浙江理工大学学报，2019，41(6)：818-822
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10. 3969/j.issn.1673－3851(n).2019. 06.017

与 Riordan 阵相关的若干多项式序列的关系研究

张晨璐，王伟平
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：利用 Riordan 阵的分解及多项式序列的哑复合，研究了一些多项式序列之间的关系，涉及 Lucas-u 序列、Lucas-v 序列以及与 Riordan 阵 $T(\varphi(t)\mid(1-bt-ct^2)/a)$ 相关的多项式序列，进一步得到 Chebyshev、Fermat、Fibonacci、Lucas、Morgan-Voyce、Pell 等一系列经典多项式序列之间的关系，从而推广了 Luzón 等的工作。

关键词：Lucas-u 序列；Lucas-v 序列；Riordan 阵；哑复合运算
中图分类号：O157. 1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2019) 11-0818-05

Study on the relations of some polynomial sequences related to the Riordan arrays

ZHANG Chenlu, *WANG Weiping*
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: By using the decompositions of Riordan arrays and umbral compositions of polynomial sequences, the relations among some polynomial sequences are studied, including the Lucas-u sequences, the Lucas-v sequences and the polynomial sequences related to the Riordan arrays $T(\varphi(t)\mid(1-bt-ct^2)/a)$. The relations among Chebyshev, Fermat, Fibonacci, Lucas, Morgan-Voyce, Pell and other classical polynomial sequences are further obtained. As a result, the works of Luzón et al. are generalized.

Key words: Lucas-u sequences; Lucas-v sequences; Riordan arrays; umbral composition

0　引　言

给定两个形式幂级数 $g(t)=\sum_{n\geqslant 0} g_n t^n$，$f(t)=\sum_{n\geqslant 0} f_n t^n$，其中 $g(0)\neq 0$，$f(0)=0$，且 $f'(0)\neq 0$，定义 Riordan 阵 $(g(t),f(t))$ 为一个无穷下三角矩阵 $(d_{n,k})_{n,k\geqslant 0}$，并且满足 $d_{n,k}=[t^n]g(t)f(t)^k$，即 $g(t)f(t)^k$ 是矩阵第 k 列的生成函数。Riordan 阵在矩阵乘法下构成一个群，称为 Riordan 群。给定一个 Riordan 阵 $(d_{n,k})$，定义多项式 $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} d_{n,k}x^k$，称多项式序列 $(p_n(x))$ 为该 Riordan 阵对应的多项式序列。给定两个多项式序列 $(q_n(x))$ 与 $(p_n(x))$，设 $q_n(x)=\sum_{k=0}^{n} q_{n,k}x^k$，则其哑复合为 $(q_n(x)\circ p_n(x))$，其中 $q_n(x)\circ p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} q_{n,k}p_k(x)$。可以证明 Riordan 阵的乘法能够转化为 Riordan 阵对应的多项式序列之间的哑复合。

Riordan 阵是组合数学研究中的一个重要工具。1991 年，Shapiro 等[1] 首先引入了 Riordan 阵及 Riordan 群的概念。之后，Riordan 阵的研究受到很多数学家的关注。例如，Sprugnoli[2] 利用 Riordan 阵研究了含二项式系数、Bernoulli 数、Stirling 数等特殊组合序列的恒等式。Cheon 等[3] 研究了 Riordan 群中的对合问题。He 等[4] 利用

收稿日期：2019－04－18　　网络出版日期：2019－07－02
基金项目：国家自然科学基金项目(11671360)
作者简介：张晨璐(1994－　)，女，河南焦作人，硕士研究生，主要从事组合数学方面的研究。
通信作者：王伟平，E-mail：wpingwang@zstu.edu.cn

Riordan 阵的 A-序列和 Z-序列研究了 Riordan 群的子群及 Riordan 阵的构建。近年来，Chen 等[5]研究了 Riordan 阵的全正性。Yang 等[6]利用 Riordan 阵研究了广义 Catalan 矩阵，并通过 m-Dyck 路给出广义 Catalan 矩阵中元素的组合解释。此外，Luzón 等[7]指出 Riordan 阵 $(g(t),f(t))$ 可以用另外两个级数 $\varphi(t)=\sum_{n\geqslant 0}\varphi_n t^n$，$\psi(t)=\sum_{n\geqslant 0}\psi_n t^n$ 刻画，其中 $\varphi_0,\psi_0\neq 0$，$g(t)$、$f(t)$ 与 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 的关系是 $g(t)=\varphi(t)/\psi(t)$，$f(t)=t/\psi(t)$，从而 Riordan 阵也可以用记号 $T(\varphi(t)\mid\psi(t))$ 表示。利用 Riordan 阵的这一刻画，Luzón 等[7]证明了与 Riordan 阵对应的多项式序列满足如下递推公式：

$$p_n(x)=\frac{x}{\psi_0}p_{n-1}(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_i}{\psi_0}p_{n-i}(x)+\frac{\varphi_n}{\psi_0}\quad(1)$$

并给出一些多项式之间的关系。然而，Luzón 等[7]并没有给出所得关系式中参数的选取方法。

本文利用 Riordan 阵的刻画及多项式序列的哑复合运算，通过 Riordan 阵的分解研究多项式序列的关系，并将关系式中参数的选取理论化，从而推广 Luzón 等[7]的工作。本文研究的关系包括两个 Lucas-u 多项式序列的关系，两个 Lucas-v 多项式序列的关系，以及与 Riordan 阵 $T(\varphi(t)\mid(1-bt-ct^2)/a)$ 对应的多项式序列和 Lucas-u 多项式序列之间的关系。

1　Lucas-u 序列、Lucas-v 序列的关系

定义 Lucas-u 多项式序列 $(u_n(x))$ 和 Lucas-v 多项式序列 $(v_n(x))$ 为

$$u_0(x)=1,u_1(x)=ax+b,u_n(x)=(ax+b)u_{n-1}(x)+cu_{n-2}(x),n\geqslant 2;$$

$$v_0(x)=1,v_1(x)=ax+b,v_2(x)=(ax+b)^2+2c,v_n(x)=(ax+b)v_{n-1}(x)+cv_{n-2}(x),n\geqslant 3,$$

其中 $a,c\neq 0$。在 2016 年，Luzón 等[8]指出 $(u_n(x))$ 和 $(v_n(x))$ 是 Riordan 阵

$$U=T\left(\frac{1}{a}\mid\frac{1}{a}(1-bt-ct^2)\right),$$

$$V=T\left(\frac{1}{a}(1+ct^2)\mid\frac{1}{a}(1-bt-ct^2)\right)$$

对应的多项式序列。事实上，$(u_n(x))$ 即为 (p,q) 型 Fibonacci 多项式序列，其中 $p(x)=ax+b$，$q(x)=c$。经典的 (p,q) 型 Lucas 多项式序列 $(\tilde{v}_n(x))$ 的定义为：

$$\tilde{v}_0(x)=2,\tilde{v}_1(x)=ax+b,\tilde{v}_n(x)=(ax+b)\tilde{v}_{n-1}(x)+c\tilde{v}_{n-2}(x),n\geqslant 2,$$

但根据定义，$(\tilde{v}_n(x))$ 不对应 Riordan 阵，因此对 $(\tilde{v}_n(x))$ 的定义稍做改动得到 $(v_n(x))$，可以发现 $\tilde{v}_0(x)\neq v_0(x)$，但当 $n\geqslant 1$ 时有 $\tilde{v}_n(x)=v_n(x)$。

通过对参数 a,b,c 取不同的值，可得很多著名的多项式序列（见表 1）。

表 1　一些特殊的 Lucas-u 序列和 Lucas-v 序列以及对应的 Riordan 阵[8-10]

$ax+b$	c	$u_n(x)$	u-Riordan	$v_n(x)$	v-Riordan
x	1	Fibonacci $F_{n+1}(x)$	$T(1\mid 1-t^2)$	Lucas $L_n(x)$	$T(1+t^2\mid 1-t^2)$
x	-2	Fermat-Horadam $\phi_{n+1}(x)$	$T(1\mid 1+2t^2)$	Fermat-Horadam $\theta_n(x)$	$T(1-2t^2\mid 1+2t^2)$
x	$-\alpha$	Dickson $E_n(x,\alpha)$	$T(1\mid 1+\alpha t^2)$	Dickson $D_n(x,\alpha)$	$T(1-\alpha t^2\mid 1+\alpha t^2)$
$2x$	1	Pell $\mathcal{P}n+1(x)$	$T\left(\frac{1}{2}\mid\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t^2\right)$	Pell-Lucas $\mathcal{L}_n(x)$	$T\left(\frac{1}{2}(1+t^2)\mid\frac{1}{2}(1-t^2)\right)$
$2x$	-1	Chebyshev $U_n(x)$	$T\left(\frac{1}{2}\mid\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2\right)$	Chebyshev $2T_n(x)$	$T\left(\frac{1}{2}(1-t^2)\mid\frac{1}{2}(1+t^2)\right)$
$3x$	-2	Fermat $\mathcal{F}_{n+1}(x)$	$T\left(\frac{1}{3}\mid\frac{1}{3}(1+2t^2)\right)$	Fermat-Lucas $f_n(x)$	$T\left(\frac{1}{3}(1-2t^2)\mid\frac{1}{3}(1+2t^2)\right)$
$x+2$	-1	Morgan-Voyce $B_n(x)$	$T(1\mid(1-t)^2)$	Morgan-Voyce $b_n(x)+b_{n-1}(x)$	$T(1-t^2\mid(1-t)^2)$

利用 Riordan 阵可得两个特殊的 Lucas-u 序列的关系及两个特殊的 Lucas-v 序列的关系。

定理 1 设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 分别是 Riordan 阵

$$T\left(\frac{1}{a_2}\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right),$$

$$T\left(\frac{1}{a_1}\mid\frac{1}{a_1}(1-b_1t-c_1t^2)\right)$$

对应的 Lucas-u 多项式序列，设 β、δ、η 是三个参数，其中 $\beta\neq 0,\delta\neq 0$。如果

$$\begin{cases}\beta^2=\dfrac{c_1}{c_2}\\ \beta\delta=\dfrac{a_1}{a_2}\\ \eta=\dfrac{b_1}{a_1}\delta-\dfrac{b_2}{a_2}\end{cases}\quad(2)$$

则多项式满足

$$r_n(x)=\frac{1}{\beta^n}s_n\left(\frac{x-\eta}{\delta}\right) \tag{3}$$

设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 分别是 Riordan 阵

$$T\left(\frac{1}{a_2}(1+c_2t^2)\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right),$$

$$T\left(\frac{1}{a_1}(1+c_1t^2)\mid\frac{1}{a_1}(1-b_1t-c_1t^2)\right)$$

对应的 Lucas-v 多项式序列,若式(2)成立,则仍有式(3)成立。

证明 根据定理中的条件,对任意不为零的参数 α,γ,若 $\alpha\gamma=a_1/a_2$,则有 Riordan 阵分解

$$T\left(\frac{1}{a_2}\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right)=T(\alpha\mid\beta)$$

$$T\left(\frac{1}{a_1}\mid\frac{1}{a_1}(1-b_1t-c_1t^2)\right)T(\gamma\mid\delta+\eta t) \tag{4}$$

利用式(1),可知 $T(\alpha\mid\beta)$ 和 $T(\gamma\mid\delta+\eta t)$ 对应的多项式序列分别为 $\left(\frac{\alpha}{\beta^{n+1}}x^n\right)$ 和 $\left(\frac{\gamma}{\delta}\left(\frac{x-\eta}{\delta}\right)^n\right)$,将 Riordan 阵的乘积转化为对应多项式序列之间的哑复合可得

$$(r_n(x))=\left(\frac{\gamma}{\delta}\left(\frac{x-\eta}{\delta}\right)^n\right)\circ(s_n(x))\circ$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta^{n+1}}x^n\right)=\left(\frac{\alpha\gamma}{\delta\beta^{n+1}}s_n\left(\frac{x-\eta}{\delta}\right)\right),$$

由于 $\alpha\gamma=\delta\beta$,故式(3)成立。同理,对 Lucas-v 多项式序列也可得到相同的结论。

根据定理 1,可得推论 1 及推论 2。

推论 1 设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 是定理 1 中定义的 Lucas-u 多项式序列,若 $c_1=c_2$,则有

$$r_n(x)=s_n\left(\frac{a_2x-b_1+b_2}{a_1}\right) \tag{5}$$

设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 是定理 1 中定义的 Lucas-v 多项式序列,若 $c_1=c_2$,则式(5)仍成立。

证明 只考虑 Lucas-u 序列的情况。当 $c_1=c_2$ 时,取 $\alpha=\beta=1,\gamma=\delta=a_1/a_2,\eta=(b_1-b_2)/a_2$,则式(2)成立,从而式(5)成立。此时 Riordan 阵分解为

$$T\left(\frac{1}{a_2}\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right)=$$

$$T\left(\frac{1}{a_1}\mid\frac{1}{a_1}(1-b_1t-c_1t^2)\right)T\left(\frac{a_1}{a_2}\mid\frac{a_1}{a_2}+\frac{b_1-b_2}{a_2}t\right)。$$

例 1 由表 1 可知,Morgan-Voyce 多项式 $B_n(x)$ 及第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ 对应的 Riordan 阵分别为 $T(1\mid(1-t)^2)$ 及 $T\left(\frac{1}{2}\mid\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t^2\right)$,则 $a_2=1,b_2=2,c_2=-1,a_1=2,b_1=0,c_1=-1$。因为 $c_1=c_2$,利用推论 1 可得 $B_n(x)=U_n((x+2)/2)$。

此外,Pell 多项式 $\mathcal{P}_{n+1}(x)$ 以及 Fibonacci 多项式 $F_{n+1}(x)$ 也适用于推论 1,因此得 $\mathcal{P}_n(x)=F_n(2x)$。

例 2 由推论 1,Pell-Lucas 多项式 $\mathcal{L}_n(x)$,Lucas 多项式 $L_n(x)$,Morgan-Voyce 多项式 $b_n(x)$ 及第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x)$ 满足:$\mathcal{L}_n(x)=L_n(2x)$,$b_n(x)+b_{n-1}(x)=2T_n((x+2)/2)$,其中 $b_n(x)$ 的定义为 $b_0(x)=1,b_1(x)=x+1$,$b_n(x)=(x+2)b_{n-1}(x)-b_{n-2}(x),n\geqslant 2$。

推论 2 设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 是定理 1 中定义的 Lucas-u 多项式序列,β,δ 是不为零的参数,若如下两个条件之一成立:

a) $b_1=b_2=0,\beta^2=\frac{c_1}{c_2},\beta\delta=\frac{a_1}{a_2}$;

b) $b_1b_2\neq 0,\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2=\frac{c_1}{c_2},\beta=\frac{b_1}{b_2},\delta=\frac{a_1b_2}{a_2b_1}$,

则两个多项式序列满足

$$r_n(x)=\frac{1}{\beta^n}s_n\left(\frac{x}{\delta}\right) \tag{6}$$

设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 是定理 1 中定义的 Lucas-v 多项式序列,且上述两个条件之一成立,则式(6)仍成立。

证明 和推论 1 一样,只考虑 Lucas-u 多项式序列。根据条件,对任意不为零的参数 α 及 γ,如果 $\alpha\gamma=a_1/a_2$,则有分解

$$T\left(\frac{1}{a_2}\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right)=$$

$$T(\alpha\mid\beta)T\left(\frac{1}{a_1}\mid\frac{1}{a_1}(1-b_1t-c_1t^2)\right)T(\gamma\mid\delta),$$

这个分解对应式(4)中 $\eta=0$ 的情况,由该分解即可得到最终结论。

例 3 考虑表 1 中的 Fermat 多项式 $\mathcal{F}_{n+1}(x)$ 以及第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$,此时 $a_2=3$,$b_2=0,c_2=-2,a_1=1,b_1=0,c_1=-1$,取 $\beta=1/\sqrt{2}$,$\delta=2\sqrt{2}/3$ 或者 $\beta=-1/\sqrt{2},\delta=-2\sqrt{2}/3$,则推论 2 中的 a)成立,从而

$$\mathcal{F}_{n+1}(x)=(\sqrt{2})^nU_n\left(\frac{3x}{2\sqrt{2}}\right)=(-\sqrt{2})^nU_n\left(-\frac{3x}{2\sqrt{2}}\right) \tag{7}$$

类似地,可以将 Fibonacci 多项式 $F_{n+1}(x)$ 用 $U_n(x)$ 表示,取 $\beta=-\mathrm{i},\delta=2\mathrm{i}$ 或者 $\beta=\mathrm{i},\delta=-2\mathrm{i}$,其中 i 是虚数单位,根据推论 2 可得

$$F_{n+1}(x)=\mathrm{i}^nU_n\left(\frac{x}{2\mathrm{i}}\right)=(-\mathrm{i})^nU_n\left(-\frac{x}{2\mathrm{i}}\right) \tag{8}$$

类似可得相应的 Lucas-v 多项式序列之间的关系

$$f_n(x)=(\sqrt{2})^{n+2}T_n\left(\frac{3x}{2\sqrt{2}}\right)=(-\sqrt{2})^{n+2}T_n\left(-\frac{3x}{2\sqrt{2}}\right) \tag{9}$$

$$L_n(x)=\mathrm{i}^n\cdot 2T_n\left(\frac{x}{2\mathrm{i}}\right)=(-\mathrm{i})^n\cdot 2T_n\left(-\frac{x}{2\mathrm{i}}\right) \tag{10}$$

其中 $f_n(x)$ 是 Fermat-Lucas 多项式。由式(7)—(10)可知两类 Chebyshev 多项式满足对称性，即：$U_n(-x)=(-1)^nU_n(x)$，$T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$。

2　一类特殊多项式序列和 Lucas-u 序列的关系

类似地可以研究与 Riordan 阵 $T(\varphi(t)\mid(1-bt-ct^2)/a)$ 对应的多项式序列和 Lucas-u 多项式序列的关系。

定理 2　设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 分别是 Riordan 阵

$$T\left(\varphi(t)\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right),$$

$$T\left(\frac{1}{a_1}\mid\frac{1}{a_1}(1-b_1t-c_1t^2)\right)$$

对应的多项式序列，其中 $\varphi(t)=\sum_{n\geqslant 0}\varphi_nt^n$，如果式(2)成立，则两个多项式序列满足

$$r_n(x)=a_2\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi_i}{\beta^{n-i}}s_{n-i}\left(\frac{x-\eta}{\delta}\right) \tag{11}$$

证明　式(11)可以由下面的分解

$$T\left(\frac{1}{a_2}\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right)=T(a_2\varphi(t)\mid 1)$$
$$T\left(\frac{1}{a_2}\mid\frac{1}{a_2}(1-b_2t-c_2t^2)\right)$$

以及式(4)得到。

推论 3　设 $(r_n(x))$ 和 $(s_n(x))$ 是定理 2 中定义的多项式序列，如果 $c_1=c_2$，则两个多项式序列满足

$$r_n(x)=a_2\sum_{i=0}^{n}\varphi_is_{n-i}\left(\frac{a_2x-b_1+b_2}{a_1}\right) \tag{12}$$

如果推论 2 中的两个条件之一成立，则两个多项式序列满足

$$r_n(x)=a_2\sum_{i=0}^{n}\frac{\varphi_i}{\beta^{n-i}}s_{n-i}\left(\frac{x}{\delta}\right) \tag{13}$$

下面给出一些特例。

例 4　Morgan-Voyce 多项式序列 $(b_n(x))$ 对应的 Riordan 阵为 $T(1-t\mid(1-t)^2)$，下面将 $b_n(x)$ 用第二类 Chebyshev 多项式 $U_n(x)$ 展开。此时有 $\varphi(t)=1-t$，$a_2=1$，$b_2=2$，$c_2=-1$，$a_1=2$，$b_1=0$，$c_1=-1$，根据式(12)可得

$$b_n(x)=U_n\left(\frac{x+2}{2}\right)-U_{n-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)。$$

再把 $b_n(x)$ 用 Fermat 多项式 $\mathcal{F}_{n+1}(x)$ 展开，这里 $a_1=3$，$b_1=0$，$c_1=-2$，取 $\beta=\sqrt{2}$，$\delta=3\sqrt{2}/2$，$\eta=-2$，并直接应用定理 2 可得

$$b_n(x)=\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\mathcal{F}_{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(x+2)\right)-$$
$$\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}\mathcal{F}_n\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(x+2)\right)。$$

Luzón 等[7]给出 Boubaker 多项式与第二类 Chebyshev 多项式、Fermat 多项式之间的关系，但并没有明确说明关系式中的参数是如何得到的，应用本节给出的定理可直接说明如何选取参数。

例 5　Boubaker 多项式 $\mathfrak{B}_n(x)$[11]满足递推关系

$$\mathfrak{B}_0(x)=1,\mathfrak{B}_1(x)=x,\mathfrak{B}_2(x)=2+x^2,$$
$$\mathfrak{B}_n(x)=x\mathfrak{B}_{n-1}(x)-\mathfrak{B}_{n-2}(x),n\geqslant 3,$$

应用式(1)可知 Boubaker 多项式序列对应的 Riordan 阵为 $T(1+3t^2\mid 1+t^2)$。首先把 $\mathfrak{B}_n(x)$ 用第二类 Chebyshev 多项式展开，此时有 $\varphi(t)=1+3t^2$，$a_2=1$，$b_2=0$，$c_2=-1$，$a_1=2$，$b_1=0$，$c_1=-1$。因为 $c_1=c_2$，利用式(12)可得

$$\mathfrak{B}_n(x)=U_n\left(\frac{x}{2}\right)+3U_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right)。$$

利用式(13)可以把 $\mathfrak{B}_n(x)$ 用 Fermat 多项式 $\mathcal{F}_{n+1}(x)$ 展开：

$$\mathfrak{B}_n(x)=\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\mathcal{F}_{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)+\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}\mathcal{F}_{n-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)。$$

类似地，也可以将 Boubaker 多项式用 Pell 多项式 $\mathcal{P}_{n+1}(x)$ 展开：

$$\mathfrak{B}_n(x)=\mathrm{i}^n\left(\mathcal{P}_{n+1}\left(\frac{x}{2\mathrm{i}}\right)-3\mathcal{P}_{n-1}\left(\frac{x}{2\mathrm{i}}\right)\right)。$$

3　结　论

本文通过 Riordan 阵分解及多项式序列的哑复合运算研究了 Lucas-u 序列、Lucas-v 序列以及其他一些多项式序列的关系，并应用到很多经典的多项式上。用类似的方法还可以继续研究 Humbert 多项式序列与 Lucas-u 序列、Lucas-v 序列的关系。

参考文献：

[1] Shapiro L W, Getu S, Woan W J, et al. The Riordan group[J]. Discrete Applied Mathematics, 1991, 34(1/

2/3): 229-239.

[2] Sprugnoli R. Riordan arrays and combinatorial sums[J]. Discrete Mathematics, 1994, 132(1/2/3): 267-290.

[3] Cheon G S, Kim H, Shapiro L W. Combinatorics of Riordan arrays with identical A and Z sequences[J]. Discrete Mathematics, 2012, 312(12/13): 2040-2049.

[4] He T X, Sprugnoli R. Sequence characterization of Riordan arrays[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309 (12): 3962-3974.

[5] Chen X, Wang Y. Notes on the total positivity of Riordan arrays[J]. Linear Algebra and its Applications, 2019, 569: 156-161.

[6] Yang S L, Dong Y N, He T X, et al. A unified approach for the Catalan matrices by using Riordan arrays[J]. Linear Algebra and its Applications, 2018, 558: 25-43.

[7] Luz ón A, Morón M A. Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(7): 1422-1446.

[8] Luzón A, Morón M A, Ramírez J L. Double parameter recurrences for polynomials in bi-infinite Riordan matrices and some derived identities[J]. Linear Algebra and its Applications, 2016, 511: 237-258.

[9] Wang W P, Wang H. Some results on convolved (p, q)-Fibonacci polynomials[J]. Integral Transforms and Special Functions, 2015, 26(5): 340-356.

[10] Wang W P, Wang H. Generalized Humbert polynomials via generalized Fibonacci polynomials[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 307: 204-216.

[11] Boubaker K, Chaouachi A, Amlouk M, et al. Enhancement of pyrolysis spray disposal performance using thermal time-response to precursor uniform deposition[J]. The European Physical Journal-Applied Physics, 2007, 37(1): 105-109.

(责任编辑:康　锋)