



一类复 mKdV 方程的精确行波解

原培英¹, 张建明¹, 张丽俊^{1,2}

(1. 浙江理工大学理学院, 杭州 310018; 2. 山东科技大学数学与系统科学学院, 山东青岛 266590)

摘 要: 研究了一类复 mKdV 方程, 利用平移、旋转及尺度变换将其行波方程简化为常系数的平面动力系统。在复系数的虚部为零的情况下得到了一个二阶常微分方程, 通过研究参数不同值时该方程的精确行波解, 从而得到了复 mKdV 方程的各类精确行波解。

关键词: 行波解; 动力系统; 分支理论; 复 mKdV 方程

中图分类号: O193

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2019) 07-0522-05

Exact traveling wave solutions to a complex mKdV equation

YUAN Peiying¹, ZHANG Jianming¹, ZHANG Lijun^{1,2}

(1. School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. College of Mathematics and System Science, Shandong University of
Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: A complex mKdV equation was studied. The traveling wave equation was reduced to a planar dynamical system with constant coefficients by using of translation, rotation and scale change. A second-order ordinary differential equation was obtained in the case that the imaginary part of the complex coefficient was 0. Various traveling wave solutions to the complex mKdV equation were gained by studying the exact traveling wave solutions of the equation under different research parameters.

Key words: traveling wave solutions; dynamical systems; bifurcation theory; complex mKdV equation

0 引 言

非线性波方程可以用来模拟物理、化学、生物等领域中的复杂现象, 对其行波解的研究是近年来的热点问题之一^[1-3]。在研究非线性波方程的过程中, 产生了很多有效的方法, 例如齐次平衡法^[4]、sine-cosine 函数法^[5]、tanh 函数法^[6]和动力系统的方法^[7]等。本文主要运用动力系统定性理论和分支方法研究如式(1)所示的复 mKdV 方程的行波解。

$$u_t + \alpha \bar{u} u u_x + \beta \bar{u}_x u^2 + \gamma u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

其中: $u \triangleq u(x, t)$ 是关于变量 x 和 t 的复函数, \bar{u} 是 u 的共轭, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ 是复数, γ 是实数。当 α 和 β 是实数时, 该方程描述光纤中短波的传播^[8-9]。当参数满足 $\beta/\alpha = 0$ 或 $\beta/\alpha = 1/3$ 时, 该方程为可积系统^[10-11], 并显示出丰富的数学特征。当 $\alpha \neq 0$ 且 $\beta \neq 0$ 时, Gao 等^[12]利用简化的摄动方法得到了两层流体系统中耦合的变系数复 mKdV 方程, 并得到一些精确解。Stephen 等^[13]研究了方程(1)

收稿日期: 2019-01-07 网络出版日期: 2019-03-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(11672270); 浙江省自然科学基金项目(LY15A010021); 浙江理工大学科研启动基金项目(LY15A010021)

作者简介: 原培英(1993—), 女, 河南新乡人, 硕士研究生, 主要从事微分方程方面的研究。

通信作者: 张丽俊, E-mail: li-jun0608@163.com

的行波解和守恒律,利用行波变换将方程(1)转化为三阶常微分方程,从而得到了方程(1)的孤波解和扭波解。本文在文献[13]的基础上,利用动力系统的相图分析方法不仅得到方程(1)的各类精确行波解,而且得到了方程(1)的行波解在各种参数条件下的分支情况。

1 复 mKdV 方程的约化

Stephen 等^[13]指出,复 mKdV 方程在下列情况下满足不变性:a)尺度变换: $x \rightarrow \lambda x, t \rightarrow \lambda t, u \rightarrow \lambda^{-1}u$; b)时间平移: $t \rightarrow t + \varepsilon$; c)空间平移: $x \rightarrow x + \varepsilon$; d)相位旋转: $u \rightarrow \exp(i\varphi)u$, 其中参数满足: $\lambda \neq 0, -\infty < \varepsilon < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ 。

对方程(1)做行波变换, $u = U(\xi), \xi = x - ct$, 则方程(1)转化为三阶非线性复方程:

$$-cU' + \alpha \bar{U}UU' + \beta U^2U' + U''' = 0 \quad (2)$$

注意到方程(2)在相位旋转 $U \rightarrow \exp(i\varphi)U$ 下保持不变,当方程中的系数 α 和 β 是实数时,所有的实数解 $U(\xi)$ 可以利用积分因子直接得到,然而当系数是复数且需要寻找方程的所有复解时,方程(2)一般不能明确地被积分。对此,令

$$U = a + bf(\xi),$$

其中: $f(\xi)$ 是实函数, $a = a_1 + ia_2$ 和 $b = b_1 + ib_2$ 为复常数。则方程(2)在相位旋转 $a \rightarrow \exp(i\varphi)a, b \rightarrow \exp(i\varphi)b, f \rightarrow f$ 下可以写成:

$$(\alpha \bar{a}ab + \beta a^2\bar{b} - cb)f' + ((\alpha + 2\beta)ab\bar{b} + a\bar{a}b^2)f f' + (\alpha + \beta)b^2\bar{b}f^2f' + bf''' = 0 \quad (3)$$

若 $b = |b|$, 则方程(3)可以写成

$$(A + Bf + Cf^2)f' + f''' = 0 \quad (4)$$

其中: $A = \alpha|a|^2 + \beta a^2 - c, B = (\alpha(a + \bar{a}) + 2\beta a)|b|, C = (\alpha + \beta)|b|^2$ 。因为 f 是实函数,这就要求 $\text{Im } A = \text{Im } B = \text{Im } C = 0$, 且满足下面两种情况: a) $a_2 \neq 0, \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$; b) $a_2 = 0, \alpha_2 + \beta_2 = 0$ 。将方程(4)积分一次并令积分常数为 0 得:

$$f'' + \frac{1}{3}Cf^3 + \frac{1}{2}Bf^2 + Af = 0 \quad (5)$$

本文将通过研究方程(5)的分支和相图得到方程(1)的各类行波解。

2 行波系统的分支和相图

方程(5)可转化为平面系统:

$$f' = g, g' = -\frac{1}{3}Cf^3 - \frac{1}{2}Bf^2 - Af \quad (6)$$

且其哈密顿函数为:

$$H(f, g) = \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{12}Cf^4 + \frac{1}{6}Bf^3 + \frac{1}{2}Af^2 \quad (7)$$

令 $F(f) = -\frac{1}{3}Cf^3 - \frac{1}{2}Bf^2 - Af$, 通过计算

可得:当 $B^2 > \frac{16}{3}AC$ 时, $F(f)$ 有三个零点: $f_0 = 0$ 、

$f_1 = -(3B + \sqrt{9B^2 - 48AC})/(4C)$ 和 $f_2 = (-3B - \sqrt{9B^2 - 48AC})/4C$, 因此系统(6)有三个平衡点: $(0, 0)$ 、 $(f_1, 0)$ 和 $(f_2, 0)$ 。当 $C > 0$ 时,有 $f_2 > f_1$ 成立,系统(6)有一个鞍点和两个中心点,且有一条连接鞍点的同宿轨,该轨道是环绕两个中心点的边界曲线;当 $C < 0$ 时,有 $f_1 > f_2$ 成立,系统(6)有两个鞍点和一个中心点,当 $A \neq 0$ 且 $B \neq 0$ 时,有一条连接鞍点的同宿轨,当 $A > 0$ 且 $B = 0$ 时,有两条连接两个鞍点的异宿轨,这两条异宿轨是环绕中心点的一族闭轨的边界曲线。图 1(a)为当 $C > 0$ 时系统(6)的相图,图 1(b)~(d)为当 $C < 0$ 时系统(6)的相图。

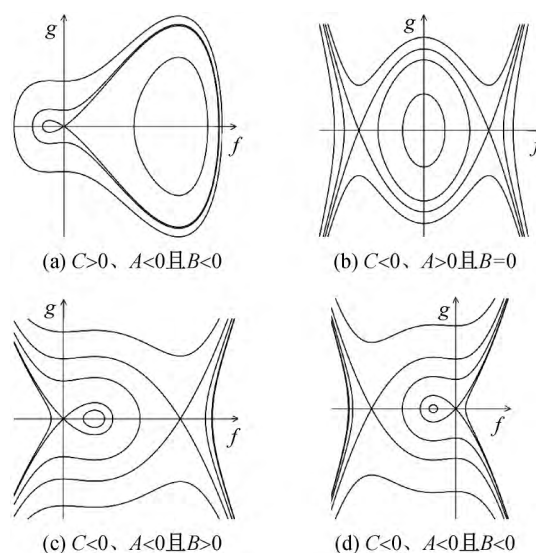


图 1 当 $B^2 > \frac{16}{3}AC$ 时系统(6)的相图

当 $B^2 = \frac{16}{3}AC$ 时, $F(f)$ 有两个零点: $f_0 = 0$ 和

$f_3 = -\frac{3B}{4C}$, 因此系统(6)有两个平衡点: $(0, 0)$ 和 $(f_3, 0)$ 。当 $C > 0$ 时,系统(6)有一个中心点和一个尖点,有一条连接尖点的同宿轨,该轨线是环绕中心点的一族闭轨的边界曲线;当 $C < 0$ 时,系统(6)有一个鞍点和一个尖点,这时系统(6)无有界轨。图

2 为当 $B^2 = \frac{16}{3}AC$ 时系统(6)的相图。

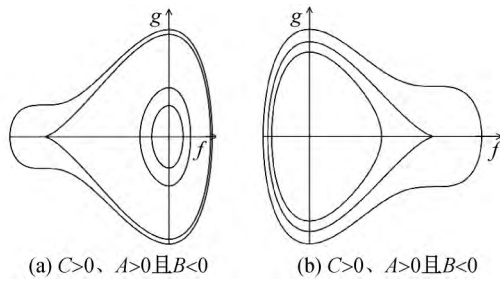


图2 当 $B^2 = \frac{16}{3}AC$ 时系统(6)的相图

当 $B^2 < \frac{16}{3}AC$ 时, $F(f)$ 有一个零点 $f_0 = 0$, 因此系统(6)仅有一个平衡点 $(0, 0)$ 。当 $C > 0$ 时,

$$f_{r\pm}(\xi) = \pm \frac{12Ae^{\sqrt{-A}(\xi-\xi_0)}}{\sqrt{B^2-6AC}e^{2\sqrt{-A}(\xi-\xi_0)} + 2Be^{\sqrt{-A}(\xi-\xi_0)} + \sqrt{B^2-6AC}} \quad (8)$$

其中: ξ_0 为常数。若令 $h \in (0, +\infty)$, $H(f, g) = h$ 确定方程(5)的解为

$$f(\xi) = \frac{(u_1 p_2 - u_2 p_1) \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{C}{6p_1 p_2}}(\xi - \xi_0), k\right) - (u_1 p_2 + u_2 p_1)}{(p_2 - p_1) \operatorname{cn}\left(\sqrt{\frac{C}{6p_1 p_2}}(\xi - \xi_0), k\right) - (p_1 + p_2)} \quad (9)$$

其中: $u_1 \in (f_+, +\infty)$, u_2 满足方程

$$(u_1 + u_2)(u_1^2 + u_2^2 + 6A) + 2B(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) = 0, m = u_1 + u_2 + \frac{2B}{C},$$

$$n = u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 + \frac{2B(u_1 + u_2) + 6A}{C}, p_1 = \sqrt{u_1^2 + m u_1 + n}, p_2 = \sqrt{u_2^2 + m u_2 + n}。当 h \in (H(f_1, 0), 0), H(f, g) = h 确定方程(5)的周期解$$

$$f(\xi) = \frac{u_1(u_4 - u_2) + u_4(u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2C}{3(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}}(\xi - \xi_0), k\right)}{u_4 - u_2 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{2C}{3(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}}(\xi - \xi_0), k\right)} \quad (10)$$

其中: $u_1 \in (f_-, +\infty)$, u_3 和 u_4 是方程 $f^2 + m f + n = 0$ 的两个根, $k = \sqrt{\frac{(u_4 - u_3)(u_2 - u_1)}{(u_4 - u_2)(u_3 - u_1)}}$ 。当 $h \in (H(f_2, 0), H(f_1, 0)]$ 时, 可得方程(5)的周期解为式(9), 其中 $u_1 \in (f_2, f_+)$ 。

a2) $C < 0, A > 0$ 且 $B = 0$ 。当 $h = H(f_1, 0)$ 时, $H(f, g) = h$ 确定方程(5)的解

$$f(\xi) = \pm \sqrt{-\frac{3A}{C}} \tanh\left(\sqrt{\frac{A}{2}}(\xi - \xi_0)\right) \quad (11)$$

其中: $u_1 \in (0, f_2)$, $k = \sqrt{\frac{(u_2 - u_1)(u_4 - u_3)}{(u_4 - u_1)(u_2 - u_3)}}$ 。

a4) $C < 0, A < 0$ 且 $B < 0$ 。 $H(f, g) = 0$ 对应

$(0, 0)$ 为中心, 系统(6)有一族环绕中心点的闭轨; 当 $C < 0$ 时, $(0, 0)$ 为鞍点, 系统(6)无有界轨。

令 $f_+ = (-B + \sqrt{B^2 - 6AC})/C$, $f_- = (-B - \sqrt{B^2 - 6AC})/C$, 由平面分支与定性理论可知, 系统(6)的所有轨道由 $H(f, g) = h$ 所确定, 据此可得以下结论:

定理1 a) 当 $B^2 > \frac{16}{3}AC$ 时, 方程(5)有如下

有界解:

a1) $C > 0, A < 0$ 且 $B < 0$ 。 $h = 0$ 确定系统(6)的两条同宿轨, 对应方程(5)的解

当 $h \in (0, H(f_1, 0))$ 时, 可得方程(5)的周期解

$$f(\xi) = u_1 \operatorname{sn}\left(\sqrt{-\frac{C}{6}}u_2(\xi - \xi_0), \frac{u_1}{u_2}\right) \quad (12)$$

其中: $u_1 \in (0, f_+)$, $u_2 = \sqrt{-u_1^2 - \frac{2}{C}}$ 。

a3) $C < 0, A < 0$ 且 $B > 0$ 。当 $h = 0$ 时, $H(f, g) = h$ 对应系统(6)的一条同宿轨, 这时方程(5)的解为 f_{r+} 。当 $h \in (H(f_2, 0), 0)$ 时, 可得方程(5)的周期解

$$f(\xi) = \frac{u_1(u_2 - u_3) + u_3(u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{-2C}{3(u_4 - u_1)(u_2 - u_3)}}(\xi - \xi_0), k\right)}{u_2 - u_3 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{-2C}{3(u_4 - u_1)(u_2 - u_3)}}(\xi - \xi_0), k\right)} \quad (13)$$

系统(6)的一条同宿轨, 可得方程(5)的解为 f_{r-} 。当 $h \in (H(f_1, 0), 0)$ 时, $H(f, g) = h$ 确定方程(5)的周期解

$$f(\xi) = \frac{u_1(u_1 - u_3) + u_3(u_1 - u_2) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{-2C}{3(u_4 - u_2)(u_1 - u_3)}}(\xi - \xi_0), k\right)}{u_1 - u_3 + (u_1 - u_2) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{-2C}{3(u_4 - u_2)(u_1 - u_3)}}(\xi - \xi_0), k\right)} \quad (14)$$

其中: $u_1 \in (f_1, 0)$, $k = \sqrt{\frac{(u_1 - u_2)(u_4 - u_3)}{(u_4 - u_2)(u_1 - u_3)}}$ 。

b) 当 $B^2 = \frac{16}{3}AC$ 且 $C > 0$ 时, 方程(5)有如下有界解:

当 $h = H(f_3, 0)$ 时, $H(f, g) = h$ 确定方程(5)的有界解

$$f(\xi) = \frac{96BC^2 + f_3(4C^2f_3 - BC)^2\xi^2}{(4C^2f_3 - BC)^2\xi^2 + 384C^3} \quad (15)$$

当 $h \in (0, H(f_3, 0))$ 时, $H(f, g) = h$ 确定方程(5)的周期解为式(9), 其中: $u_1 \in (f_3, 0)$, u_2 满足方程 $(u_1 + u_2)(u_1^2 + u_2^2 + 6A) + 2B(u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2) = 0$ 。

c) 当 $C > 0, B = 0$ 且 $A > 0$ 。取 $h \in (0, +\infty)$ 时, $H(f, g) = h$ 确定方程(5)的周期解

$$f(\xi) = u_1 \operatorname{cn}(p_3(\xi - \xi_0), k) \quad (16)$$

其中: $u_1 \in (0, +\infty)$, $p_3 = \sqrt{\frac{Cu_1^2}{3} + A}$, $k = \frac{u_1}{\sqrt{2(u_1^2 + \frac{3A}{C})}}$ 。

3 方程(1)的精确行波解

由于方程(5)的周期轨、同宿轨和异宿轨分别对应于方程(1)的周期波解、孤波解和扭波解, 且方程(1)的解为 $u(x, t) = e^{i\varphi}(a + bf(\xi))$, 根据以上分析得到下面的结论:

定理 2 对于任意的 $0 \leq \varphi < 2\pi, \xi = x - ct$, 方程(1)具有如下形式的行波解

$$u(x, t) = e^{i\varphi}(a + bf(\xi)) \quad (17)$$

a) $B^2 > \frac{16}{3}AC$ 。当 $C > 0, A < 0$ 且 $B < 0$ 时, 若 $f(\xi)$ 由式(8)给出, 则式(17)为孤波解; 若 $f(\xi)$ 由式(9)、(10)给出, 则式(17)为周期波解。当 $C < 0, A > 0$ 且 $B = 0$ 时, 若 $f(\xi)$ 由式(11)给出, 则式(17)为扭波解; 若 $f(\xi)$ 由式(12)给出, 则式(17)为周期波解。当 $C < 0, A < 0$ 且 $B > 0$ 时, 若 $f(\xi)$ 由 f_{r+} 给出, 则式(17)为孤波解; 若 $f(\xi)$ 由式(13)给出, 则式(17)为周期波解。当 $C < 0, A < 0$ 且 $B < 0$ 时, 若 $f(\xi)$ 由 f_{r-} 给出, 则式(17)为孤波解; 若

$f(\xi)$ 由式(14)给出, 则式(17)为周期波解。

b) $B^2 = \frac{16}{3}AC$ 且 $C > 0$ 。若 $u_1 = f_3$ 且 $f(\xi)$ 由式(15)给出, 则式(17)为孤波解; 若 $u_1 \in (f_3, 0)$ 且 $f(\xi)$ 由式(9)给出, 则式(17)为周期波解。

c) 当 $C > 0, B = 0$ 且 $A > 0$ 时, 若 $f(\xi)$ 由式(16)给出, 则式(17)为周期波解。

4 结 语

众所周知, 要给出非线性方程的解一般来说都是非常困难的, 本文利用 Lie 群分析法将复 mKdV 方程约化为二阶常微分方程, 借助动力系统定性理论和分支方法, 通过研究该方程的分支和相图, 得到其在各种参数条件下的精确的有界行波解, 进而得到复 mKdV 方程的精确行波解, 其中包括孤波解、周期波解和扭波解。

参考文献:

- [1] 王越, 张丽俊. 广义可压缩杠杆方程的精确行波解[J]. 浙江理工大学学报, 2018, 39(5): 624-629.
- [2] 张丽俊, 陈立群. 一类高阶非线性波方程的子方程与精确行波解[J]. 应用数学与力学, 2015, 36(5): 548-554.
- [3] Zhang L J, Chang H X, Khalique C M. Sub-manifold and traveling wave solutions of Ito's 5th-order mKdV equation [J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2017, 7(4): 1417-1430.
- [4] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B. Application of a homogeneous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Physics Letter A, 1996, 216(1-5): 67-75.
- [5] Yan C T. A simple transformation for nonlinear waves [J]. Physics Letter A, 1996, 224(1/2): 77-84.
- [6] Yan Z Y. New explicit travelling wave solutions for two new integrable coupled nonlinear evolution equations[J]. Physics Letter A, 2001, 292(1/2): 100-106.
- [7] Chow S N, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer, 1982: 311-348.
- [8] Gilson C, Hietarinta J, Nimmo J, et al. The Sasa-Satsuma higher-order nonlinear Schrödinger equation and its bilinearization and multi-soliton solutions[J]. Physical Review E, 2003, 68(1): 06614.
- [9] Radhakrishnan R, Lakshmanan M. Exact soliton

- solutions to coupled nonlinear Schrödinger equations with higher-order effect[J]. Physical Review E, 1996, 54(3): 2949-2955.
- [10] Hirota R. Exact envelope soliton solutions of a nonlinear wave equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1973, 14(7): 805-809.
- [11] Sasa N, Satsuma J. New type of soliton solutions for a higher order nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1991, 60(2): 409-417.
- [12] Gao Y, Tang X Y. A coupled variable coefficient modified KdV equation arising from a two layer fluid system[J]. Communications in Theoretical Physics, 2007, 48(6): 961-970.
- [13] Stephen C A, Mihammad M, Thomas W. Traveling waves and conservation laws for complex mKdV type equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219 (2): 679-698.

(责任编辑:康 锋)