连续梁理论偏于保守。

b)随着托梁跨度的增加,托梁与桩基交接处的弯矩与剪力均增加,在跨中处的弯矩与跨度的平方正相关、跨中处的剪力与跨度正相关,桩承式挡墙设计时应合理选择托梁的跨度。

## 参考文献:

- [1] 张敏.桩基托梁挡土墙设计理论与工程应用研究[D].成都:西南交通大学,2007:75-79.
- [2] 刘黎,何昌荣,谯春丽,等.桩基托梁挡土墙结构托梁内力的合理计算[J].水电站设计,2005,21(3):26-28.
- [3] 曾俊荃.桩基托梁挡土墙分析与计算方法优化[D].成都:西南交通大学,2016:154-179.
- [4] Morfidis K. Exact matrices for beams on three — parameter elastic foundation [J]. Computers and Structures, 2007: 85(15/16): 1243-1256.
- [5] Avramidis I E, Morfidis K. Bending of beams on three — parameter elastic foundation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43(2): 357-375.
- [6] 万里,陈群,何昌荣,等.桩基托梁挡土墙原型观测研究[J].水电站设计,2009,25(4):82-86.

- [7] 赖紫辉.桩基托梁挡土墙托梁受力分析[J].路基工程, 2008(6):48-49.
- [8] 吴云峰.变电站高填土边坡桩基托梁挡土墙应用研究[D].南宁:广西大学,2013:18-27.
- [9] 胡雪.桩基托梁挡土墙设计理论研究[D].北京:中国地质大学(北京),2015:63-110.
- [10] 屈成忠,宋巍.不同工况下基床系数的取值研究[J].东北电力大学学报(自然科学版),2009(1):8-12.
- [11] 顾晓鲁.地基与基础[M].3版.北京:中国建工出版社, 1993:144-151.
- [12] 谢鑫,周应兵,郭瑞,等.斜坡地基高填方路堤桩基托梁挡墙受力特征研究[J].路基工程,2019(2):1-4.
- [13] 谢涛,罗强,周成,等.高速铁路小变形下陡坡地基路肩桩板墙力学响应[J].岩土力学,2018(1):45-52.
- [14] 高志辉.桩基托梁挡土墙力学作用机理试验研究与数值分析[D].成都:四川大学,2005:27-38.

(责任编辑:康 锋)