**浙江理工大学学报**，2019，41(5)：665-669
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673－3851(n).2019.05.016

# 时间尺度上变质量完整系统的Lie对称性及其守恒量

**吴　艳，傅景礼**
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

**摘　要**：将时间尺度上的微积分理论运用到变质量完整系统，研究了时间尺度上变质量完整系统的Lie对称性及其守恒量，通过时间尺度理论将变质量连续与离散系统有效统一起来。首先给出时间尺度上变质量完整系统的运动微分方程；然后依据微分方程在无限小群变换下的不变性，得到时间尺度上变质量完整系统的确定方程，建立了时间尺度上变质量完整系统的Lie对称性及其守恒量；然后讨论了时间尺度上变质量完整系统的Lie对称性，以方便地获得连续与离散两种情况下变质量系统的Lie对称性理论；最后给出例题说明结果的应用。

**关键词**：时间尺度；Lie对称性；变质量完整系统；守恒量
**中图分类号**：O302，O369　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2019) 09-0665-05

# Lie symmetry and conserved quantity of variable mass holonomic system on time scale

*WU Yan*，*FU Jingli*
(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

**Abstract**：In this paper，calculus theory on time scale was applied in the variable mass holonomic system to study Lie symmetry and conserved quantity of variable mass holonomic systemon time scale. The variable mass continuous and discrete systems were effectively unified through time scale. Firstly，the differential equation of motion for the variable mass holonomic system on time scale was given. Secondly，based on the invariance of differential equation under the infinitesimal transformation，the determination equation of the variable mass holonomic system on time scale was gained，and Lie symmetry and conserved quantity of variable mass holonomic system on time scale were established. Then，the Lie symmetry of variable mass holonomic system on time scale was discussed to conveniently obtain Lie symmetry theory of variable mass holonomic system under continuous and discrete conditions. Finally，an example was given to illustrate the application of this method.

**Key words**：time scale；Lie symmetry；variable mass holonomic system；conserved quantity

## 0　引　言

时间尺度是一个关于时间的模型。时间尺度理论是Hilger[1]于1988年在其博士学位论文里提出来的一个数学理论，它将处理连续系统问题的微分方程与处理离散系统问题的差分方程进行了统一，不仅揭示了二者之间的异同点，而且也避免了对一些问题的重复研究，因而使得动力学系统的研究更具一般性。目前时间尺度上微积分理论[2-4]正在处于快速发展阶段，不仅在生物学、物理学、经济学以

收稿日期：2019－03－29　　网络出版日期：2019－06－05
基金项目：国家自然科学基金项目(11872335)
作者简介：吴艳(1993－　)，女，安徽颍上人，硕士研究生，主要从事物理学中的现代数学方法方面的研究。
通信作者：傅景礼，E-mail:sqfujingli@163.com

及工程领域[5-9]里有着广泛的应用，而且在研究动力学系统的对称性与守恒量也取得了一些重要的成果，如：Cai 等[10-11]得到了时间尺度上非保守和非完整系统的 Noether 定理和 Lie 对称性；张毅[12]给出了时间尺度上 Hamilton 原理和正则方程，得到了 Hamilton 系统的 Noether 对称性理论；Tian 等[13]得到了时间尺度上 Herglotz 型 Hamilton 系统的 Noether 定理及守恒量；林巍等[14]得到了时间尺度上非 Chetaeve 型非完整系统的 Lie 对称性及守恒量。

在力学和物理学中对称性理论作为基本法则因此有着许多的应用，其中之一就是用来寻求系统存在的守恒量。求解力学系统的守恒量主要有以下两种理论：一种依据的是力学系统中的 Hamilton 作用量在无限小群变换下的不变性的 Noether 理论；另一种依据的是力学系统中的运动微分方程在无限小群变换下的不变性的 Lie 理论。国内外学者利用这两种方法取得了很多重要的结果[15-24]，然而关于时间尺度上 Lie 对称性理论研究才刚刚开始[11,14]。

物体的质量会随着物体的运动状态的改变而不断变化，因此变质量力学系统主要研究的是作用在运动物体上的力与物体运动状态之间存在的关系。日常生活中的变质量系统主要有：工作状态下的吸尘器、下落的陨石、因冻结而质量增加的浮冰、喷气式飞机、航天器等。要解决这些物体在运动状态下存在的力学问题就需要运用变质量力学系统的理论知识。目前对于变质量问题研究主要有以下两个方面：一是对变质量系统的基本理论研究；二是利用变质量系统的基本理论进行实际应用。近年来，变质量系统中有关变质量连续系统与离散系统的对称性问题研究取得了一些重要的成果[25-29]。为了更好地探索变质量完整系统的一般物理性质，本文引入时间尺度概念，进一步研究变质量完整系统的 Lie 对称性理论，统一变质量连续系统与离散系统的 Lie 对称性理论。

## 1 时间尺度上变质量完整系统的运动方程

文中涉及时间尺度理论的定义及性质请参阅文献[3]。

假设时间尺度上由 $N$ 个质点组成变质量完整系统。因此在时刻 $t$，第 $i$ 个质点的质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,N)$。在时刻 $t+\Delta t$，$\Delta m_i$ 是质点分离的微粒质量。假设时间尺度山变质量完整系统的位形是由 $n$ 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定，并且假设在时间尺度上质点依赖于时间 $t$ 、广义坐标 $q_s^\sigma$ 和广义速度 $q_s^\Delta$：

$$m_i=m_i(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta) \tag{1}$$

时间尺度上变质量完整系统的运动微分方程为

$$\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial {q_s}^\Delta}-\frac{\partial L}{\partial {q_s}^\sigma}={Q_s}''+P_s \tag{2}$$

其中：$Q''_s$ 非势广义力，$P_s$ 为广义反推力。广义反推力 $P_s$ 可以用式(3)表示：

$$P_s=(R_i+m_i^\Delta r_i^\Delta)\frac{\partial r_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}r_i^\Delta\cdot r_i^\Delta\frac{\partial m_i}{\partial q_s}+\frac{\Delta}{\Delta t}\left(\frac{1}{2}r_i^\Delta\cdot r_i^\Delta\frac{\partial m_i}{\partial q_s^\Delta}\right) \tag{3}$$

其中：$r_i$ 是第 $i$ 个质点的矢径，$r_i^\Delta$ 是第 $i$ 个质点的速度，而

$$R_i=\frac{\Delta m_i}{\Delta t}u_i \tag{4}$$

其中：$u_i$ 是微粒相对于第 $i$ 个质点的相对速度。

假设系统非奇异，将式(2)展开，可以得到所有的广义加速度：

$$q_s^{\Delta\Delta}=g[t,q_s^\sigma(t),q_s^\Delta(t)] \tag{5}$$

引入关于时间 $t$ 与广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 的无限小参数变换群：

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)+o(\varepsilon) \\ q_s^*=q_s^\sigma+\varepsilon\xi_s(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)+o(\varepsilon) \end{cases} \tag{6}$$

其中：$\varepsilon$ 为无限小参数，$\xi_0$，$\xi_s$ 为无限小生成元。

令时间尺度上无限小生成元向量为：

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s^\sigma\frac{\partial}{\partial q_s^\sigma} \tag{7}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s^\sigma\frac{\partial}{\partial q_s^\sigma}+(\xi_s^\Delta-\xi_0^\Delta q_s^{\sigma\Delta})\frac{\partial}{\partial q_s^\Delta} \tag{8}$$

以及二次扩展

$$X^{(2)}=X^{(1)}+[(\xi_s^\Delta-\xi_0^\Delta q_s^{\sigma\Delta})^\Delta-\xi_0^\Delta q_s^{\sigma\Delta\Delta}]\frac{\partial}{\partial q_s^{\Delta\Delta}} \tag{9}$$

因此，根据时间尺度上的微分方程在无限小群变换下的不变性理论知，式(5)在无限小群变换式(6)下的不变性可表示为：

$$X^{(2)}\{q_s^{\Delta\Delta}-g[t,q_s^\sigma(t),q_s^\Delta(t)]\}=0 \tag{10}$$

即

$$\xi_s^{\Delta\Delta}-\xi_0^{\Delta\Delta}q_s^{\sigma\Delta}-2\xi_0^\Delta q_s^{\sigma\Delta\Delta}=X^{(1)}g \tag{11}$$

如果生成元 $\xi_0$，$\xi_s$ 能够满足确定方程(11)，则相对应的对称性变换就是时间尺度上变质量完整系统的 Lie 对称性变换。

## 2　结构方程与守恒量

关于时间尺度上变质量完整系统，Lie 对称性不一定总是存在相对应的守恒量。

**定理 1**　如果无限小生成元 $\xi_0,\xi_s$ 满足时间尺度上变质量完整系统的确定方程(11)，并且规范函数 $G=G(t,q_s^\sigma,q_s^\Delta)$ 满足如下的结构方程

$$L\xi_0+X^{(1)}L+\mu(t)\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s^\Delta+(Q''_s+P_s)(\xi_s^\sigma-\xi_0^\sigma q_s^{\sigma\Delta})=-\frac{\Delta}{\Delta t}G \tag{12}$$

则时间尺度上变质量完整系统存在如下形式的守恒量：

$$I=\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s+\left[L-\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}q_s^\Delta-\frac{\partial L}{\partial t}\mu(t)\right]\xi_0+G=const \tag{13}$$

**证明**：

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{\Delta t}I=&\frac{\Delta}{\Delta t}\left\{\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s+\left[L-\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}q_s^\Delta-\frac{\partial L}{\partial t}\mu(t)\right]\xi_0+G\right\}\\
=&\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s+\left(\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\right)^\sigma\xi_s^\Delta+\frac{\Delta}{\Delta t}\left[L-\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}q_s^\Delta-\frac{\partial L}{\partial t}\mu(t)\right]\\
&\xi_0^\sigma+\left[L-\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}q_s^\Delta-\frac{\partial L}{\partial t}\mu(t)\right]\xi_0^\Delta+\frac{\Delta}{\Delta t}G=\\
&\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s^\sigma+\left[\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}+\mu(t)\frac{\Delta}{\Delta t}\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\right]\xi_s^\Delta+\\
&\left[\frac{\partial L}{\partial t}-(Q''_s+P_s)q_s^{\sigma\Delta}\right]\\
&\xi_0^\sigma+L\xi_0^\Delta-\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}q_s^\Delta\xi_0^\Delta-\mu(t)\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\Delta+\frac{\Delta}{\Delta t}G=\\
&\left[\frac{\partial L}{\partial q_s^\sigma}+Q''_s+P_s\right]\xi_s+\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s^\Delta+\\
&\mu(t)\left[\frac{\partial L}{\partial q_s^\sigma}+Q''_s+P_s\right]\xi_s^\Delta+\\
&\left[\frac{\partial L}{\partial t}-(Q''_s+P_s)q_s^{\sigma\Delta}\right]\xi_0^\sigma+L\xi_0^\Delta-\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}q_s^\Delta\xi_0^\Delta-\\
&\mu(t)\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\Delta+\frac{\Delta}{\Delta t}G=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q_s^\sigma}\\
&\xi_s+(\xi_s^\sigma-\xi_0^\sigma q_s^{\sigma\Delta})\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}+L\xi_0^\Delta+(Q''_s+P_s)\\
&(\xi_s^\sigma-\xi_0^\sigma q_s^{\sigma\Delta})+\mu(t)\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s^\Delta+\\
&\frac{\Delta}{\Delta t}G=L\xi_0^\Delta+X^{(1)}L+\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\mu\tau^\Delta q_s^{\Delta\Delta}+(Q''_s+P_s)\\
&(\xi^\sigma-\tau^\sigma q_s^{\sigma\Delta})+\mu(t)\frac{\partial L}{\partial q_s^\Delta}\xi_s^\Delta+\frac{\Delta}{\Delta t}G=0
\end{aligned}$$

## 3　连续和离散两种特殊时间尺度上变质量完整系统的 Lie 对称性

**推论 1**　连续时间上变质量完整系统 Lie 对称性的结构方程与守恒量。

如果 $T=\mathbf{R}$ 则 $\sigma(t)=t,\mu(t)=0$，因此由式(12)给出经典的 Lie 对称性结构方程：

$$L\xi_0+X^{(1)}L+(Q''_s+P_s)(\xi_s-\xi_0\dot q_s)=-\frac{\Delta}{\Delta t}G \tag{14}$$

而且守恒量式(13)成为经典变质量完整系统的 Lie 对称性的 Noether 型守恒量，即：

$$I=\frac{\partial L}{\partial\dot q_s}\xi_s+\left[L-\frac{\partial L}{\partial\dot q_s}\dot q_s\right]\xi_0+G \tag{15}$$

**推论 2**　离散时间上变质量完整系统 Lie 对称性的结构方程与守恒量。

如果 $\boldsymbol{T}=h\boldsymbol{Z}$ 则 $\sigma(t)=t+h,\mu(t)=h$ 令 $F=F(t)$ 则有 $F^\sigma=F(t+h),F^\Delta=\dfrac{F(t+h)-F(t)}{h}=\dot\Delta F$，因此离散变质量完整系统的运动方程写为：

$$\dot\Delta^2q_s=\gamma[t,q_s(t+h),\dot\Delta q_s] \tag{16}$$

由式(7)给出：

$$X_*^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s(t+h)\frac{\partial}{\partial q_s(t+h)} \tag{17}$$

那么式(8)可以表示为：

$$X_*^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s(t+h)\frac{\partial}{\partial q_s(t+h)}+(\dot\Delta\xi_s-\dot\Delta\xi_0\dot\Delta q_s-\dot\Delta\xi_0\dot\Delta^2q_s)\frac{\partial}{\partial(\dot\Delta q_s)} \tag{18}$$

那么式(9)可以表示为：

$$X_*^{(2)}=X_*^{(1)}+[\dot\Delta(\dot\Delta\xi_s-\dot\Delta\xi_0\dot\Delta q_s-h\dot\Delta\xi\dot\Delta^2q_s)-\dot\Delta\xi_0\dot\Delta^2q_s-h\dot\Delta\xi_0\dot\Delta^3q_s]\frac{\partial}{\partial(\dot\Delta^2q_s)} \tag{19}$$

由离散方程在无限小变换下式(6)的不变性理论可知，式(16)在式(6)下的不变性，当且仅当

$$\dot\Delta^2\xi_s-\dot\Delta^2\xi_0(\dot\Delta q_s+h\dot\Delta^2q_s)-2\dot\Delta\xi_0(\dot\Delta^2q_s+h\dot\Delta^3q_s)=X_*^{(1)}\gamma \tag{20}$$

成立。因此离散变质量完整系统 Lie 对称性的结构方程可以表示为：

$$L\xi_0+X_*^{(1)}L+h\frac{\partial L}{\partial(\dot\Delta q_s)}\dot\Delta\xi_s+(Q''_s+P_s)[\xi_s(t+h)-\xi_0(t+h)(\dot\Delta q_s+h\dot\Delta^2q_s)]+\dot\Delta G=0 \tag{21}$$

所以离散变质量完整系统的 Lie 对称性的 Noether

型守恒量可以表示为:

$$I=\frac{\partial L}{\partial(\dot{\Delta}q_s)}\xi_s+\left[L-\frac{\partial L}{\partial(\dot{\Delta}q_s)}\dot{\Delta}q_s-h\frac{\partial L}{\partial t}\right]\xi_0+G \tag{22}$$

## 4 算 例

研究一个变质量质点,其质量为

$$m=m_0 e^{-\alpha t},m_0=const,\alpha=const,\alpha>0$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m[(q_1^{\Delta})^2+(q_2^{\Delta})^2] \tag{23}$$

系统的非势广义力为

$$\begin{cases}Q''_1=Q''_1(t,q_1^{\sigma},q_1^{\Delta},q_2^{\Delta})\\ Q''_2=q_2^{\sigma}+q_1^{\Delta}q_2^{\Delta}\end{cases} \tag{24}$$

微粒分离的绝对速度为 0,即

$$u=-r^{\Delta}=-q_1^{\Delta}i-q_2^{\Delta}j \tag{25}$$

系统的广义反推力为

$$P_1=P_2=0 \tag{26}$$

根据式(2)可知:

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(mq_1^{\Delta})=Q''_1,\frac{\Delta}{\Delta t}(mq_2^{\Delta})=q_2^{\Delta}+q_1q_1^{\Delta}=0 \tag{27}$$

因此可求得广义加速度

$$q_1^{\Delta\Delta}=hq_1^{\Delta}+\frac{Q''_1}{m},q_2^{\Delta\Delta}=hq_2^{\Delta}+\frac{1}{m}(q_2^{\Delta}+q_1q_1^{\Delta}) \tag{28}$$

根据时间尺度上变质量完整系统的确定方程(11)得到

$$\xi_1=q_1^{\Delta}\xi_0,\xi_2=1+q_2^{\Delta}\xi_0,\xi_0=const \tag{29}$$

根据时间尺度上变质量完整系统的结构方程(12)可得

$$L\xi_0^{\Delta}+L^{\Delta}\xi_0+q_2^{\Delta}+q_1^{\sigma}q_1^{\Delta}+G^{\Delta}=0 \tag{30}$$

故规范函数

$$G(t,q_s^{\sigma},q_s^{\Delta})=-L\xi_0-q_2^{\sigma}-\frac{1}{2}(q_1^{\sigma})^2 \tag{31}$$

根据定理 1,将生成元式(29)以及规范函数式(31)代入式(13),得到系统的守恒量:

$$I=mq_2^{\Delta}-q_2^{\sigma}-\frac{1}{2}(q_1^{\sigma})^2=const \tag{31}$$

如果 $T=\mathbf{R}$ 则 $\sigma(t)=t,\mu(t)=0$,因此由式(15)知,系统有如下连续的守恒量:

$$I=m\dot{q}_2-q_2-\frac{1}{2}q_1^2=const \tag{32}$$

如果 $T=h\mathbf{Z}$ 则 $\sigma(t)=t+h,\mu(t)=h$,因此由式(22)知,系统有如下离散的守恒量:

$$I=m(\dot{\Delta}q_2)-q_2(t+h)-\frac{1}{2}q_1^2(t+h)=const \tag{33}$$

## 5 结 论

本文研究了时间尺度上变质量完整系统的 Lie 对称性及其守恒量,将变质量连续与离散系统有效统一起来。提出并建立了时间尺度上变质量完整系统的确定方程,给出了时间尺度上的结构方程以及守恒量式,讨论了时间尺度上变质量连续及离散系统的 Lie 对称性。该方法还可以扩展到各类约束力学系统以及对称性理论中,如机电系统、机电耦合系统、相对运动系统等。

参考文献:

[1] Hilger S. Differential and difference calculus: Unified! [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications,1997, 30(5):2683-2694.

[2] Ahlbrandt C D, Bohner M, Ridenhour J. Hamiltonian systems on time scales[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 250(2):561-578.

[3] Bohner M, Peterson A. Dynamic equations on time scales[M]. Boston, MA: Birkhäuser Boston,, 2001: 23-65.

[4] Bohner M, Gusein S H. Partial differentiation on time scales[J]. Dynamic Systems & Applications, 2004, 13(3):351-379.

[5] Agarwal R P, Bohner M. Basic calculus on time scales and some of its applications[J]. Results in Mathematics, 1999, 35(1/2):3-22.

[6] Bartosiewicz Z, Kotta Ü, Pawluszewicz E. Equivalence of linear control systems on time scales[J]. Proceedings of the Estonian Academy of Sciences: Physics, Mathmatics, 2006, 55(1):43-52.

[7] Agarwal R P, O´Regan D, Saker S H. Properties of bounded solutions of nonlinear dynamic equations on time scales [J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2006, 14(1):1-10.

[8] Atici F M, Biles D C, Lebedinsky A. An application of time scales to economics [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2006, 43(7/8):718-726.

[9] Dryl M, Torres D F M. A general delta-nabla calculus of variations on time scales with application to economics [J]. International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 2014, 5(1):42-71.

[10] Cai P P, Fu J L, Guo Y X. Noether symmetries of the nonconservative and nonholonomic systems on time

scales [J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2013, 56(5):1017-1028.

[11] Cai P P, Fu J L, Guo Y X. Lie symmetries and conserved quantities of the constraint mechanical systems on time scales[J]. Reports on Mathematical Physics, 2017, 79(3):279-298.

[12] 张毅. 时间尺度上 Hamilton 系统的 Noether 理论[J]. 力学季刊, 2016, 37(2):214-224.

[13] Tian X, Zhang Y. Noether symmetry and conserved quantity for Hamiltonian system of Herglotz type on time scales [J]. Acta Mechanica, 2018, 229 (9): 3601-3611.

[14] 林魏, 朱建青. 时间尺度上非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性及其守恒量[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2018,57(2):76-79.

[15] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 中国科学(A 辑 数学 物理学 天文学 技术科学), 1993, 23(7): 709-717.

[16] 张宏彬. 单面约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论[J].物理学报, 2001, 50(10):1837-1841.

[17] Fu J L, Chen L Q. On Noether symmetries and form invariance of mechanico－electrical systems [J]. Physics Letters A, 2004, 331(3/4):138-152.

[18] Mei F X, Wu H B. Symmetry of Lagrangians of nonholonomic systems[J]. Physics Letters A, 2008, 372(13):2141-2147.

[19] Fu J L, Chen L Q, Chen B Y. Noether－type theorem for discrete nonconservative dynamical systems with nonregular lattices [J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2010, 53(3):545-554.

[20] Wang P. Perturbation to symmetry and adiabatic invariants of discrete nonholonomic nonconservative mechanical system[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 68 (1/2):53-62.

[21] Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1979, 12(7):973-981.

[22] Mei F X, Wu R H, Zhang Y F. Lie symmetries and conserved quantities of nonholonomic systems of non－Chetaev type [J]. Acta Mech Sinica, 1988, 23 (4): 71-75.

[23] Fu J L, Chen L Q, Bai J H, et al. Lie symmetries and conserved quantities of controllable nonholonomic dynamical systems [J]. Chinese Phyics B, 2003, 12 (7):695-699.

[24] 施沈阳, 傅景礼, 陈立群, 等. 离散 Lagrange 系统的 Lie 对称性[J]. 物理学报, 2007, 56(6): 3060-3063.

[25] 梅凤翔.李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999:349-354.

[26] 方建会, 陈培胜, 张军. 变质量非完整系统的形式不变性与 Lie 对称性[J].应用数学和力学, 2005, 26(2): 187-192.

[27] 王菲菲, 方建会, 王英丽, 等. 离散变质量完整系统的 Noether 对称性与 Mei 对称性[J]. 物理学报, 2014, 63 (17):170202.

[28] Thomson W T. Equations of motion for the variable mass system[J]. AIAA Journal, 1966, 4(4):766-768.

[29] Indeitsev D A, Gavrilov S N, Mochalova Y A, et al. Evolution of a trapped mode of oscillation in a continuous system with a concentrated inclusion of variable mass [J]. Doklady Physics, 2016, 61 (12): 620-624.

(责任编辑:康　锋)